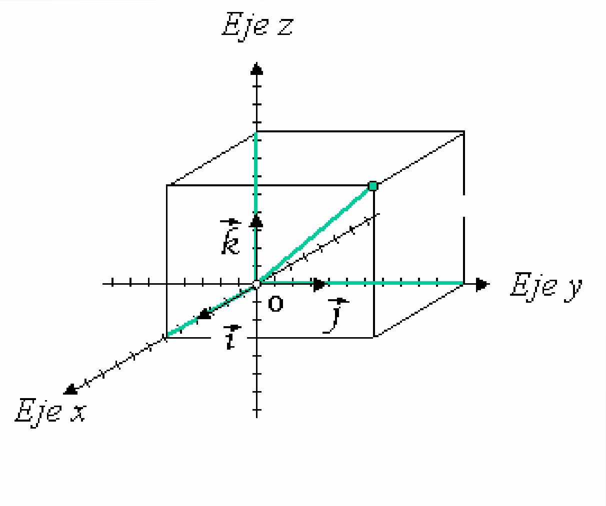
TEMA 1
Revisión de fundamentos de análisis tensorial

1. 1. Introducción

Escalares, vectores existen independientemente de un sistema de referencia



Representación:

- sistema de referencia

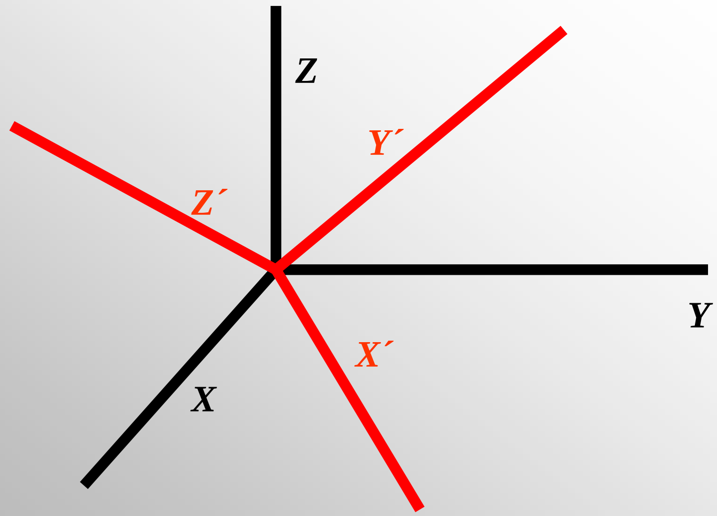
- componentes que dependen del sistema de referencia

COMPONENTES + LEY DE TRANSFORMACIÓN

1. 2. Transformación de coordenadas

Magnitud escalar: no dependen del sistema de referencia

Magnitud vectorial: orientación del sistema de referencia, no módulo y si sus componentes



OXYZ: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

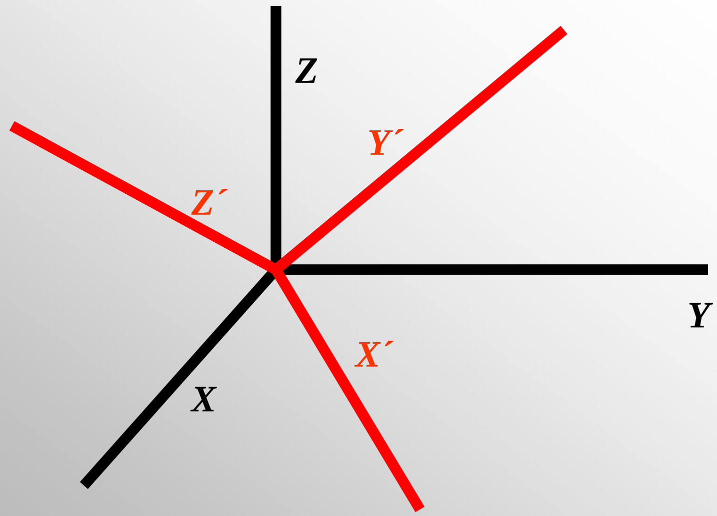
$\Downarrow$ **?**

OX´Y´Z´: $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$

Transformación de coordenadas de una magnitud vectorial:

$\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3$ **: vectores unitarios sistema OXYZ**

$\vec{u}_1^{\,\prime} \quad \vec{u}_2^{\,\prime} \quad \vec{u}_3^{\,\prime}$ **: vectores unitarios sistema OX´Y´Z´**



$$v_1' = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$$

$$v_2' = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$

$$v_3' = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$$

Escrito en forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = R \cdot \vec{v}}$$

R **matriz de rotación cuyas componentes son los cosenos directores**

1. 3. Tensores y leyes de transformación

¿Escalares y vectores son suficientes para describir todas las magnitudes físicas y las relaciones que existen entre ellas?

$$\boxed{\vec{F} = K\vec{X}}$$

- MEDIO ISÓTROPO Y ELÁSTICO:

K es un escalar

- MEDIO ANISÓTROPO:

K operador matemático capaz de modificar módulo y sentido

TENSOR: cierta clase de entidad geométrica o matemática que permite describir las magnitudes físicas y las relaciones que existen entre ellas

REPRESENTACIÓN EN COMPONENTES:

- número de componentes: n^m

n: dimensión

m: orden del tensor

- descripción completa:

COMPONENTES + LEY DE TRANSFORMACIÓN

TENSORES GENERALES

TENSORES CARTESIANOS

La MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO se puede desarrollar con TENSORES CARTESIANOS

En un espacio tridimensional (3^m):

- TENSOR DE ORDEN CERO:

Número de componentes: $3^0 = 1$, escalar

Ley de transformación: independiente del sistema de referencia

- **TENSOR DE ORDEN UNO:**

Número de componentes: $3^1 = 3$, vector

Ley de transformación: rotación sistema de referencia cartesiano

$$OXYZ \Rightarrow OX'Y'Z'$$

$$\boxed{\vec{v}' = R\vec{v}}$$

R matriz de los cosenos directores

- TENSOR DE ORDEN DOS:

Número de componentes: **$3^2 = 9$, MATRIZ 3 X 3**

Ley de transformación: **rotación sistema de referencia cartesiano**

$$OXYZ \Rightarrow OX'Y'Z'$$

$$\boxed{T' = R \cdot T \cdot R^{-1} = R \cdot T \cdot R^{T}}$$

R **matriz de los cosenos directores**

$R^{-1} = R^{T}$: **Matriz ortogonal, Bases ortonormales**

1. 4. Tipos de tensores de segundo orden

Representación matricial de un tensor de orden dos:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

- **TENSOR SIMÉTRICO:** $T_{ij} = T_{ji}$ **, 6 componentes independientes**

- **TENSOR ANTISIMÉTRICO:** $T_{ij} = -T_{ji}$ **, 3 componentes independientes**

- **TENSOR DIAGONAL:** $T_{ij} = 0$ **si** $i \neq j$

- **TENSOR ESFÉRICO:** **tensor diagonal con** $T_{11} = T_{22} = T_{33}$

- **TENSOR UNIDAD:** **tensor esférico con** $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 1$

1. 5. Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Sistema de EJES PRINCIPALES: la matriz que representa el tensor es diagonal

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

Direcciones de los ejes principales: VECTORES PRINCIPALES O AUTOVECTORES

$$\boxed{T \cdot \vec{v}_P = \lambda \cdot \vec{v}_P}$$

De esta expresión se deduce como realizar el cálculo.....

CÁLCULO DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES:

a) Autovalores:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

b) Autovectores: ejes principales

$$\begin{bmatrix} (T_{11}-\lambda_i) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22}-\lambda_i) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33}-\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_i = (a_i, b_i, c_i)$$

$$(i = 1,2,3)$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO:

$$\det(T-\lambda I) = -\lambda^3 + (T_{11}+T_{22}+T_{33})\lambda^2 - (T_{22}T_{33}+T_{11}T_{33}+T_{11}T_{22}-T_{23}T_{32}-T_{13}T_{31}-T_{12}T_{21})\lambda + \det(T)$$

Invariantes del tensor: independientes del sistema de referencia

- TRAZA O INVARIANTE LINEAL: $I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

- INVARIANTE CUADRÁTICO:

$$I_2 = T_{22}T_{33}+T_{11}T_{33}+T_{11}T_{22}-T_{23}T_{32}-T_{13}T_{31}-T_{12}T_{21}$$

- INVARIANTE CÚBICO: $I_3 = \det(T)$

1. 6. Propiedades de los tensores simétricos

Propiedades físicas: tensores de segundo orden simétricos

PROPIEDADES:

- Existe sistema de referencia de ejes principales

- Autovalores reales

- Invariantes:

$$\boxed{I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$\boxed{I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1}$$

$$\boxed{I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

1. 7. Campos tensoriales

***Campos tensoriales*: a cada punto del espacio se le asocia un tensor.**

- Un CAMPO ESCALAR es un campo tensorial de orden cero.

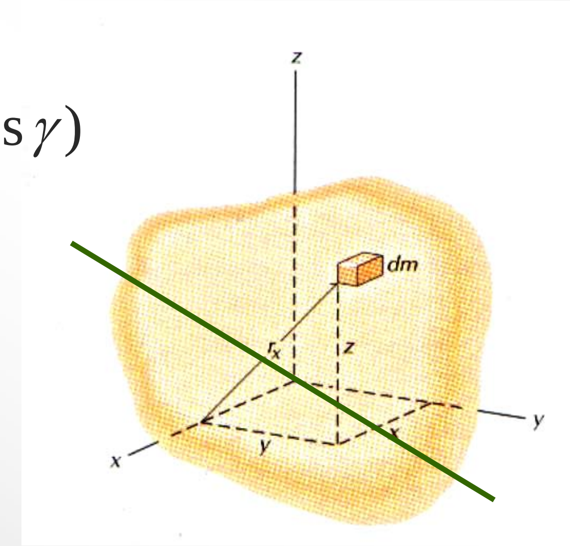
- Un CAMPO VECTORIAL es un campo tensorial de primer orden.

- Un CAMPO TENSORIAL DE ORDEN DOS asocia una matriz a cada punto del espacio.

1. 8. Ejemplos

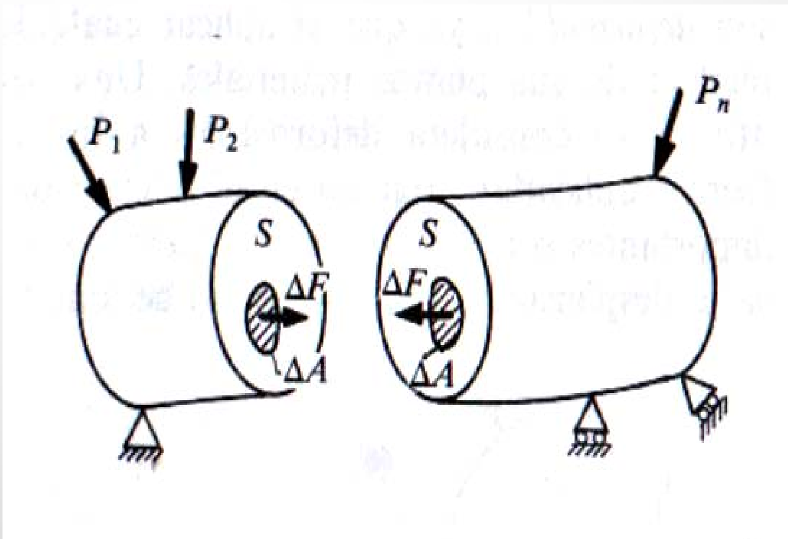
Ejemplo 1: El tensor de inercia

$$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$



$$I_0 = \begin{bmatrix} \cos\beta & \cos\alpha & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \cos\alpha \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: El tensor de tensiones



$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$