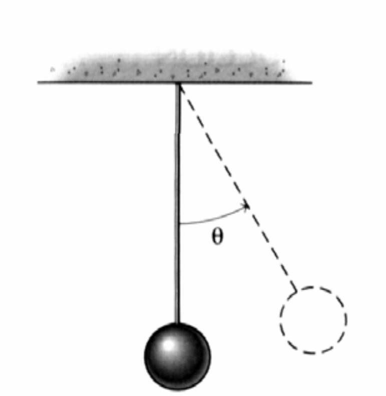
TEMA 1
Parte I
Vibraciones libres y amortiguadas

1.1. Introducción: grados de libertad y magnitudes características

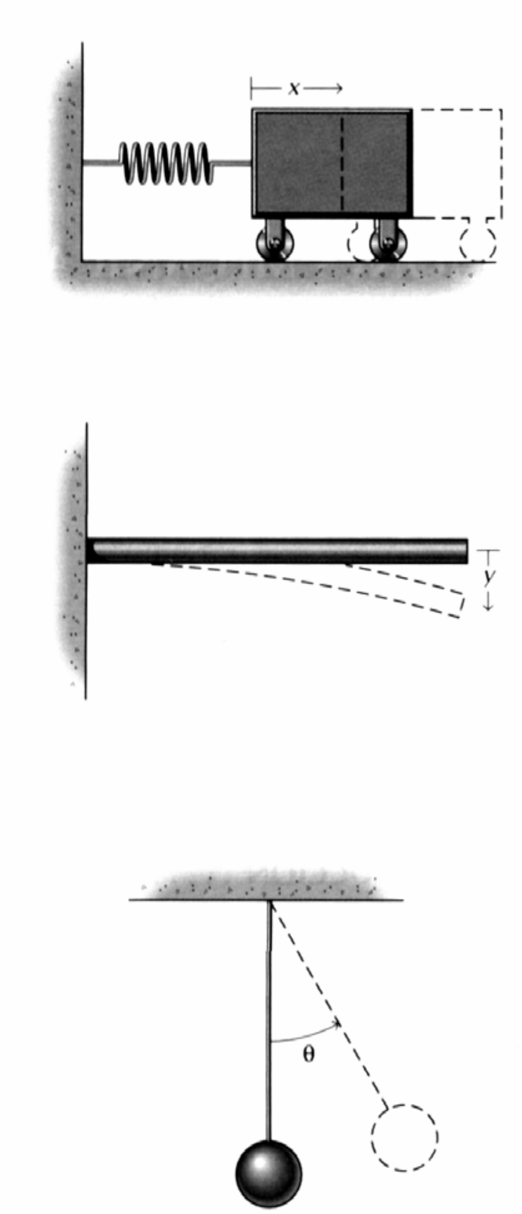
VIBRACIÓN MECÁNICA:

Oscilación repetida en torno a una posición de equilibrio



- **Vibraciones convenientes:** péndulo para regular un reloj, cuerda pulsada de una guitarra

- **Vibraciones inconvenientes:** vibraciones en estructuras a causa de terremotos, del viento, circulación de vehículos, máquinas.....



1) Fuerza adicional: desplazamiento equilibrio

2) Fuerza recuperadora: vuelta a posición equilibrio

3) Posición equilibrio: velocidad no nula

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

GRADO DE LIBERTAD:

Variables necesarias y suficientes para especificar la posición de un sistema mecánico

EJEMPLOS:

- disco que se mueve en el plano: tres grados de libertad

desplazamiento x, y

ángulo de rotación alrededor CM

- sólido rígido: seis grados de libertad

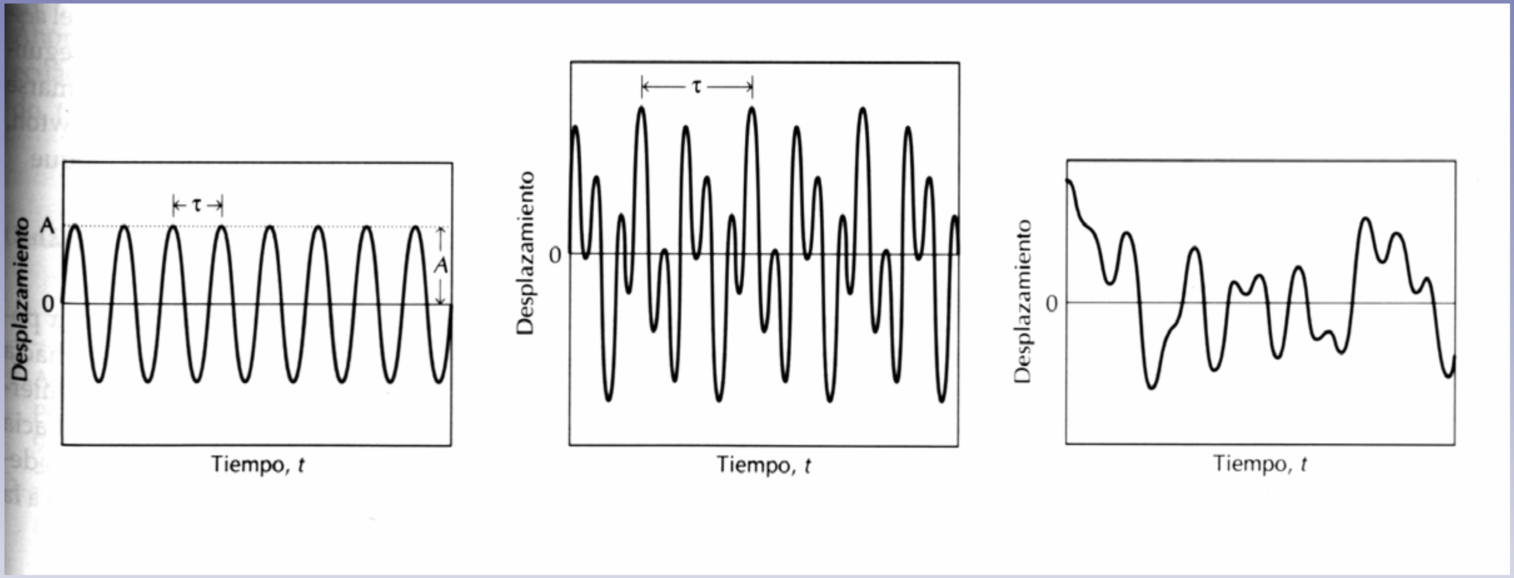
tres traslaciones elementales

tres rotaciones, seis coordenadas

- sistema con un grado de libertad ≠ sistema simple:

motor de automóvil: ángulo de giro del cigüeñal

OSCILACIONES PERIÓDICAS Y APERIÓDICAS O ALEATORIAS:



Oscilación periódica:

Periodo (T, τ): tiempo para que se repita el movimiento

Frecuencia (f, ν): número de oscilaciones por segundo

Amplitud (A): desplazamiento máximo

CLASIFICACIÓN DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS:

VIBRACIONES LIBRES: fuerzas gravitatorias o fuerzas elásticas

1) NO AMORTIGUADAS:

- fuerzas de rozamiento (resistencia del aire, viscosidad....) son despreciables
- se repiten indefinidamente

2) AMORTIGUADAS:

- fuerzas de rozamiento no despreciables
- tienden a desaparecer

VIBRACIONES FORZADAS:

- compensación de pérdida de energía de la oscilación amortiguada
- fuerzas externas

FENÓMENO DE LA RESONANCIA:

- **Edificación: oscilador con un conjunto de frecuencias naturales (rigidez, masa y detalles de la construcción)**

- **Oscilación forzada: fuerza debida a sacudidas del terreno en terremoto**

FRECUENCIA ONDAS SÍSMICAS ≈ FRECUENCIA NATURAL EDIFICIO

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

FUERZA RECUPERADORA:

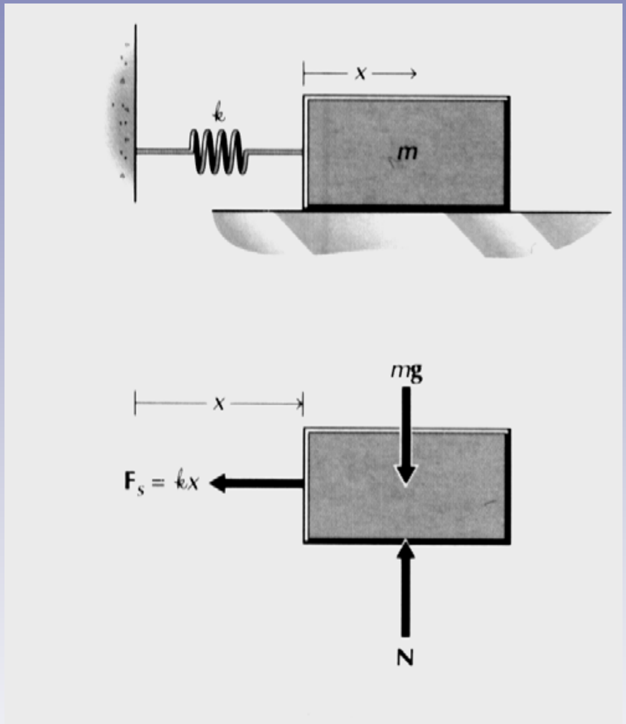
- **proporcional al desplazamiento: kx**

- **dirigida hacia posición de equilibrio**

- **movimiento periódico: MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE**

- **modelo de partida para vibraciones en aplicaciones técnicas**

MODELO MECÁNICO:



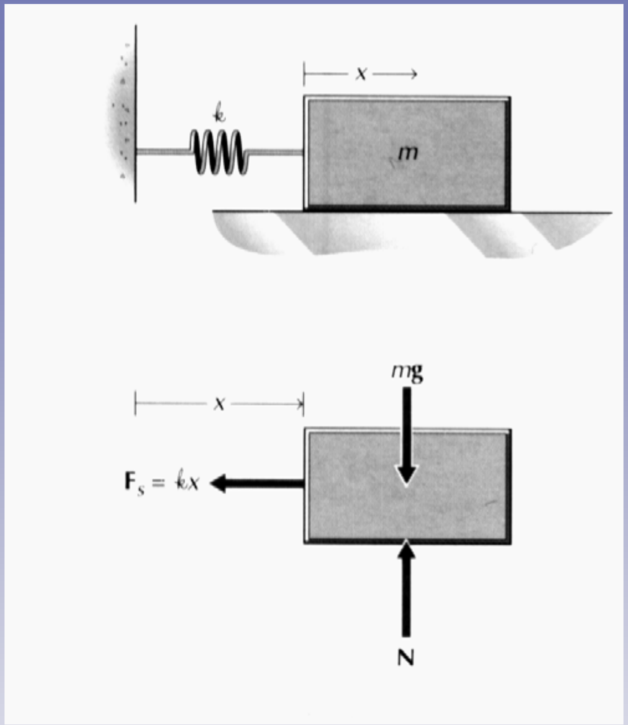
- **reposo: posición de equilibrio**

- **desplazamiento X_0: V_0**

$$\boxed{F = -kx}$$

$$F_X = ma_X = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

FRECUENCIA NATURAL DE OSCILACIÓN

Soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

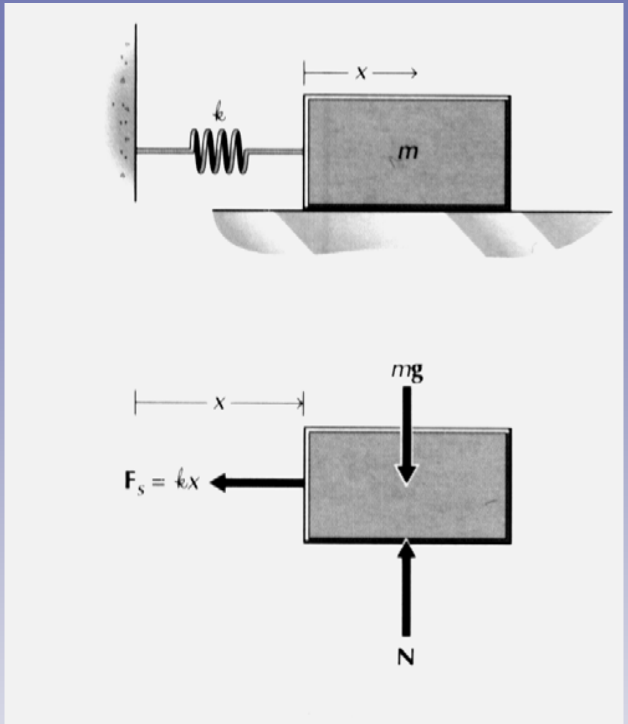
c

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

$$x(t) = A sen(\omega_0 t - \alpha)$$

A **: amplitud o desplazamiento máximo**

α **: ángulo o constante de fase**



$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega_0 t - \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega_0 t - \alpha) = -\omega^2 x$$

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

ENERGÍA POTENCIAL:

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \alpha)$$

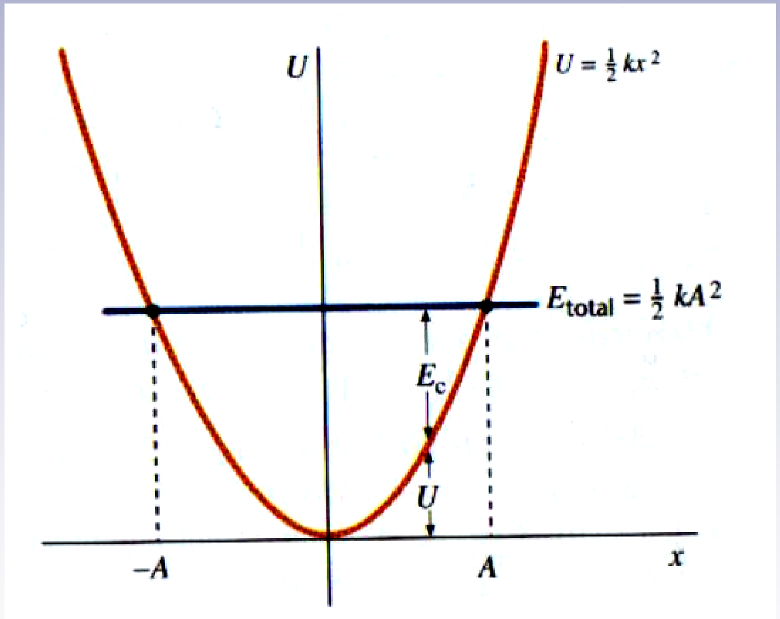
ENERGÍA CINÉTICA:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 sen^2(\omega_0 t - \alpha)$$

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE:

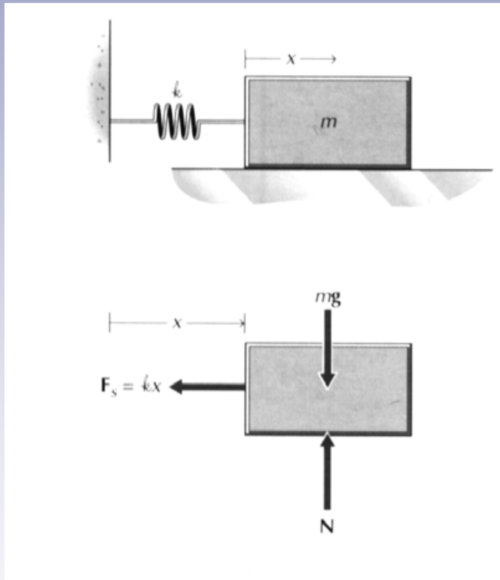
$$E = E_P + E_C = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \alpha) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 sen^2(\omega_0 t - \alpha) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Energía cinética y potencial en función del tiempo:



MÉTODOS ENERGÉTICOS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

$$E_T = E_C + E_P = cte \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = \frac{d(E_C + E_P)}{dt} = 0$$



EJEMPLO:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right] = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$(kx + m\ddot{x})\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

1.3. Vibraciones libres amortiguadas

- VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS: idealización

pérdidas de energía por rozamiento pequeñas

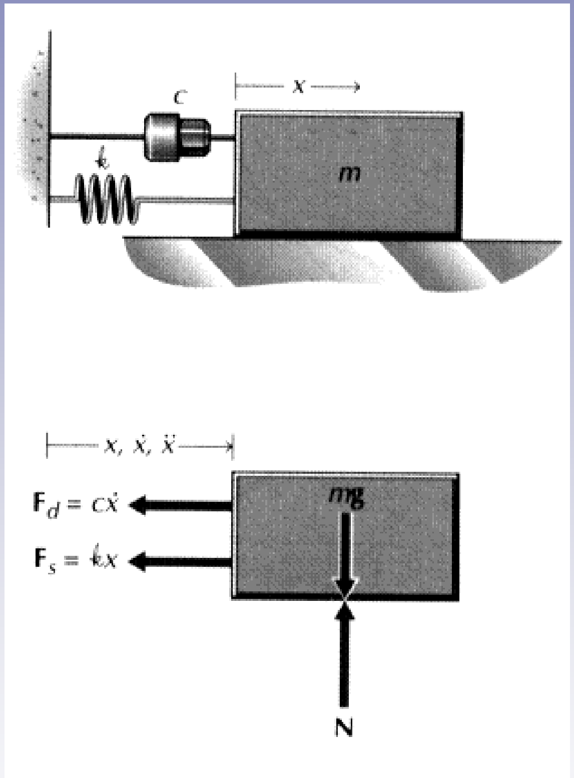
intervalos de tiempo cortos

- FUERZAS RESISTIVAS: proporcional a la velocidad y en sentido opuesto

$$F_r = -\lambda v$$

Oscilación en un fluido: aire, agua....

Modelo mecánico:



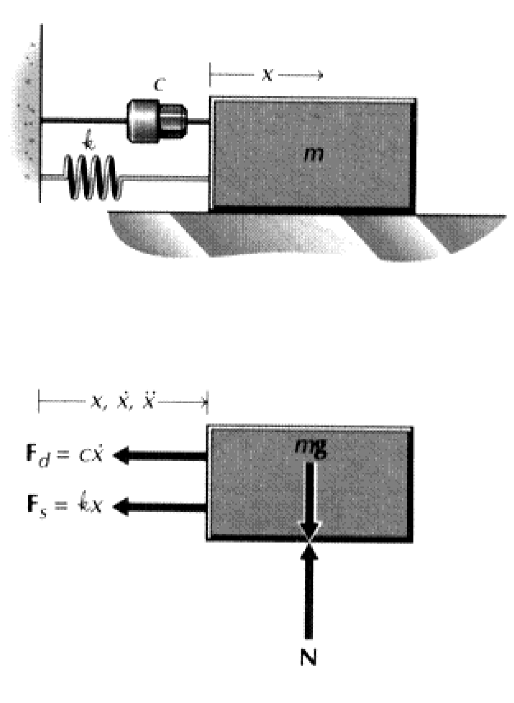
$$F_X = ma_X = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - \lambda v = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

Teoría ecuaciones diferenciales:

$$x(t)=De^{\lambda t}$$

D, λ: ecuación diferencial y condiciones iniciales

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0$$

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=-\gamma\pm i\omega$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\lambda^2}{4m^2}}$$

$$x(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t})}$$

D_1, D_2: condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i sen\,\omega t$$

Tres tipos de comportamiento según : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

1) SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS:

$$\omega_0 \succ \gamma \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \succ 0$$

La solución física debe ser siempre real:

$$D_1 = Ae^{-i\alpha} \qquad D_2 = Ae^{i\alpha}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t}(Ae^{-i\alpha}e^{i\omega t} + Ae^{i\alpha}e^{-i\omega t})$$

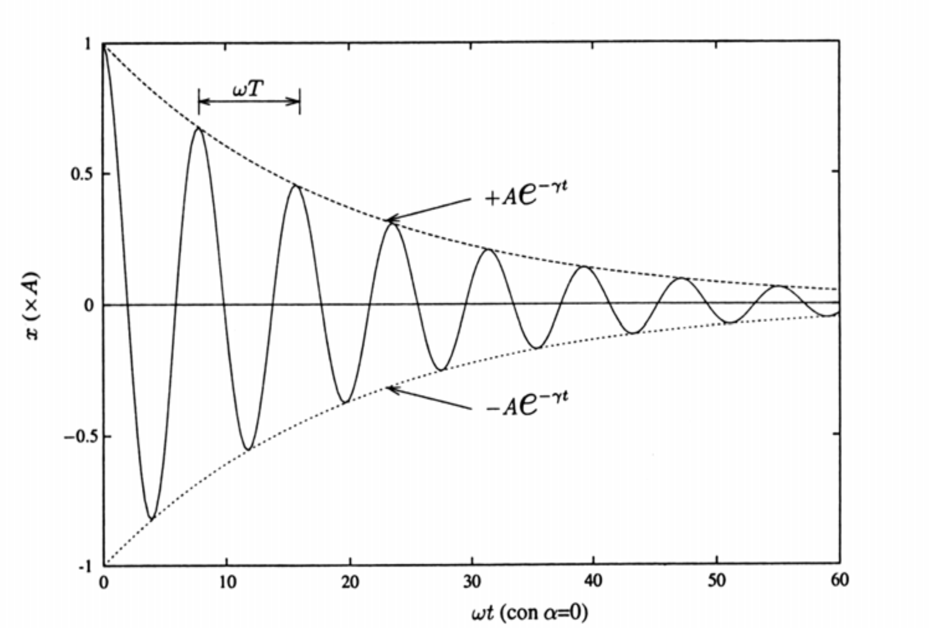
$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha)$$

1) SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS:

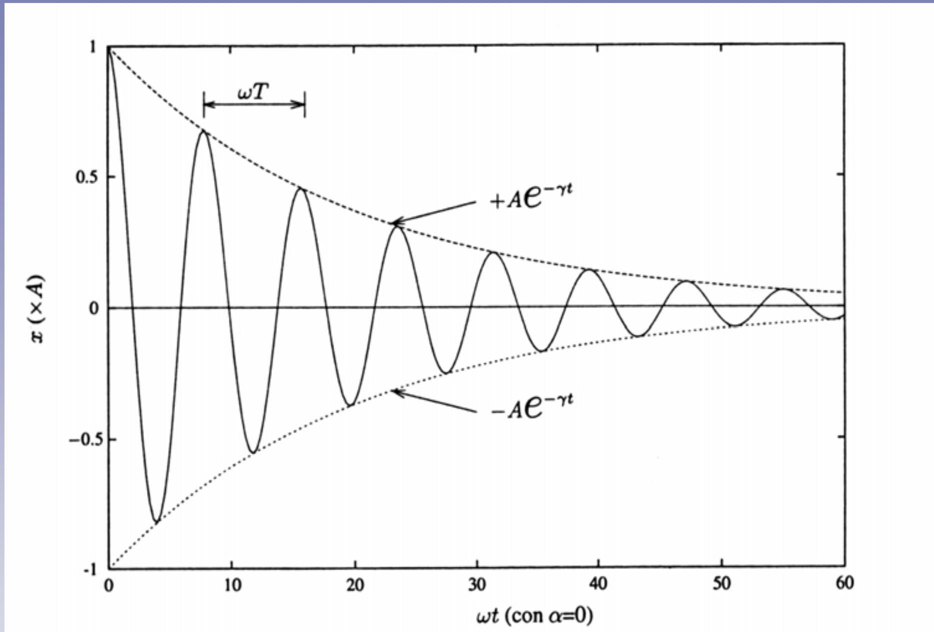
$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha)$$

AMPLITUD: $Ae^{-\gamma t}$

FRECUENCIA: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



1) SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS:



No tiene periodo en el sentido definido para las vibraciones libres:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Magnitudes constantes, aunque no lo es la amplitud

2) SISTEMAS CRÍTICAMENTE AMORTIGUADOS:

$$\omega_0 = \gamma \qquad \omega = 0$$

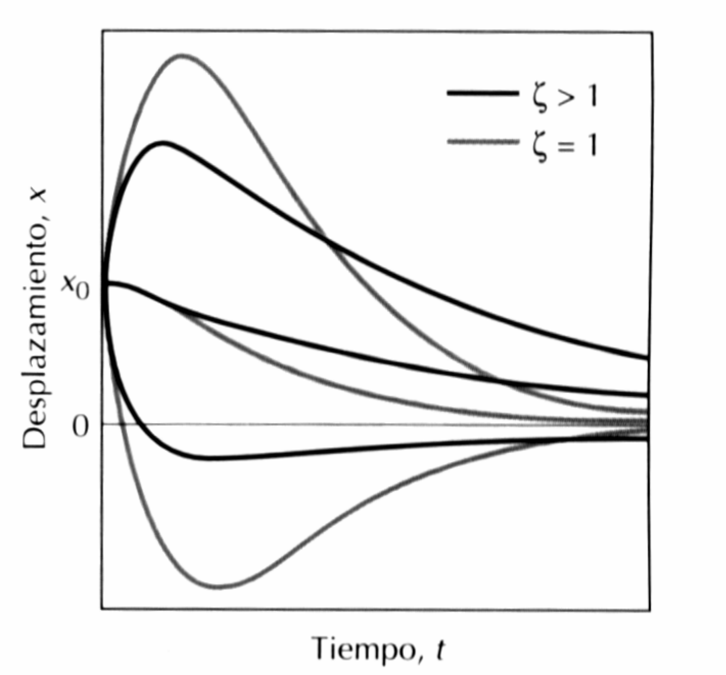
El sistema no oscila:

$$x(t) = (B + Ct)e^{-\gamma t}$$

B,C: condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

- amortiguamiento crítico: menor amortiguamiento para no oscilación
- vuelta a la posición de equilibrio siguiendo curva exponencial
- no se puede redefinir periodo y frecuencia

2) SISTEMAS CRÍTICAMENTE AMORTIGUADOS:



$$\xi = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

Ejemplo en el que este amortiguamiento es interesante:

amortiguadores de los coches

3) SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS:

$$\omega_0 \prec \gamma \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \prec 0$$

Medio altamente viscoso:

$$s = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

$$x(t) = (Ae^{-st} + Be^{st})e^{-\gamma t}$$

A, B: condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad

- vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar

- no es posible redefinir periodo y frecuencia

Ejemplos de movimiento subamortiguado, sobreamortiguado y críticamente amortiguado: