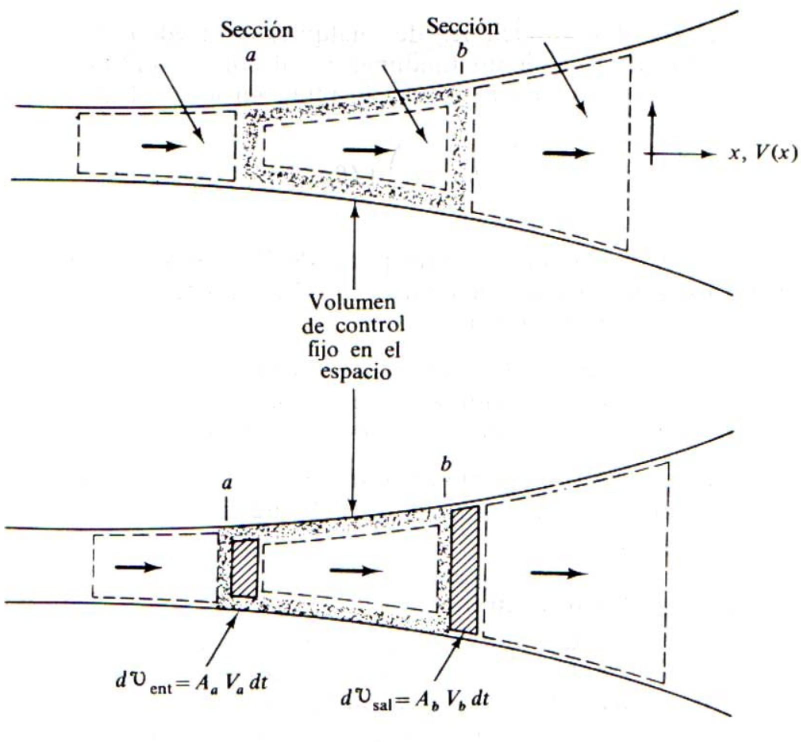
B) AMPLIACIÓN DE MECÁNICA DE FLUIDOS

2. DINÁMICA DE FLUIDOS PERFECTOS

Como se ha dicho en la introducción, la viscosidad refleja la resistencia al movimiento del fluido y tiene un papel análogo al del rozamiento en el movimiento de los sólidos. La viscosidad está siempre presente en mayor o menor medida pero no siempre es necesario tenerla en cuenta. En el caso de los fluidos perfectos o no viscosos de los que nos ocupamos en este apartado su efecto es muy pequeño y no se tiene en cuenta.

El propósito de este apartado es aplicar las leyes básicas (ley conservación de la masa, segunda ley de newton o ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y la ley de conservación de la energía) para el análisis de los fluidos perfectos.

Los volúmenes de control pueden ser fijos, móviles o deformables. Al igual que se requiere dibujar cuidadosamente diagramas de cuerpo libre, debe ejercerse el mismo cuidado al dibujar volúmenes de control apropiados. Nosotros vamos a considerar volúmenes de control fijos (punto de vista euleriano). Consideremos un conducto o tubo de corriente como se muestra en la figura a través del que existe un **flujo unidimensional:**



Como volumen de control seleccionamos una porción del conducto. Sea *B* una propiedad cualquier del flujo (energía, cantidad de movimiento, masa...) y sea $\frac{dB}{dm}$ la cantidad de *B* por unidad de masa de una pequeña porción de fluido. La cantidad total de *B* en el volumen de control es:

$$B_{VC} = \int_{VC} \frac{dB}{dm}(\rho dV)$$

donde ρdV representa la masa de un elemento diferencial de fluido. La variación temporal de B dentro del fluido o sistema que en el instante t ocupa el volumen de control viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \frac{dB}{dm}(\rho dV) - \frac{dB}{dm}\rho_{ent} A_{ent} V_{ent} + \frac{dB}{dm}\rho_{sal} A_{sal} V_{sal}$$

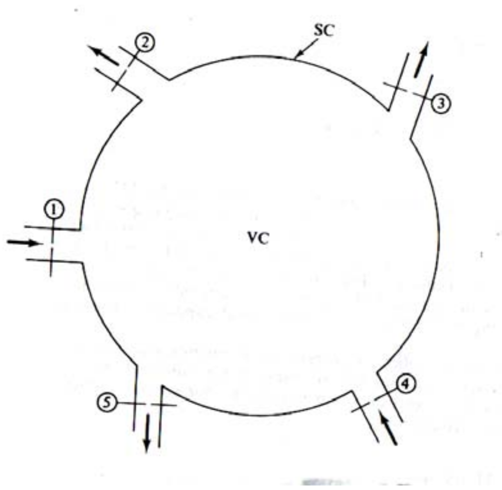
Los tres términos del segundo miembro son respectivamente:

Término 1: variación temporal de B dentro del volumen de control

Término 2: flujo de B hacia el interior a través de la superficie de control

Término 3: flujo de B hacia el exterior a través de la superficie de control

Si el volumen de control tiene más de una entrada y una salida como en el siguiente ejemplo los términos de flujo se convierten en sumatorios extendidos a todas ellas:



$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \frac{dB}{dm}(\rho dV) + \sum_i \left(\frac{dB}{dm}\rho_{sal} A_{sal} V_{sal}\right)_i - \sum_i \left(\frac{dB}{dm}\rho_{ent} A_{ent} V_{ent}\right)_i$$

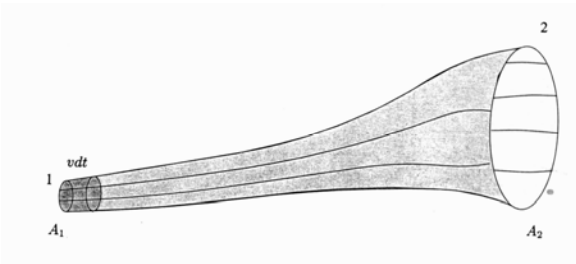
Si el flujo no es unidimensional o la superficie del volumen de control es arbitraria la expresión anterior se convierte en la siguiente que es más general:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\frac{dB}{dm}(\rho dV) + \int_{S}\frac{dB}{dm}\rho(\vec{V}\bullet d\vec{S})$$

La variable B tomará ahora sucesivamente valores de magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Esta ecuación recibe el nombre de teorema de transporte de Reynolds.

a) Conservación de la masa o ecuación de continuidad:

Normalmente vamos a trabajar con tuberías de manera que vamos a escoger volúmenes de control coincidentes con porciones de las tuberías y vamos a considerar flujos unidimensionales:



Si en la ecuación anterior hacemos $B = m$ y $\frac{dm}{dm} = 1$ obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}(\rho dV) - \rho_{ent}A_{ent}V_{ent} + \rho_{sal}A_{sal}V_{sal} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}(\rho dV) = -\rho_{sal}A_{sal}V_{sal} + \rho_{ent}A_{ent}V_{ent}$$

"La tasa neta de flujo de salida de masa a través de la superficie de control es igual a la tasa de disminución de masa dentro del volumen de control"

Donde los términos $\rho_{sal}A_{sal}V_{sal}$, $\rho_{ent}A_{ent}V$ expresan el flujo o caudal másico saliente y entrante. Se representan por la letra Q y se define como la masa que atraviesa una sección en la unidad de tiempo. En el caso más general el flujo o caudal másico se calcula mediante la expresión:

$$Q = \int(\rho\vec{v})\bullet d\vec{s}$$

Si el flujo es estacionario o permanente en el interior del volumen de control, la ecuación se reduce a:

$$0 = \rho_{sal}A_{sal}V_{sal} - \rho_{ent}A_{ent}V_{ent} \Rightarrow \rho_{sal}A_{sal}V_{sal} = \rho_{ent}A_{ent}V_{ent}$$

Si el fluido es incomprensible, que es equivalente a decir que las variaciones de densidad son despreciables la relación anterior se expresa como:

$$A_{sal}V_{sal} = A_{ent}V_{ent} \Rightarrow V_{sal} = \frac{A_{ent}}{A_{sal}}V_{ent}$$

Todos los líquidos son prácticamente incompresibles y los flujos de gases se comportan a veces como si lo fueran, particularmente si la velocidad es menor que alrededor del 30 por 100 de la del sonido. Por tanto, la expresión anterior es equivalente a escribir lo siguiente:

$$Q = \rho A v = cte \Rightarrow Av = cte$$

Esta expresión nos permite conocidas las áreas de las secciones de los conductos calcular la velocidad de un punto de un fluido incompresible en régimen estacionario y unidimensional conocida la velocidad en otro.

b) Ecuación de la cantidad de movimiento

En la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, la propiedad que se derivaba era la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{V}$, esto es, $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, de modo que si $\vec{F} = 0$ entonces $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$. Por tanto ahora la variable muda es $B = m\vec{V}$ y por tanto $\frac{dB}{dm} = \vec{V}$ y la aplicación del teorema de transporte de Reynolds proporciona la ecuación de movimiento para un volumen de control:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\frac{dB}{dm}(\rho dV) + \int_{S}\frac{dB}{dm}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S}) \Rightarrow \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}(\rho dV) + \int_{S}\vec{V}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

Debemos hacer especial énfasis en los dos siguientes puntos referentes a esta relación:

1) El término $\frac{d(m\vec{V})}{dt}$ es el vector suma de todas las fuerzas $\sum_i \vec{F}_i$ que actúan sobre el volumen de control , esto es, incluye las fuerzas de superficie ejercidas por todos los fluidos y sólidos cortados por la superficies de control, más todas las fuerzas de volumen (gravitatorias, electromagnéticas) que actúan sobre las masas contenidas en el volumen de control. Por tanto la ecuación del momento lineal puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\int_{VC}\vec{V}(\rho dV) + \int_{S}\vec{V}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

Si designamos por $\vec{f}_S$ las fuerzas superficiales expresadas como fuerzas por unidad de área de la superficie de frontera y por $\vec{f}_V$ las fuerzas de volumen expresadas como fuerzas por unidad de volumen, por ejemplo la gravedad es la fuerza de volumen más común y para la gravedad $\vec{f}_V = -g\vec{k}$, el sumatorio de fuerzas y la ecuación pueden rescribirse de la siguiente manera:

$$\sum_i \vec{F}_i = \int_S \vec{f}_S dS + \int_V \vec{f}_V dV$$

$$\int_S \vec{f}_S\, dS + \int_V \vec{f}_V\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}(\rho dV) + \int_S \vec{V}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

2) La ecuación completa es una relación vectorial, ambas integrales son vectores debido al término $\vec{V}$ de los integrandos. La ecuación, tiene pues las tres siguiente componentes:

$$\sum_i F_{X\,i} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_X\,(\rho dV) + \int_S V_X\,\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

$$\sum_i F_{Y\,i} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_Y\,(\rho dV) + \int_S V_Y\,\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

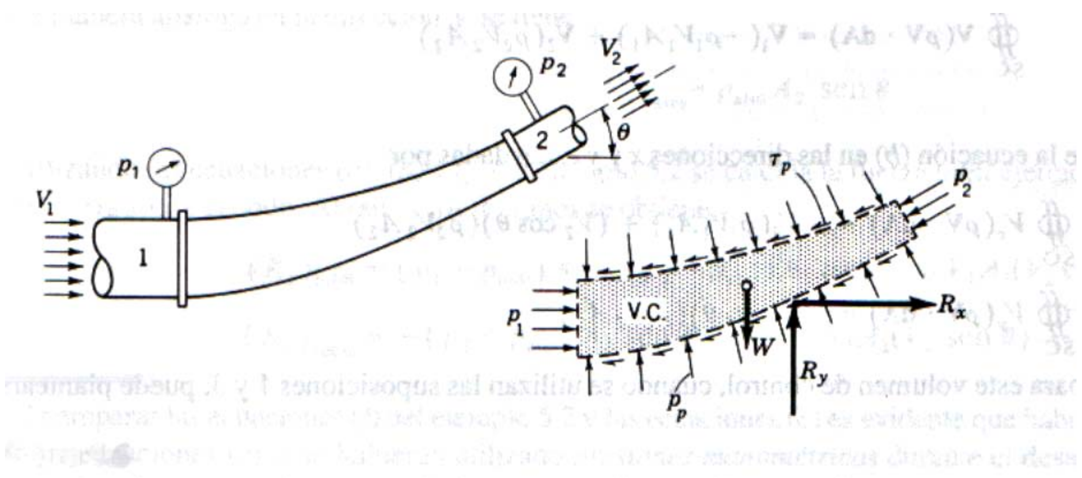
$$\sum_i F_{Z\,i} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} V_Z\,(\rho dV) + \int_S V_Z\,\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

El fallo de no tener en cuenta el carácter vectorial de la ecuación de la cantidad de movimiento es probablemente la fuente de errores más común en el análisis de volúmenes de control.

Ahora se examinará el empleo de estas ecuaciones en la resolución de problemas, normalmente para el cálculo de fuerzas ejercidas por el fluido sobre determinadas superficies. Debido a que la ecuación del momento lineal es primordialmente una relación entre fuerzas y velocidades debe escogerse un volumen de control que incluya las fuerzas y las velocidades que contribuyan a la solución del problema de una forma conveniente. Por lo general, para la solución de los problemas se considerará específicamente la reacción a la fuerza que se busca. Esto significa que si se desea la fuerza causada por el agua sobre una tubería o un aspa, al utilizar mecánica de fluidos en principio se obtendrá la fuerza causada por la tubería o el aspa sobre el agua. Es muy importante determinar en forma cuidadosa cada uno de los volúmenes de control y denotar claramente el volumen de control particular para el cual se escribe cada ecuación.

Ejemplo: Desea evaluarse la fuerza causada por el flujo interno permanente de un líquido sobre el codo reductor de la figura. Los valores medios de las características del flujo en la entrada y en la salida se conocen, así como la geometría del codo reductor.

Un volumen de control constituido por el interior del codo reductor permitirá relacionar las cantidades conocidas a la entrada y salida con la fuerza **R** causada por la pared del codo reductor sobre el fluido, la reacción a esta última fuerza es la cantidad deseada. El volumen de control se muestra en la siguiente figura en la que se han señalado todas las fuerzas que actúan sobre el fluido en el volumen de control en cualquier instante t:



Las fuerzas superficies incluyen los efectos de las presiones absolutas p_1 y p_2 a la entrada y a la salida del reductor, así como las distribuciones de esfuerzos normales y cortantes cuya fuerza resultante es **R** y es ejercida por la pared del codo sobre el fluido. La fuerza de volumen es simplemente el peso del fluido en el volumen de control en el instante t y se indica en la figura como W.

Las siguientes son las suposiciones para el flujo en este volumen de control:

1) el flujo es permanente
2) el flujo es incompresible
3) el flujo es paralelo, unidimensional, entra en 1 y sale en 2

Primero, se plantea la ecuación del momento lineal en su forma general:

$$\int_S \vec{f}_S \, dS + \int_V \vec{f}_V \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}(\rho dV) + \int_S \vec{V}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

Luego se simplifica esta ecuación incorporando las simplificaciones hechas. Por ejemplo, debido a la suposiciones 1 y 2 tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V}(\rho dV) \Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV = 0$$

Ahora se examinan las otras expresiones utilizando las componentes horizontal y vertical de la ecuación en forma separada. Se ignora la variación hidrostática de la presión a la entrada y a la salida de la superficie de control de acuerdo con la suposición 3. Las componentes x e y de las fuerzas resultantes sobre el fluido pueden expresarse como:

$$\int_S f_{X\,S} \, dS + \int_V f_{X\,V} \, dV = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\varphi - R_X$$

$$\int_S f_{Y\,S} \, dS + \int_V f_{Y\,V} \, dV = -p_2 A_2 sen\varphi - W + R_Y$$

donde R_X y R_Y son las componentes de la fuerza neta que la pared del reductor ejerce sobre el fluido y se han escogido como positivos.

Se examina ahora la integral del segundo miembro de la ecuación del momento lineal. La segunda de las integrales, de superficie sólo tiene que efectuarse en las superficies de entrada y de salida en el volumen de control debido a que el término $\vec{V} \bullet d\vec{S}$ es cero en las paredes por ser $\vec{V}$ y $d\vec{S}$ vectores perpendiculares. Las componentes normales de la velocidad en la superficie de entrada y la de salida son iguales a V_1 y V_2 respectivamente. Las componentes escalares de la ecuación resultante son:

$$\int_S \vec{V}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S}) \Rightarrow \int_S V_X\,(\rho\vec{V} \bullet d\vec{S}), \int_S V_Y\,(\rho\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

$$\int_S V_X\,(\rho\vec{V} \bullet d\vec{S}) = -V_1\,(\rho_1 V_1 A_1) + (V_2\,\cos\varphi)(\rho_2 V_2 A_2)$$

$$\int_S V_Y\,(\rho\vec{V} \bullet d\vec{S}) = (V_2 sen\varphi)(\rho_2 V_2 A_2)$$

La ecuación de continuidad para este volumen de control, cuando se utilizan las suposiciones 1 y 3 puede plantearse de la siguiente manera:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación del momento lineal en las direcciones *x* e *y* se obtiene:

$$p_1 A_1 - p_2 A_2\,\cos\varphi - R_X = -V_1\,(\rho_1 V_1 A_1) + (V_2\,\cos\varphi)(\rho_2 V_2 A_2) = (V_2\,\cos\varphi - V_1)\rho_1 V_1 A_1$$

$$-p_2 A_2 sen\varphi - W + R_Y = (V_2 sen\varphi)\rho_2 V_2 A_2 = (V_2 sen\varphi)\rho_1 V_1 A_1$$

Pueden despejarse R_X y R_Y, al cambiar el signo de estos resultados se encontrarán las componentes de la fuerza causada por el fluido sobre el codo:

$$K_X = -p_1 A_1 + p_2 A_2\,\cos\varphi + (V_2\,\cos\varphi - V_1)\rho_1 V_1 A_1$$

$$K_Y = -p_2 A_2 sen\varphi - W - (V_2 sen\varphi)\rho_1 V_1 A_1$$

c) Ecuación de Bernoulli o de conservación de la energía:

En este caso para deducir el enfoque del volumen de control, E se considera la propiedad extensiva que debe utilizarse en la ecuación de transporte de Reynolds, esto es, $B = E$ y $\frac{dB}{dm} = \frac{dE}{dm} = e$, luego e representará la energía almacenada por unidad de masa. Al utilizar la ecuación de transporte de Reynolds resulta:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \frac{dB}{dm}(\rho dV) + \int_{S} \frac{dB}{dm}\rho(\vec{V} \bullet d\vec{S}) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e(\rho dV) + \int_{S} e(\rho\vec{V} \bullet d\vec{S})$$

La ecuación establece que la tasa de energía transferida al fluido contenido en el volumen de control es igual a la tasa de salida de energía almacenada desde el volumen de control más la tasa de incremento de energía almacenada dentro del mismo.

Vamos a analizar un poco más detenidamente estos términos:

La primera ley de la termodinámica es un planteamiento basado en la experiencia macroscópica que establece que la energía se conserva en todo momento. Por consiguiente, la primera ley tiene en cuenta la energía que entra, sale o que se acumula en un sistema o volumen de control. En este sentido es conveniente clasificar la energía en dos categorías principales, **energía almacenada y energía de transición.** La energía asociada primordialmente con una masa dada se considerará como energía almacenada. Por otra parte, la energía que se mueve de un sistema hacia otro se denomina energía de transición. Pueden enumerarse los siguientes tipos de energía almacenada en un elemento de masa:

1) **Energía cinética:** energía asociada con el movimiento de la masa.
2) **Energía potencial:** energía asociada con la posición de la masa en campos externos conservativos.
3) **Energía interna:** asociada a la energía molecular y energía atómica.

Se enumeran dos tipos de energía de transición: calor y trabajo. El calor es a energía en transición desde una masa hacia otra como resultado de una diferencia de temperatura. Por otro lado, el trabajo, es la energía en transición cuando fuerzas externas que actúan sobre el sistema lo mueven a lo largo de una distancia. De acuerdo con este análisis el término de variación de la energía E del sistema de acuerdo con el primer principio de la termodinámica puede expresarse como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

y dado que Q y W no son funciones puntuales sino funciones explícitas del tiempo puede emplearse la notación usual para las derivadas temporales.

Por otro lado, el término e puede expresarse como suma de las siguientes energías almacenadas por unidad de masa:

1) Energía cinética e_C por unidad de masa: $dm\frac{V^2}{2} \Rightarrow \frac{V^2}{2}$
2) Energía potencial e_P por unidad de masa: suponiendo que el único campo externo es el gravitatorio, al considerar g como una constante, la energía potencial por unidad de masa será la cantidad gz .
3) Energía interna u por unidad de masa

Sustituyendo estos resultados en la ecuación inicial resulta la siguiente expresión:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\frac{V^2}{2} + gz + u)(\rho dV) + \int_{S} (\frac{V^2}{2} + gz + u)(\rho \vec{V} \bullet d\vec{S})$$

En la mayoría de las situaciones el trabajo es debido a lo que se conoce como trabajo de flujo, esto es, trabajo neto hecho sobre los alrededores como resultado de las fuerzas ejercidas en aquella parte de la superficie de control a través de la cual existe un flujo de fluido. La tasa temporal de trabajo que sale del volumen de control, la tasa total de trabajo de flujo esta dada por:

$$Q = \int \left(\rho \vec{V}\right) \bullet d\vec{S} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = \int_{SC} (\frac{F}{S}\vec{V}) \bullet d\vec{S} = \int_{SC} (P\vec{V}) \bullet d\vec{S}$$

donde $\frac{F}{S} = P$, la fuerza por unidad de superficie que realiza el flujo es igual a la presión que el resto del fluido ejerce sobre las paredes del volumen de control. Además, considerado que el producto del volumen específico $v = \frac{V}{M}$ y la densidad ρ es la unidad puede introducirse el producto ρv en la integral que quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{dW_F}{dt} = \int_{SC} Pv(\rho \vec{V}) \bullet d\vec{S}$$

En la ecuación inicial vamos a escribir el trabajo como $W = W_F + W_{otros}$ donde el segundo término se refiere por ejemplo a trabajo hechos por distribuciones de fuerzas magnéticas o eléctricas, al trabajo transferido al sistema a través de la superficie de control mediante ejes (turbinas, bombas...) o corrientes eléctricas....

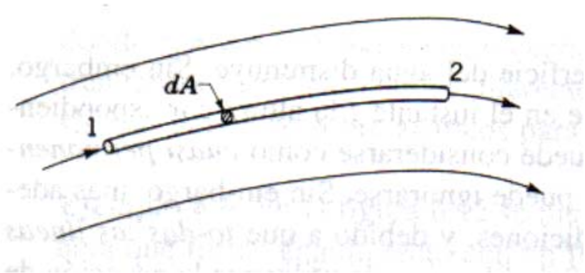
$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{otros}}{dt} - \int_{SC} Pv(\rho \vec{V}) \bullet d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\frac{V^2}{2} + gz + u)(\rho dV) + \int_{S} (\frac{V^2}{2} + gz + u)(\rho \vec{V} \bullet d\vec{S})$$

Reordenando los términos:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{otros}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} (\frac{V^2}{2} + gz + u)(\rho dV) + \int_{S} (\frac{V^2}{2} + gz + u + Pv)(\rho \vec{V} \bullet d\vec{S})$$

que sería la primera ley de la termodinámica.

Si ahora consideramos como volumen de control una porción de tubo de corriente dentro de un flujo permanente e incompresible como se muestra en la figura:



En este caso no existe trabajo diferente del trabajo del flujo, al no existir fricción no hay transferencia de calor, ni cambio de energía interna, la ecuación se convierte en:

$$\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho}\right)\rho V_2 A_2 = \left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho}\right)\rho V_1 A_1$$

en la que teniendo en cuenta que según la ecuación de continuidad $\rho V_2 A_2 = \rho V_1 A_1$ resulta:

$$\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho} = \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho} \Rightarrow \frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = cte$$

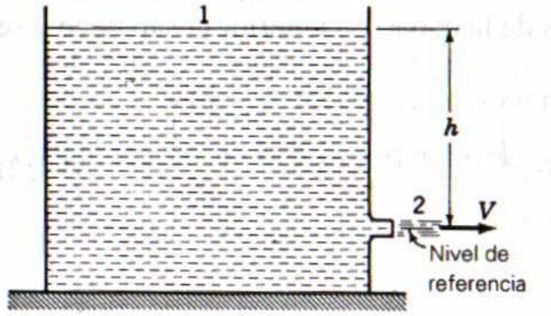
Esta ecuación se conoce como ecuación de Bernoulli. Al disminuir la sección transversal del tubo de corriente sin límites, Bernoulli establece que a lo largo de la línea de corriente la energía mecánica por unidad de masa se conserva. La constante puede tener un valor diferente para cada línea de corriente. Sin embargo, en muchos problemas puede deducirse que en algunas partes del flujo las líneas de corriente tienen la misma energía mecánica por unidad de masa, de manera que la energía mecánica por unidad de masa es constante en cualquier parte del flujo. La ecuación de Bernoulli en forma diferente al dividir las ecuaciones por *g* y reemplazar $\frac{v}{g}$ por $\frac{1}{\gamma}$:

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{P}{\gamma} = cte$$

Escrita la ecuación de esta manera, las dimensiones de cada expresión son de longitud, de acuerdo con esto los términos se conocer como alturas, por tanto puede decirse que la suma de la altura de velocidad, la altura de presión y la altura de posición es constante a lo largo de una línea de corriente.

Algunas aplicaciones del teorema de Bernoulli:

1. Teorema de Torricelli: si a una masa líquida en contacto con la atmósfera la aplicamos la ecuación de Bernouilli entre su superficie libre (punto 1) de área S , y la salida por un orificio libre (punto 2) de sección S_0 , tomando como plano de referencia el que pasa por el centro de dicho orificio se tiene:



$$gz + \frac{P_1}{\rho} + 0 = 0 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow \frac{V^2}{2} = gz \Rightarrow V = \sqrt{2gz}$$

puesto que $P_1 = P_2 = Patm$. Obtenemos la velocidad de salida de un líquido por un orificio, función de la profundidad a la que se encuentre el orificio. En este caso como $S \succ\succ S_0$ de $v_1 S = v_2 S_0$ se tiene que $v_1 \approx 0$. Obsérvese que la expresión obtenida es válida únicamente cuando el depósito está abierto a la atmósfera y no cuando el depósito está a presión o hay una capa de otro líquido encima de la del líquido que está desaguando.

2. Tiempo de vaciado de un depósito: la cantidad de fluido que sale por el orificio del depósito debe ser igual a la disminución de masa que experimenta el fluido en el interior del depósito, esto es, durante un intervalo de tiempo *dt*, la cantidad de fluido que sale por el orificio será $Qdt = \rho S_0 v dt$. Durante ese mismo intervalo de tiempo la altura del fluido en el depósito habrá disminuido en *dh* por lo que la disminución de masa en el interior del depósito será la masa de fluido contenida en un cilindro de altura *dh* y sección S, esto es $\rho S dh$. Igualando ambas expresiones con su signo correspondiente se tiene:

$$\rho v S_0 dt = -dm = -\rho S dh \Rightarrow \frac{S_0}{S} dt = -\frac{dh}{v} = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow \frac{S_0}{S} \int_0^t dt = -\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow t = -\frac{S}{S_0} \frac{2}{\sqrt{2g}} (h^{1/2} - h_0^{1/2})$$

El tiempo de vaciado total del depósito se calcula haciendo $h = 0$:

$$t = -\frac{S}{S_0} \frac{2}{\sqrt{2g}} (h^{1/2} - h_0^{1/2}) \Rightarrow t = \frac{S}{S_0} \frac{2}{\sqrt{2g}} h_0^{1/2} = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$