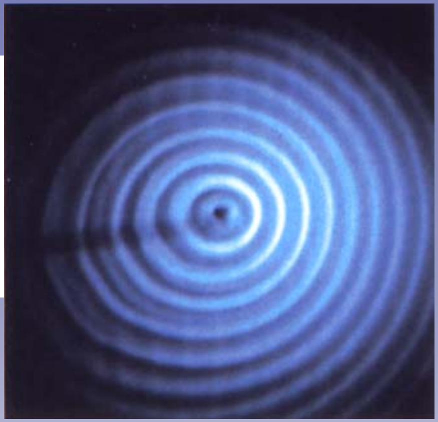
TEMA 2
Ondas mecánicas progresivas

2.1. Introducción



DEFINICIÓN DE ONDA:

- transferencia de una perturbación: energía y momento
- no hay transferencia de materia

- ONDAS MECÁNICAS: propagación a través de un medio (O. Sonoras)

- ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: no necesitan de un medio para propagarse

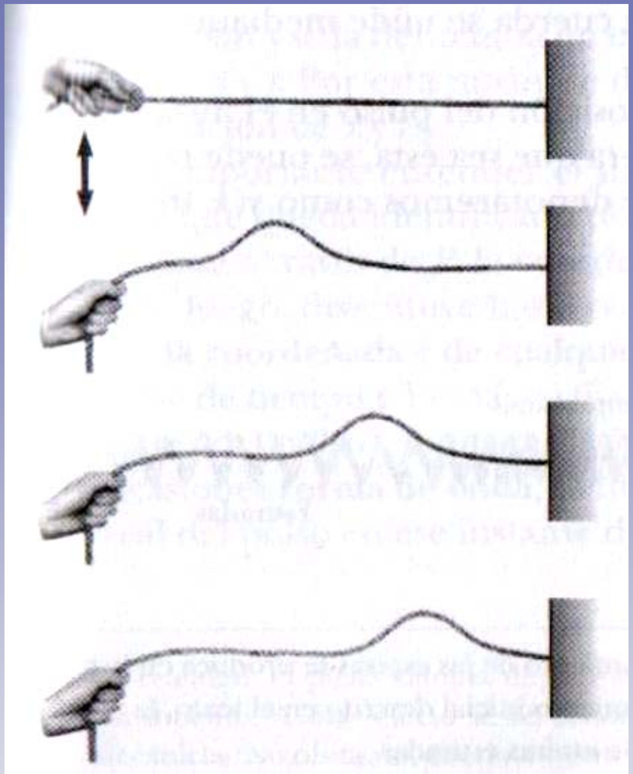
  - luz, ondas de radio, rayos X, microondas
  - viajan en el vacío a la velocidad de la luz
  - generación: electrones libres acelerados, transiciones de los electrones ligados

ONDAS MECÁNICAS:

1) fuente de perturbación

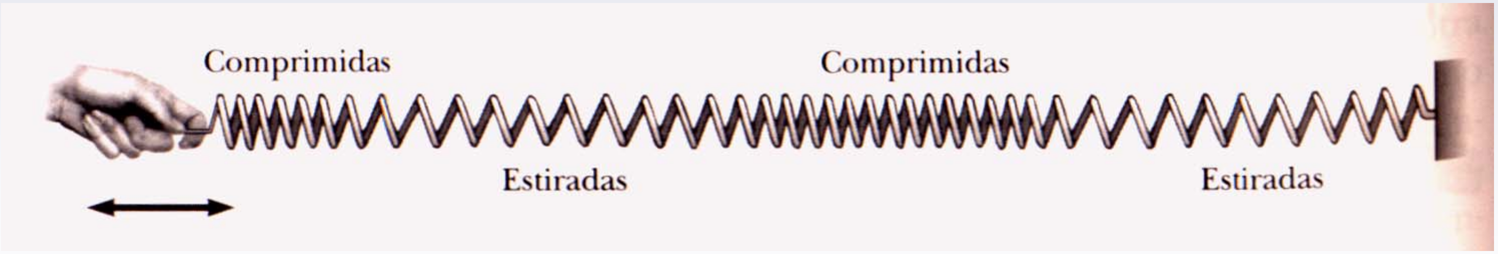
2) medio para ser perturbado

3) mecanismo físico



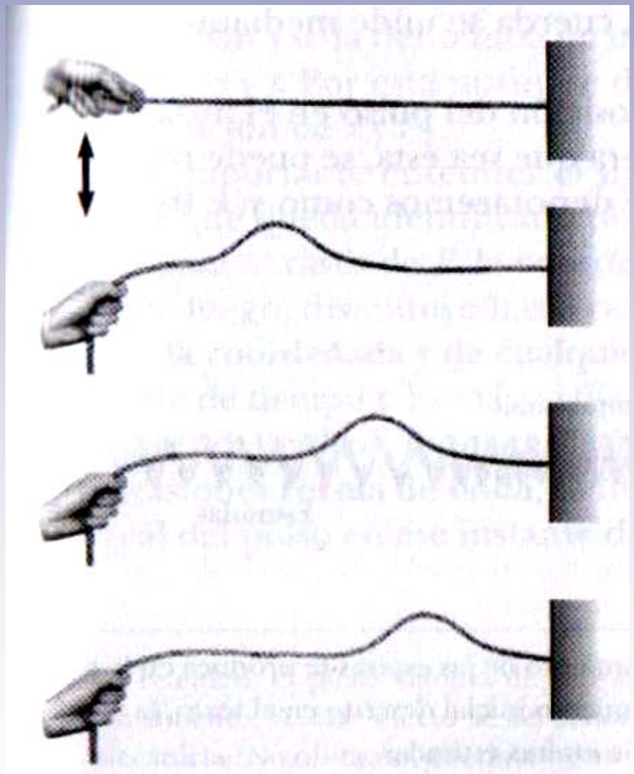
ONDAS TRANSVERSALES

ONDAS LONGITUDINALES: ONDAS SONORAS

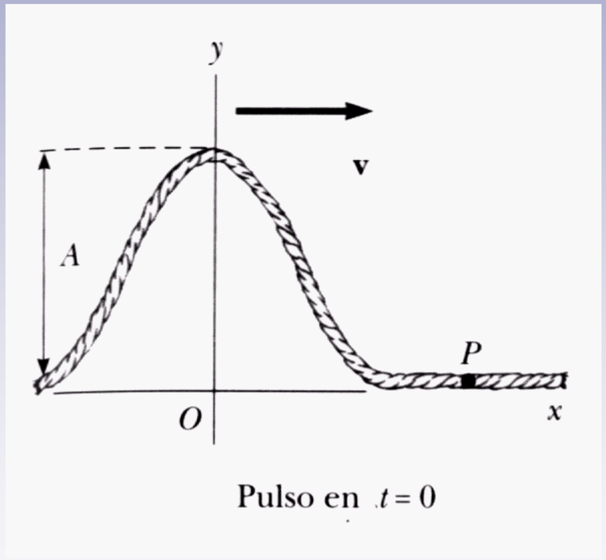


2.2. Descripción matemática de la propagación de una **onda plana**

ONDA PLANA: FRENTE DE ONDA PLANO

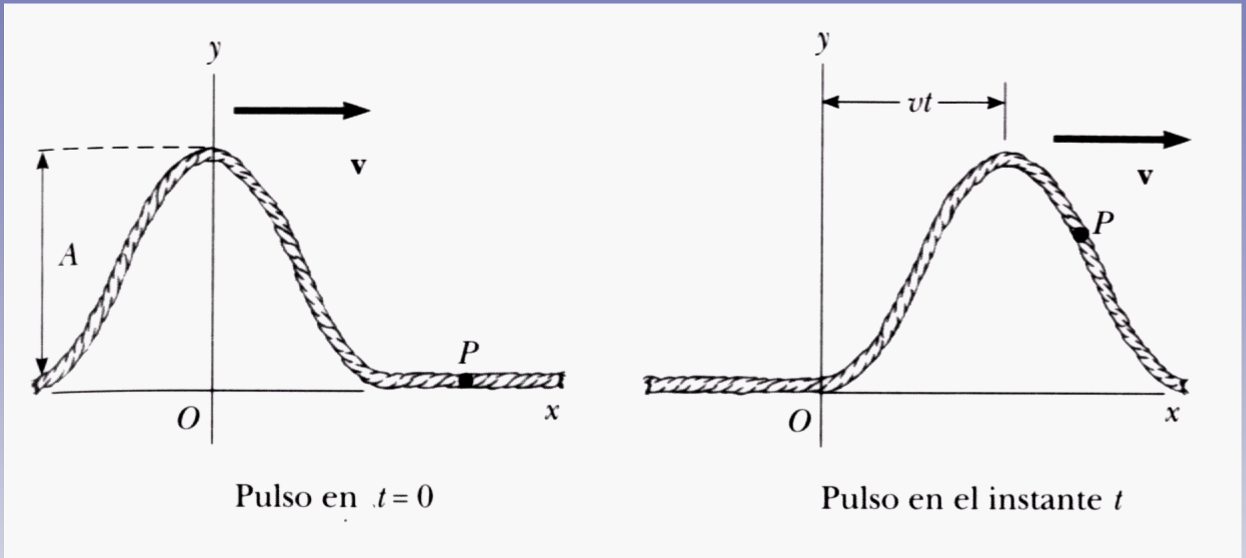


Representación matemática:



$$y(x,0) = f(x)$$

Transcurrido un tiempo t:



$$y(x,0) = f(x)$$

- Velocidad de propagación del pulso: c

- Se mantiene la forma del pulso: no existe dispersión

$$y(x,t) = y(x - ct, 0)$$

$$y(x,t) = f(x - ct)$$

Propagación en una dimensión:

Desplazamiento hacia la derecha: $y(x,t) = f(x-ct)$

Desplazamiento hacia la izquierda: $y(x,t) = f(x+ct)$

$y(x,t)$: **FUNCIÓN DE ONDA**

¿QUÉ INFORMACIÓN NOS PROPORCIONA?

- ONDAS PROGRESIVAS
- ONDAS ESTACIONARIAS

ECUACIÓN DE ONDAS:

$$y(x,t) = f(x \pm ct)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ecuación de ondas unidimensional o

ecuación de D´Alembert

Función que describe un problema verifica la ecuación de ondas:

EN UNA DIMENSIÓN:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

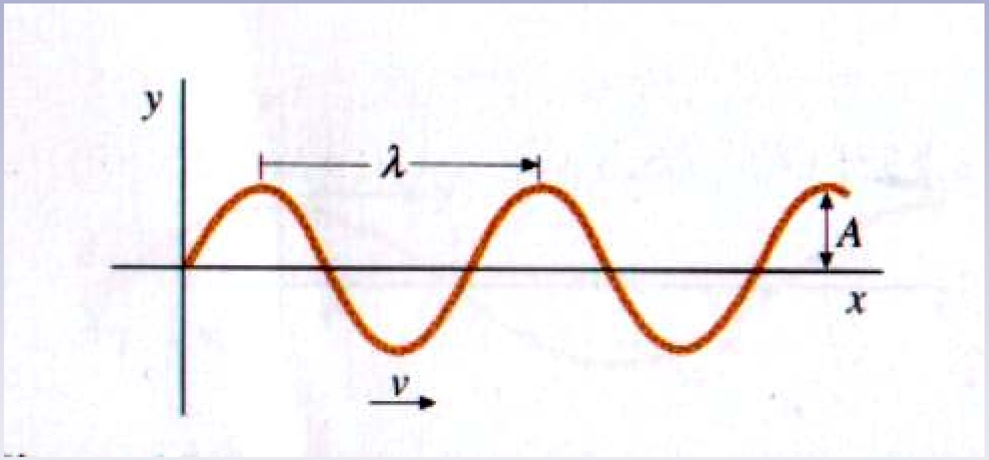
EN TRES DIMENSIONES (c. rectangulares):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

2.3. Ondas armónicas

Clase básica de ondas periódicas (seno o coseno) unidimensionales:

$$y(x,t) = Asen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ct) + \alpha\right]$$



A: amplitud

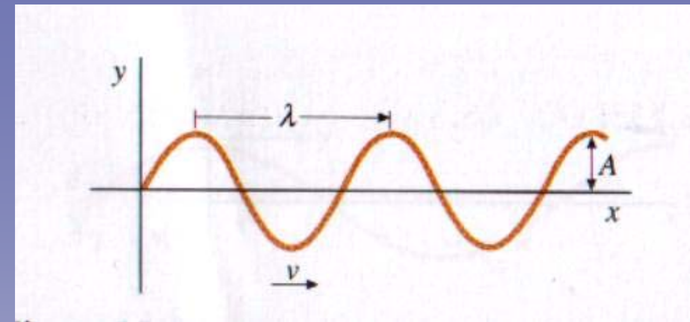
α: fase de la onda

λ: longitud de onda

Número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(x,t) = Asen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ct) + \alpha\right]$$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow c = \lambda \cdot f$$

$$\psi(x,t) = y(x,t) = Asen\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{ct}{\lambda}\right) + \alpha\right]$$

$$y(x,t) = Asen[kx - \omega t + \alpha]$$

ONDAS ARMÓNICAS: doble periodicidad

- ESPACIAL: $$y(x,t) = Asen[kx + a]$$

- TEMPORAL: $$y(x,t) = Asen[b - \omega t]$$

ONDAS ARMÓNICAS: $y(x,t) = Asen[kx - \omega t + \alpha]$

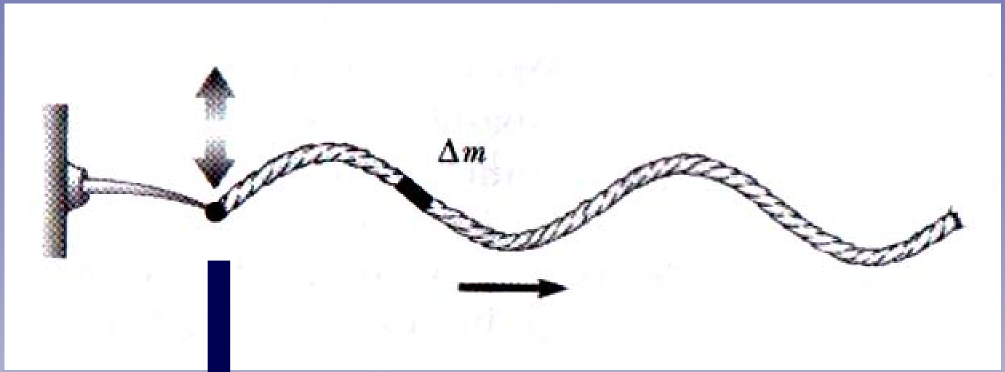
- Longitud infinita
- Monocromática
- Análisis de Fourier

Velocidad y aceleración de partícula del medio:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 Asen(kx - \omega t + \alpha)$$

2.4. Propagación de la energía



FUENTE DE ENERGÍA

$$y(x,t) = A sen\left[kx - \omega t + \alpha\right]$$

Elemento (dx, dm): movimiento armónico simple

$$dE_C = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$$

$$dm = \mu dx$$

$$dE_C = \frac{1}{2}(udx)v_y^2$$

$$v_y = -\omega A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$dE_C = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t + \alpha)dx$$

$$dE_C = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t + \alpha)dx$$

Para t = 0:

$$dE_C = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \cos^2(kx + \alpha)dx$$

Energía para longitud igual a una longitud de onda:

$$E_C = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \int_0^{\lambda} \cos^2(kx + \alpha)dx = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4k} sen(kx + \alpha) \right]_0^{\lambda}$$

Energía cinética: $E_C = \frac{1}{4} u\omega^2 A^2 \lambda$

Energía potencial: $E_P = \frac{1}{4} u\omega^2 A^2 \lambda$

Energía total:

$$E_{\lambda} = \frac{1}{2} u \omega^2 A^2 \lambda$$

Energía por unidad de longitud:

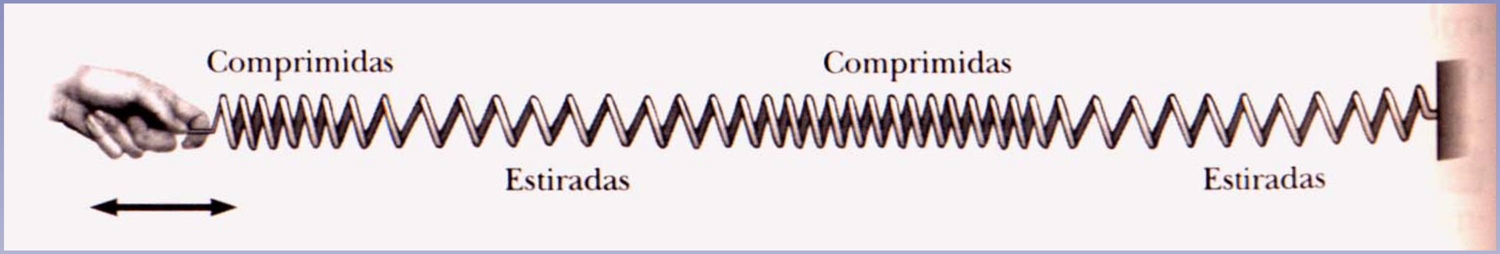
$$\frac{E_{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{2} u \omega^2 A^2$$

Ritmo de transferencia de energía:

$$P = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2} u \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} u \omega^2 A^2 c$$

2.5. Propagación de ondas mecánicas en fluidos

Ondas longitudinales: ondas sonoras



ONDAS SONORAS EN EL AIRE:

- movimiento de pequeños elementos de fluido

- Impresionan el sentido del oído: 20 Hz – 20 KHz

- Ruido: sonido no deseado o desagradable

- Acústica: producción, transmisión y recepción del sonido

Velocidad del sonido en los fluidos:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

ECUACIÓN DE ESTADO DE LOS GASES IDEALES:

Bajas presiones y altas temperaturas

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho_0 = \frac{Mp}{RT}$$

Velocidad del sonido en los fluidos:

Zonas comprimidas y zonas expandidas: CAMBIOS DE TEMPERATURA

APROXIMACIÓN: PROCESO REVERSIBLE ADIABÁTICO:

Oscilaciones rápidas, aire mal conductor del calor

$$pV^{\gamma} = cte \Rightarrow p = cteV^{-\gamma} \Rightarrow B = -V\frac{\partial p}{\partial V} = -V(-\gamma cteV^{-\gamma-1}) = p\gamma$$

Velocidad del sonido en los fluidos:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

$$\rho_0 = \frac{Mp}{RT}$$

$$B = p\gamma$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = cte\sqrt{T}}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$M = 29 kg / mol$$

$$c = 20.05\sqrt{T}\, m / s$$

- valores experimentales
- sonido: pequeña atenuación en grandes distancias
- bajas presiones y/o altas temperaturas

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos gases

Gas	c (ms^{-1})	ρ (kg/m^{-3})	$\rho_0 c$ (kg m^{-2} s^{-1})	γ
Hidrógeno (H_2)	1270	0,090	114	1,41
Nitrógeno (N_2)	337	1,25	421	1,40
Aire	331	1,29	428	1,40
Oxígeno (O_2)	317	1,43	453	1,40
Anhídrido carbónico (CO_2)	258	1,96	508	1,30

Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos líquidos

Líquido	c (ms^{-1})	ρ (kg/m^{-3})	$\rho_0 c$ 10^6(kg m^{-2} s^{-1})
Agua (4°C)	1418	1000	1,42
Agua (25°C)	1493	997,1	1,49
Mercurio	1450	13600	19,70
Etanol	1210	790	0,96
Metanol	1130	790	0,89

Relaciones empíricas para los líquidos

a) Ondas planas longitudinales:

COLUMNA DE GAS: PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

$$\boxed{P = P_0 + p}$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$$

$$p = -B \frac{\partial u}{\partial x}$$

a) Ondas planas longitudinales:

ONDA DE DESPLAZAMIENTO: ONDAS ARMÓNICAS:

$$u(x,t) = u_0 sen(kx - \omega t)$$

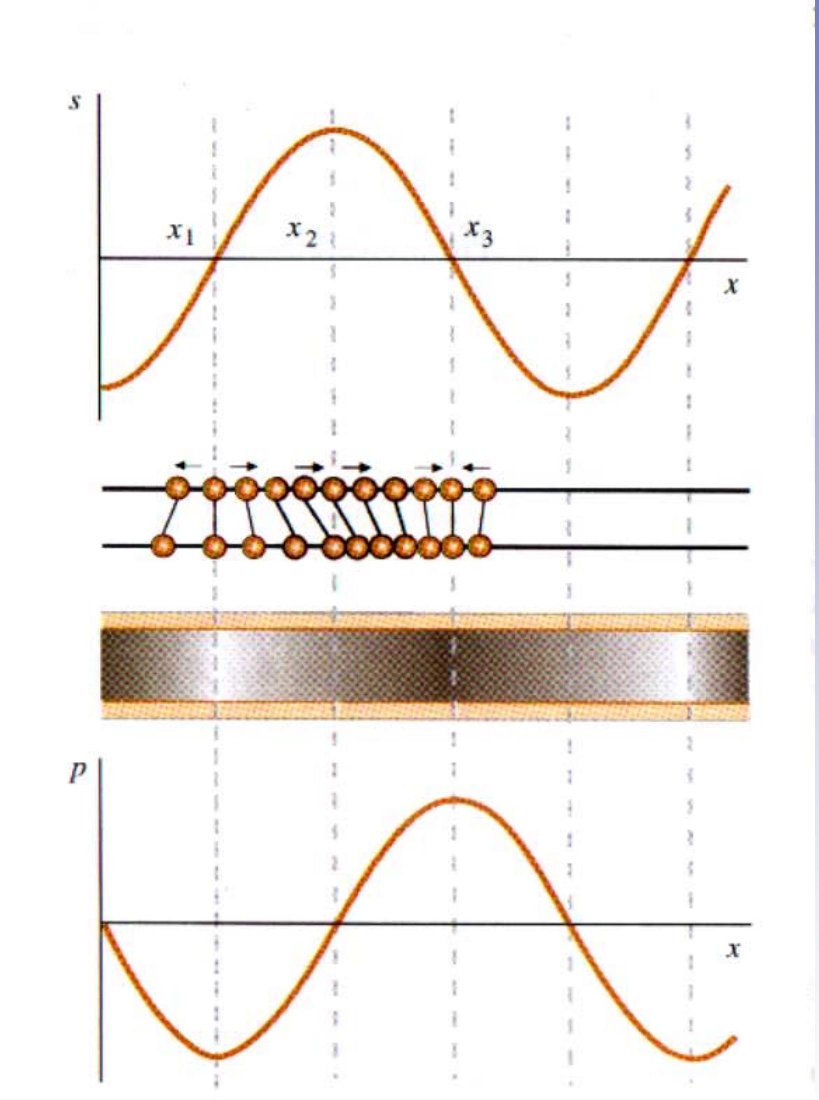
ONDA DE PRESIÓN:

$$p(x,t) = -B\frac{\partial u}{\partial x} = -Bku_0 \cos(kx - \omega t) = p_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$p_0 = Bku_0 = \rho_0 c^2 k u_0$$

$$B = \rho_0 c^2$$

Onda de presión y desplazamientos: desfasadas 90º



$$u(x,t) = u_0 sen(kx - \omega t)$$

$$p(x,t) = p_0 \cos(kx - \omega t)$$

Energía que transporta la onda sonora:

$$E_\lambda = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \lambda \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_0^2 V}$$

Densidad de energía media:

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_0^2$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \rho_0 c \omega u_0 \\ \\ p_{ef} = \dfrac{p_0}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad \varepsilon = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c^2} = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 c^2}$$

Intensidad acústica: energía por unidad de área y tiempo

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 u_0^2$$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon V}{TA} = \frac{\varepsilon T c A}{TA} = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 c}}$$

Dispersión: la intensidad disminuye durante la propagación:

$$I(x) = I(x_0)e^{-2\alpha(x-x_0)}$$

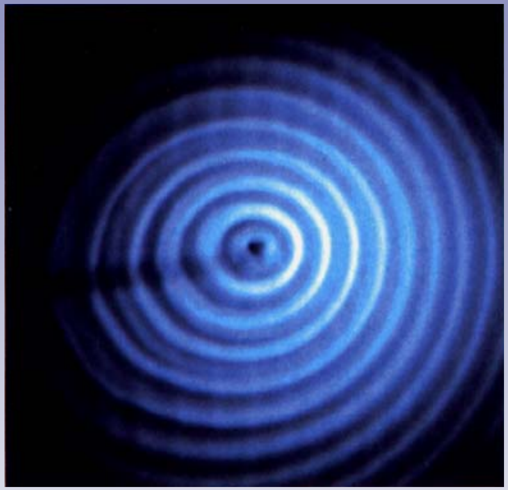
α: constante de atenuación del medio

$I(x_0)$: intensidad en un punto de referencia x_0

b) Ondas esféricas:

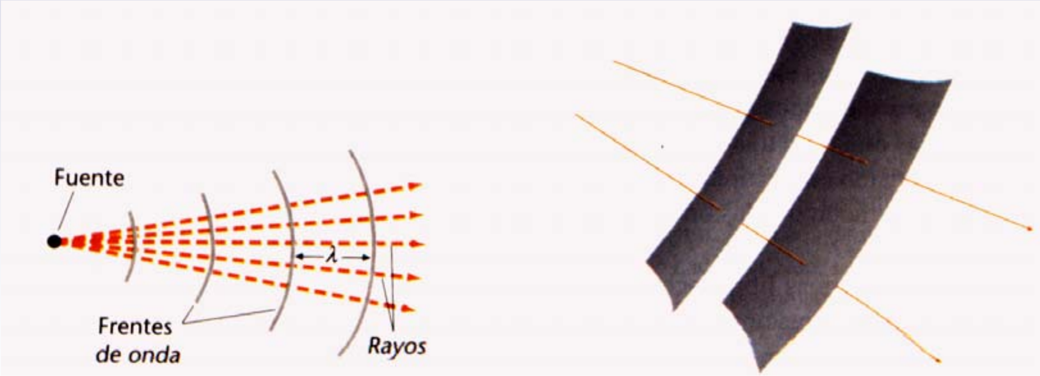
Foco o fuente puntual: emisión en todas direcciones

Frentes de onda esféricos



Ondas circulares

Ondas esféricas



Ecuación de ondas en coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\\&p(r,t)=\frac{\phi(r,t)}{r}\end{aligned}\right\}\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{p(r,t)=\frac{\phi_0}{r}\cos(kr\pm\omega t)=p_0(r)\cos(kr\pm\omega t)}\qquad p_0(r)=\frac{\phi_0}{r}$$

$$u(r,t)=u_0(r)sen(kr\pm\omega t)$$