

TEMA 2

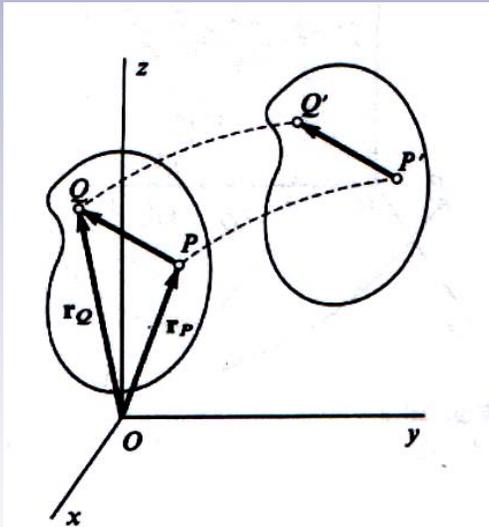
Revisión de mecánica del sólido rígido

2.1. Introducción

SÓLIDO RÍGIDO

SÓLIDO: considerar orientación y rotación

RÍGIDO:



CONDICIÓN DE RIGÍDEZ:

- movimiento: no se alteran distancias entre puntos
- se ignoran las deformaciones

FORMAS DE ESTUDIO DEL SÓLIDO RÍGIDO...

MOVIMIENTO:

CINEMÁTICA: estudio del movimiento desentendiéndose de las causas que lo producen

DINÁMICA: estudio del movimiento en relación con las fuerzas aplicadas

REPOSO:

ESTÁTICA: estudia *“el equilibrio”*

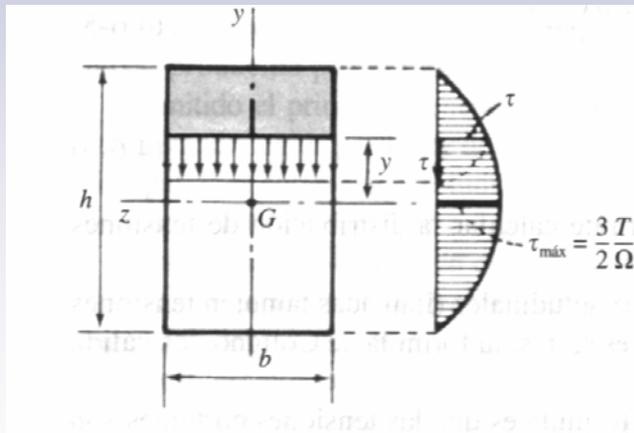
2. 2. Tensor de inercia

EXPRESIONES TIPO: masa • distancia planos, ejes...

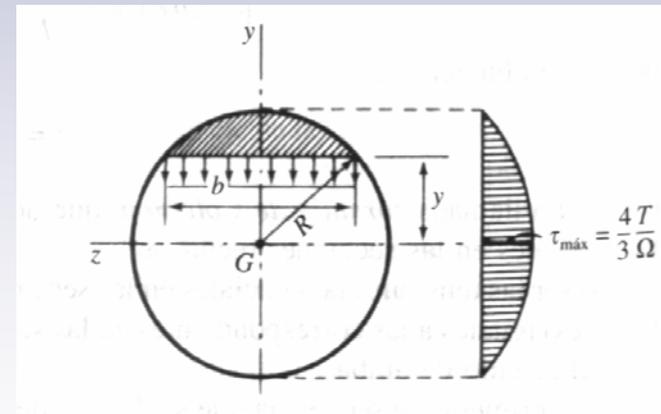
Respuesta de los sólidos sometidos a fuerzas externas dependiente de:

- masa y volumen
- **forma:** distribución espacial de masa

FLEXIÓN DE UNA VIGA:



Sección rectangular



Sección circular

Definición de parámetros:

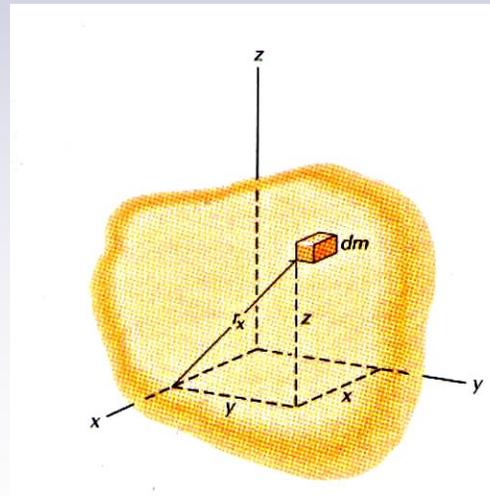
- dependientes de distribución espacial de masa
- descripción sencilla de comportamiento mecánico de sólidos

MOMENTO DE INERCIA :

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

$$I = \int_V r^2 dm$$

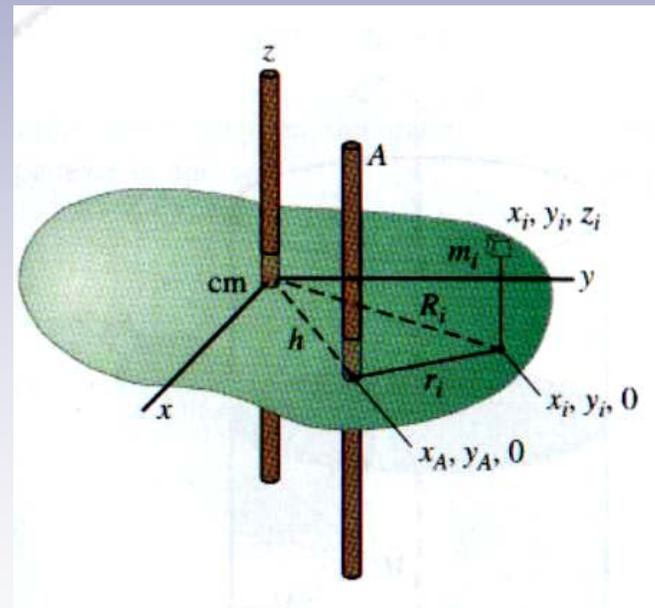
- Respecto a punto, eje o plano
- Valor positivo



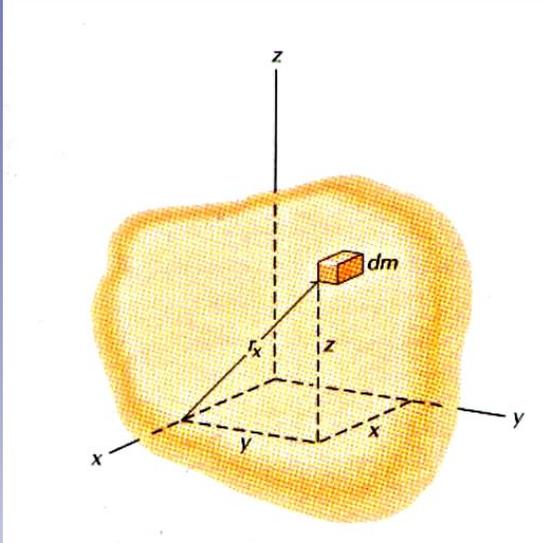
MOMENTOS DE INERCIA :

TEOREMA DE STEINER:

$$I_{eje} = I_{ejeCM} + mh^2$$



MOMENTOS DE INERCIA RESPECTO A LOS EJES DE UN SISTEMA OXYZ :



$$I_X = \int_V (y^2 + z^2) dm$$

$$I_Y = \int_V (x^2 + z^2) dm$$

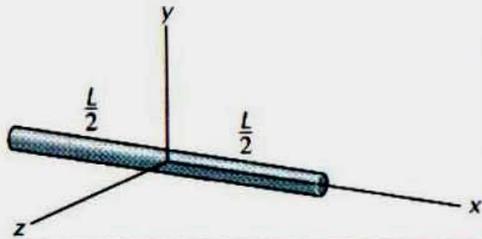
$$I_Z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

VOLUMEN: $\rho = cte = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \cdot dV$

SUPERFICIE: $\sigma = cte = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma \cdot dS$

LÍNEA: $\lambda = cte = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dL$

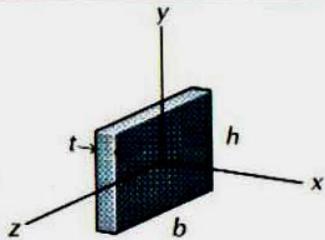
MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNAS FIGURAS:



Varilla

$$I_x = 0$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$$

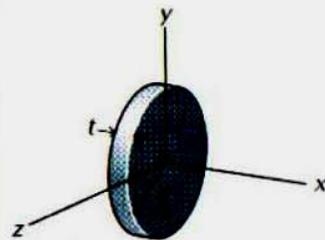


Placa rectangular

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12}mb^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}mh^2$$

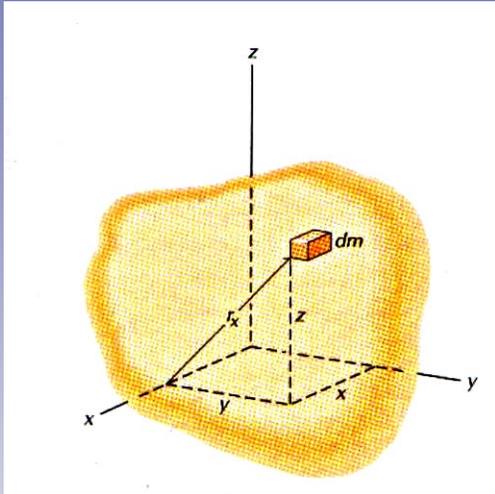


Placa circular

$$I_x = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}mR^2$$

PRODUCTOS DE INERCIA RESPECTO A LOS EJES DE UN SISTEMA OXYZ :



$$I_{XY} = \int yx dm$$

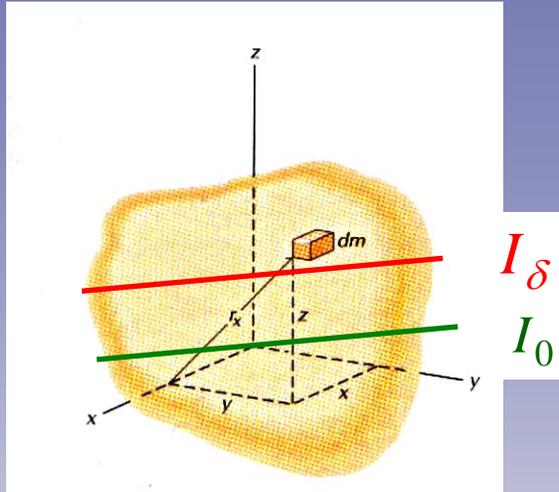
$$I_{YZ} = \int yz dm$$

$$I_{ZX} = \int xz dm$$

Productos de inercia: positivos, negativos o nulos.

MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA:
intervienen en casi todas las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UNA RECTA CUALQUIERA:



$$\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i \left[(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\cos \alpha x_i + \cos \beta y_i + \cos \gamma z_i)^2 \right]$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$I_0 = \cos^2 \alpha I_X + \cos^2 \beta I_Y + \cos^2 \gamma I_Z - 2(\cos \alpha \cos \beta I_{XY} + \cos \alpha \cos \gamma I_{XZ} + \cos \beta \cos \gamma I_{YZ})$$

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UNA RECTA CUALQUIERA:

$$I_0 = \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos \alpha & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \cos \alpha \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$I_0 \parallel I_\delta$: TEOREMA DE STEINER

$$I_X \quad I_Y \quad I_Z$$

$$I_{XY} \quad I_{XZ} \quad I_{YZ}$$

Cálculo del MOMENTO DE INERCIA respecto a cualquier recta del espacio

TENSOR DE INERCIA:

Las componentes de la matriz cambian por una rotación del

sistema de referencia: $T' = R \cdot T \cdot R^T$

$$I = \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix}$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DEL TENSOR DE INERCIA

PROPIEDADES DEL TENSOR DE INERCIA:

- Distribución de masa: en cada punto O un tensor de inercia
- **Tensor simétrico:** ejes principales y valores propios

$$\begin{vmatrix} I_X - \lambda & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y - \lambda & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

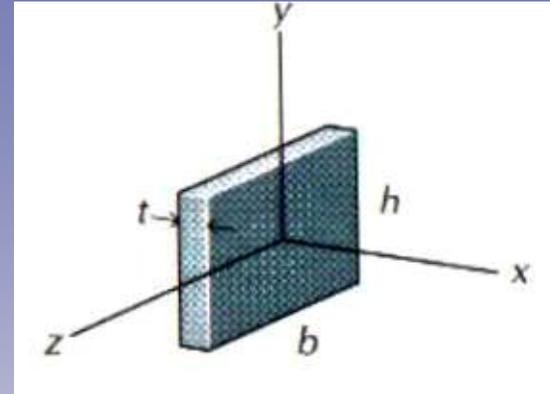
$$\begin{bmatrix} (I_X - \lambda_i) & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & (I_Y - \lambda_i) & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & (I_Z - \lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_i = (a_i, b_i, c_i) \\ (i = 1, 2, 3)$$

ALGUNOS EJEMPLOS:

CASO 1:

Distribución simétrica respecto a plano:

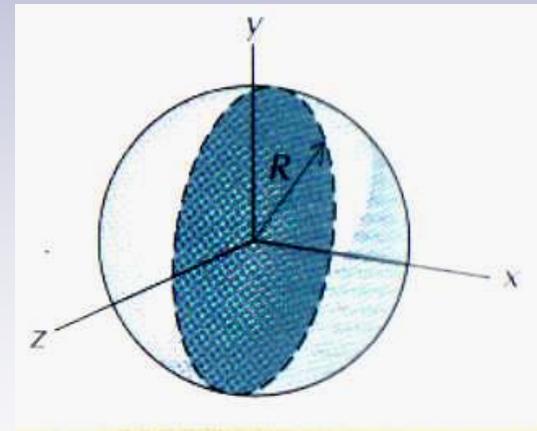
DIRECCIÓN PRINCIPAL: dirección perpendicular al plano



CASO 2:

Simetría de revolución en torno a eje:

DIRECCIONES PRINCIPALES: eje y direcciones perpendiculares



2.3. Fuerzas y clasificación

Definición de FUERZA: acción de un cuerpo sobre otro

FUERZA  RESISTENCIA

TERCERA LEY DE LA MECÁNICA:

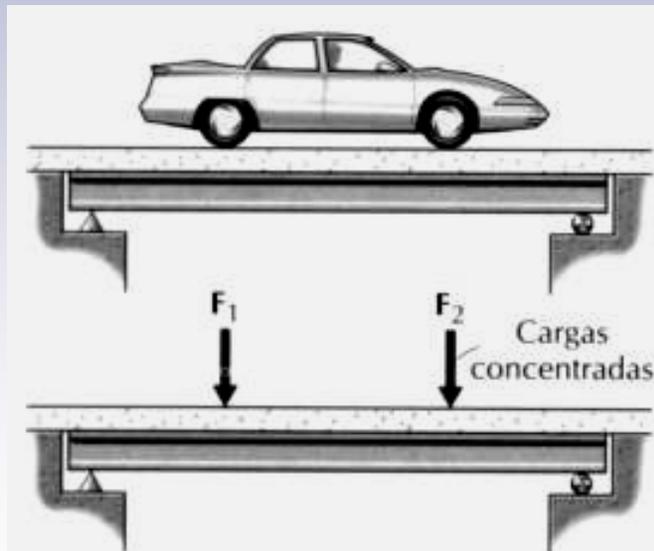
- las fuerzas siempre se producen por parejas
- reacción igual y opuesta a la acción

Formas de clasificación de las fuerzas:

a) - **F. DE CONTACTO:** cuerpos en contacto

- **F. DE ACCIÓN A DISTANCIA:** campo gravitatorio, campo eléctrico

b) **FUERZAS CONCENTRADAS**



FUERZAS DISTRIBUIDAS



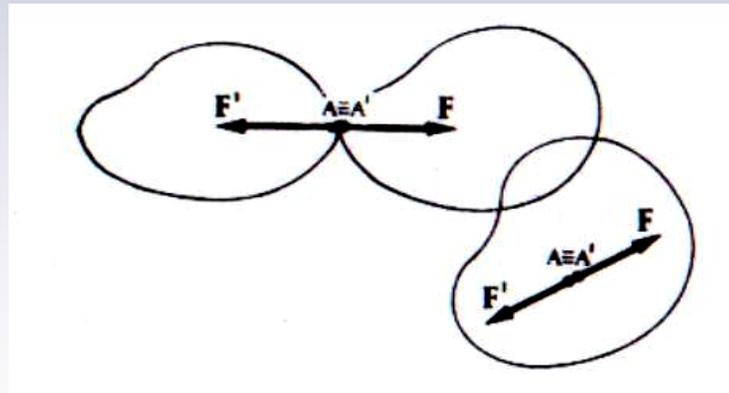
Formas de clasificación de las fuerzas:

DOS EFECTOS:

- EXTERIOR: cambio de movimiento
- INTERIOR: deformación

- FUERZAS EXTERNAS: ejercida por otro sólido

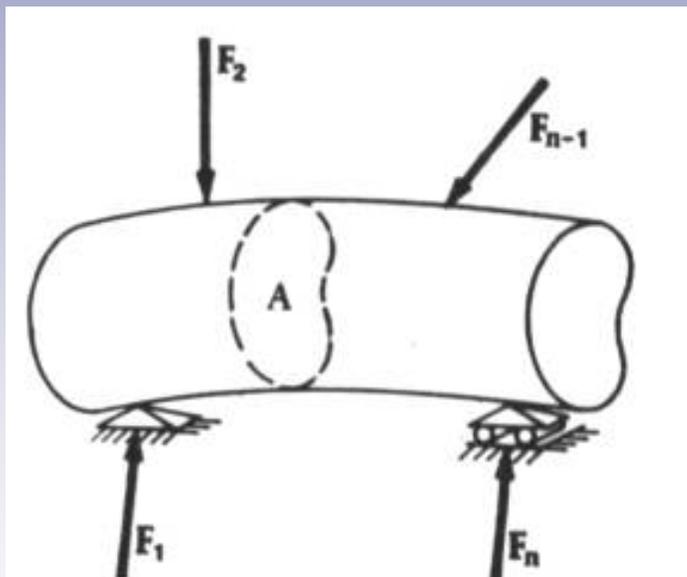
- FUERZAS INTERNAS: ejercida por otra parte del sólido



Formas de clasificación de las fuerzas:

SÓLIDO RÍGIDO

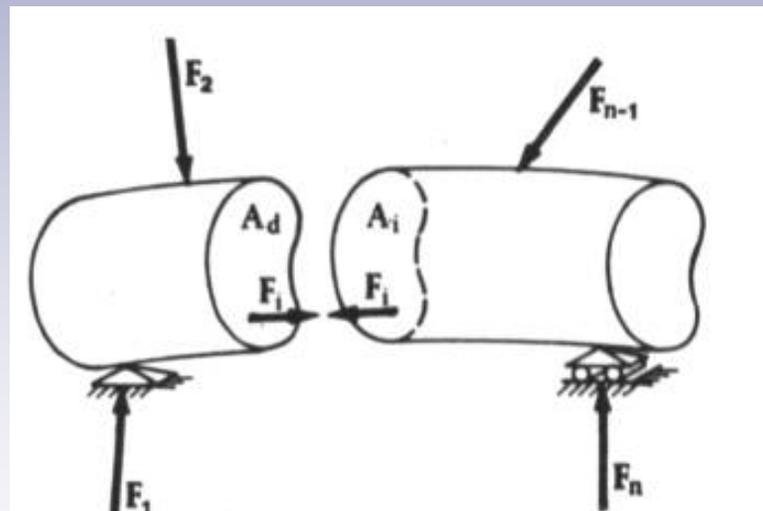
FUERZAS EXTERNAS



SÓLIDO DEFORMABLE

FUERZAS EXTERNAS

FUERZAS INTERNAS: m. secciones



$$(F_e)_{A_i} + (F_i)_{A_d} = 0$$

2.4. Condiciones de equilibrio

Un sistema se halla en **EQUILIBRIO** cuando **SU ESTADO NO SE MODIFICA CON EL TIEMPO**, es decir, cuando no se deforma y permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante.

EQUILIBRIO DE TRASLACIÓN

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

EQUILIBRIO DE ROTACIÓN

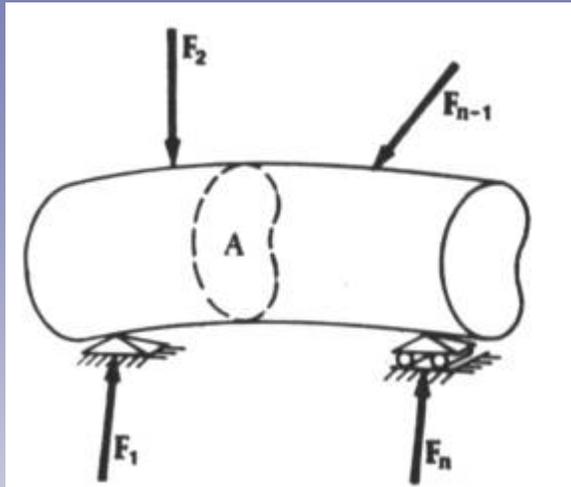
$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$$

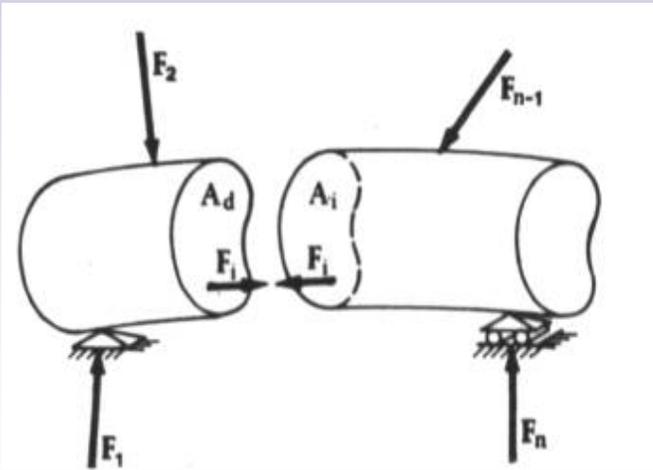
$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

EQUILIBRIO SÓLIDO DEFORMABLE: SÓLIDO ELÁSTICO



$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

CONDICIONES NECESARIAS
PERO NO SUFICIENTES



EQUILIBRIO ELÁSTICO: equilibrio entre las fuerzas exteriores y las internas en las infinitas secciones

Se estudian secciones que deben soportar mayor esfuerzo

2.5. Enlaces y reacciones

- **SÓLIDOS RÍGIDOS:** unidos al suelo o a otros sólidos (ligaduras, enlaces o vínculos)
- **LIGADURAS, ENLACES O VÍNCULOS:** fuerzas de reacción

GRADOS DE LIBERTAD:

- número de magnitudes independientes que determinan posición
- número de movimientos independientes

CLASIFICACIÓN DE LIGADURAS, ENLACES O VÍNCULOS:

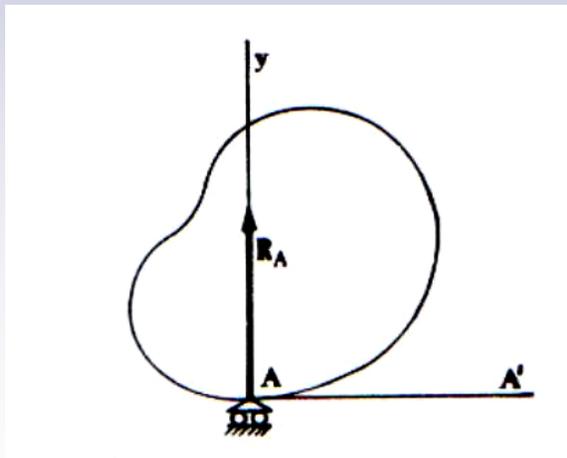
SIMPLES, DOBLES, TRIPLES.....: número de grados de libertad que hacen desaparecer

SISTEMA PLANO:

3 GRADOS DE LIBERTAD: - dos traslaciones: eje X e Y
- rotación eje Z

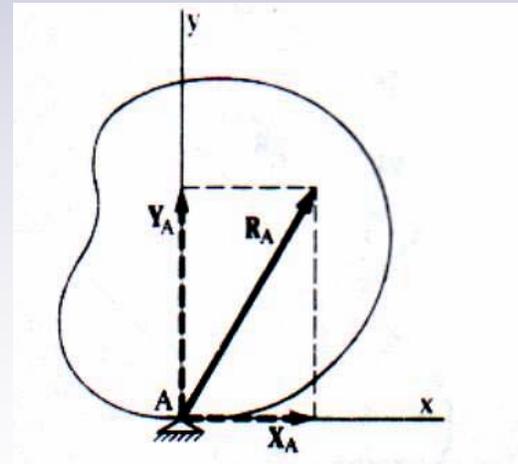
1) APOYO MÓVIL:

- enlace simple
- impide traslación según eje Y
- $R_A = Y_A$



2) APOYO FIJO O ARTICULACIÓN:

- enlace doble
- impide traslación según eje X e Y
- $R_A = (X_A, Y_A)$



SISTEMA PLANO:

3 GRADOS DE LIBERTAD: - dos traslaciones: eje X e Y
- rotación eje Z

3) EMPOTRAMIENTO O NUDO RÍGIDO:

- enlace triple
- impide traslación según ejes X e Y y giro
- R (T, N), M

