a) AMPLIACIÓN DE MECÁNICA DEL SÓLIDO

2. REVISIÓN DE CONCEPTOS DE MECÁNICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

2.1. Tensor de inercia

Cuando se aborda el estudio de la Mecánica del sólido se tiene que cuenta que su respuesta cuando son sometidos a acciones o fuerzas externas, no depende sólo de su masa y de su volumen, sino también de su forma esto es, de cómo está distribuida espacialmente su masa. Por ejemplo, la flexión que experimenta una viga, dependerá de su longitud y de la forma de su sección: dos vigas del mismo material e igual volumen se comportarán de modo diferente ante fuerzas idénticas.

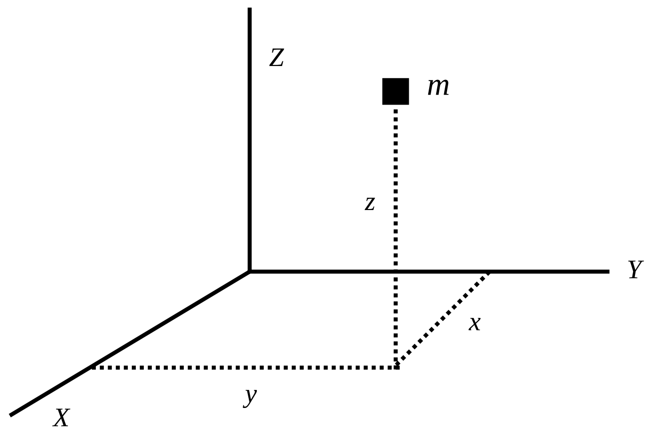
La ***Geometría de Masas*** se ocupa del cálculo y definición de aquellos parámetros que dependiendo de la distribución espacial de la masa, son importantes y permiten describir de una manera sencilla el comportamiento mecánico de los sólidos. Uno de estos parámetros es el momento de inercia.

a) Momento de inercia:

Dado un ***sistema de puntos materiales***, se llama ***momento de inercia*** del sistema respecto a un plano, eje o un punto a la suma de los productos obtenidos multiplicando la masa *m* de cada punto material por los cuadrados de sus distancias al plano, al eje o al punto respectivamente. Si $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots\ldots m_n$ son las masas de los *n* puntos del sistema, y $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$ son sus respectivas distancias al plano, al eje o al punto, la expresión del correspondiente momento de inercia es:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Si *x, y, z* son las coordenadas de un punto material de masa *m* respecto a un sistema de referencia cartesiano:



los momentos respecto a los tres planos coordenados *YZ*, *ZX* y *XY* son respectivamente:

$$I_{1(YZ)} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 ; \qquad I_{2(ZX)} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 ; \qquad I_{3(XY)} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes *X*, *Y* y *Z*:

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) ; \qquad I_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2) ; \qquad I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Por último, el momento de inercia respecto al origen de coordenadas es:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

De las expresiones anteriores se deducen las propiedades siguientes:

- El momento de inercia respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares y cuya intersección es dicho eje:

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 = I_{ZX} + I_{XY}$$

- El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 = I_{YZ} + I_{ZX} + I_{XY}$$

Y por la propiedad anterior es igual a la semisuma de los tres ejes ortogonales correspondientes:

$$I_O = I_{YZ} + I_{ZX} + I_{XY} = \frac{1}{2} I_{YZ} + \frac{1}{2} I_{ZX} + \frac{1}{2} I_{XY} + \frac{1}{2} I_{YZ} + \frac{1}{2} I_{ZX} + \frac{1}{2} I_{XY} = \frac{1}{2} I_X + \frac{1}{2} I_Y + \frac{1}{2} I_Z \Rightarrow$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$$

Si el cuerpo esta compuesto de un gran número de partículas, muy compacto, podemos suponer que tiene una estructura continua. Para calcular el momento de inercia de una estructura continua se divide el cuerpo en elementos de dimensiones infinitamente pequeñas, cada uno de los cuales tiene una masa tan pequeña como *dm* y se puede considerar como una partícula. Se aplican las expresiones anteriores, pero las sumas, en este caso, de infinitos términos, se convierten en integrales:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Los momentos de inercia de un cuerpo continuo respecto a los planos coordenados:

$$I_1 = \int_V x^2 dm\,; \qquad I_2 = \int_V y^2 dm\,; \qquad I_3 = \int_V z^2 dm$$

Respecto a los ejes coordenados:

$$I_X = \int_V (y^2 + z^2) dm\,; \qquad I_Y = \int_V (x^2 + z^2) dm\,; \qquad I_Z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

y respecto al origen de coordenadas:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Dependiendo de la geometría del sistema cuyo momento de inercia estamos calculando las integrales anteriores se pueden escribir en función de las densidades másicas de la siguiente manera:

a) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en un volumen *V* y *dV* es el volumen asociado a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de una esfera):

Densidad volumétrica de masa: $\rho = cte = \dfrac{M}{V} = \dfrac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \cdot dV$

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 (\rho dV)$$

b) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en un superficie *S* y *dS* es la superficie asociada a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de un círculo):

Densidad superficial de masa: $\sigma = cte = \dfrac{M}{S} = \dfrac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma \cdot dS$

$$I = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 (\sigma dS)$$

c) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en una longitud *L* y *dL* es la longitud asociada a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de una varilla):

Densidad lineal de masa: $\lambda = cte = \dfrac{M}{L} = \dfrac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dL$

$$I = \int_L r^2 dm = \int_L r^2 (\lambda dL)$$

b) Teorema de Steiner:

Si se conoce el momento de un sistema o sólido respecto a un eje que pasa por su centro de masas, se puede determinar el momento de inercia del sistema respecto a un eje cualquiera paralelo al primero mediante el ***teorema de Steiner***:

"El momento de inercia respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia que separa dichos ejes"

Matemáticamente el teorema de Steiner se expresa:

$$I_{\Delta} = I_{CM} + Md^2$$

De manera análoga se tiene que *"el momento de inercia respecto a un plano (punto) es igual al momento de inercia respecto a un plano (punto) que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia que separa dichos planos (puntos)"*.

c) Productos de inercia:

Dado un sistema de *n* puntos materiales, se denominan ***productos de inercia*** respecto a los ejes *X*, *Y* y *Z* a los productos:

$$I_{YZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i\,; \qquad I_{ZX} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i\,; \qquad I_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Lógicamente, $I_{YZ} = I_{ZY}$; $I_{XZ} = I_{ZX}$; $I_{XY} = I_{YX}$. Y en el caso de cuerpos continuos se transforman en:

$$I_{YZ} = \int yzdm\,; \qquad I_{ZX} = \int xzdm\,; \qquad I_{XY} = \int yxdm$$

Los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o nulos según los signos y valores de las coordenadas *x, y* y *z*.

d) Cálculo del momento de inercia respecto de una recta cualquiera:

Para calcular el momento de inercia de un sólido respecto de una recta cualquiera primero se calcula el momento de inercia respecto de una recta paralela a la recta dada y que pase por el origen O del sistema de referencia del sólido. Dicho momento de inercia se calcula mediante la expresión:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - (\cos\alpha x_i + \cos\beta y_i + \cos\gamma z_i)^2 \right]$$

siendo $(\cos\beta, \cos\alpha, \cos\gamma)$ las componentes de un vector unitario $\vec{u}$ a lo largo de la dirección de la recta que pasa por el origen. Si desarrollamos los productos que aparecen en dicha expresión podemos escribirla en función de los momentos y productos de inercia de la siguiente manera:

$$I_0 = \cos^2\alpha I_X + \cos^2\beta I_Y + \cos^2\gamma I_Z - 2(\cos\alpha\cos\beta I_{XY} + \cos\alpha\cos\gamma I_{XZ} + \cos\beta\cos\gamma I_{YZ})$$

Y esta expresión puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$I_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Calculado el momento de inercia I_0 según esta expresión el momento de inercia respecto a la recta original paralela a la que pasa por el origen del sistema de referencia se calcula utilizando el Teorema de Steiner.

Esta expresión nos demuestra que dado un sólido rígido y un sistema de referencia el momento de inercia respecto de una recta cualquiera queda determinado conociendo los momentos de inercia respecto de los ejes del sistema de referencia I_X, I_Y, I_Z y los productos de inercia I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ}. Se demuestra que las componentes de la matriz que aparece en dicha expresión se transforman según la expresión ya vista $T' = R \cdot T \cdot R^T$, por tanto constituye la representación matricial de un tensor de orden dos, el ***tensor de inercia:***

$$\|I\| = \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix}$$

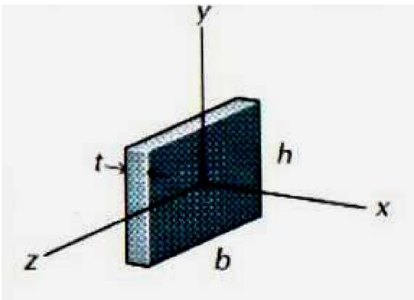
A cada punto del sólido se le asocia un tensor de inercia cuyas componentes dependen de la distribución de masa del sólido. Por tratarse de un tensor simétrico, en cada punto del sólido existe un sistema de referencia de tres ejes perpendiculares entre sí, los ejes principales de inercia, en los que la matriz que representa el tensor es diagonal. Los elementos de la diagonal principal constituyen los momentos de inercia respecto de los ejes principales y su valor es real.

Los invariantes del tensor de inercia escritos en un sistema de referencia de ejes principales quedarían de la siguiente manera:

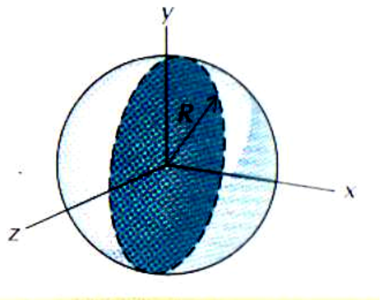
$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = I_X + I_Y + I_Z$$
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = I_X I_Y + I_Y I_Z + I_X I_Z$$
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_X I_Y I_Z$$

Por ejemplo, el primer invariante indica que la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes de un sistema de referencia cualquiera es una constate.

Si el sólido presenta una distribución simétrica de masa respecto de un plano, la dirección perpendicular a dicho plano de simetría es dirección principal de inercia:



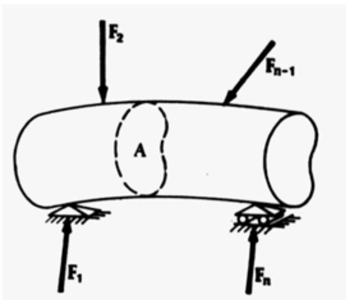
Si el sólido presenta simetría de revolución respecto de un eje, dicho eje y otros dos ejes perpendiculares cualesquiera constituyen un sistema de referencia principal:



2.2. Clasificación de las fuerzas

La Mecánica es la rama de la Física que trata de la respuesta de los cuerpos a las acciones de las fuerzas. Por conveniencia es estudio de la Mecánica se divide en tres partes: Mecánica de cuerpos rígidos, Mecánica de cuerpos deformables y Mecánica de fluidos. Dentro de la rama de la Mecánica de cuerpos deformables se encuentran disciplinas como Estática, Elasticidad, Resistencia de Materiales... que estudian las acciones que las fuerzas ejercen sobre los sólidos, así como el comportamiento de los materiales ante ellas, con objeto de poder diseñar sistemas mecánicos que funcionen correctamente.

La fuerza se puede definir diciendo que es la acción de un cuerpo sobre otro. Como un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre otro a menos que éste oponga resistencia, una fuerza nunca existirá sola.



Las fuerzas siempre se produce por parejas y la reacción es siempre igual y opuesta a la acción; es decir, las acciones que se ejercen dos cuerpos, uno sobre otro, son siempre iguales y directamente opuestas **(tercera ley de la Mecánica).** Si la interacción tiene lugar estando los cuerpos en contacto se habla de ***fuerzas de contacto o de superficie***, si la interacción tiene lugar estando los cuerpos físicamente separados se habla de ***fuerzas de acción a distancia.*** Ambos tipo de fuerzas aparecen en el estudio de la mecánica del sólido.

Se ha definido la fuerza diciendo que es la acción de un cuerpo físico sobre otro. Esta fuerza puede tener sobre el cuerpo dos efectos: 1) uno exterior que es la tendencia a cambiar su movimiento o a desarrollar fuerzas resistentes (reacciones) en el cuerpo y 2) un efecto interior, que es la tendencia a deformarlo.

En muchos problemas, el efecto exterior es importante y el interior no. Por ejemplo, para un sólido rígido, las fuerzas aplicadas no se transmitirían hacia el interior del sólido, la parte interior del sólido no notaría la fuerza debida a las fuerzas aplicadas sobre su superficie y no se produciría una deformación del sólido. Simplemente aparecería en la superficie del sólido una fuerza de reacción que se opondría a la ***fuerza externa*** aplicada. Cuando tratamos con un sólido real, las fuerzas aplicadas se transmiten a todo el sólido y se producen deformaciones en todo el mismo. Además de las fuerzas de reacción que ya aparecerían en el caso del sólido rígido, ahora aparecen ***fuerzas internas*** en todo su volumen. Es decir, hay una interacción entre la materia que se encuentra a un lado y a otro de cualquier superficie imaginaria que podamos imaginar dentro del sólido.

En este sentido, una primera distinción que tiene gran importancia, es la de ***fuerzas externas*** y ***fuerzas internas.*** Se dice que un sólido está sometido a la acción de una fuerza externa si dicha fuerza es ejercida por otro sólido diferente. Si una parte del sólido está sometida a una fuerza que es ejercida por otro parte de él, se dice que la fuerza es interna.

¿Cómo calcular las fuerzas internas?

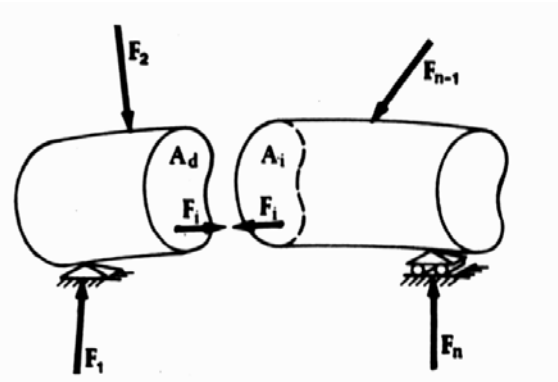
Consideremos un cuerpo que está en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas externas cualesquiera que comprende también las reacciones de los enlaces externos. Las fuerzas internas que existen dentro del cuerpo se ponen de manifiesto si imaginamos el cuerpo cortado en dos partes, por ejemplo, por la sección *A*. Esta forma de obtener las fuerzas internas se llama ***método de las secciones.***

Las dos partes del cuerpo no se encuentran en equilibrio después del corte, a menos que se restablezcan las acciones mecánicas que cada parte del cuerpo ejercía sobre la otra parte. Estas acciones son las fuerzas elementales que las partículas de un lado de la sección transversal *A* ejercen sobre las partículas del otro lado. El conjunto de fuerzas elementales que actúan en cada sección constituye el sistema de fuerzas internas de dicha sección, sistema de fuerzas que es diferente para las distintas secciones transversales del cuerpo.

La distribución de fuerzas internas sobre las secciones transversales derecha e izquierda A_d y A_i será tal que las dos partes en que la sección transversal *A* divide el cuerpo estarán en equilibrio separadamente. Esta condición puede expresarse matemáticamente mediante las ecuaciones:

$$(F_e)_i + (F_i)_{A_d} = 0$$

$$(F_e)_d + (F_i)_{A_i} = 0$$

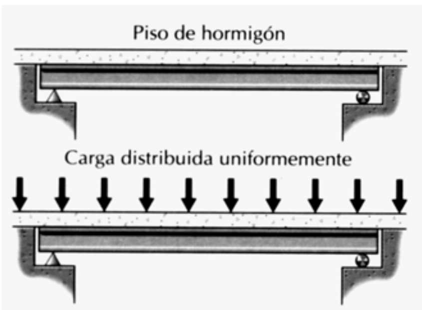


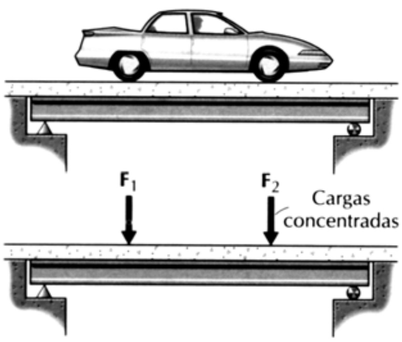
Según la tercera ley de la Mecánica la parte derecha del cuerpo actúa sobre la parte izquierda aplicando en cada punto de la sección fuerzas internas iguales y opuestas a las que aplica la parte izquierda sobre la parte derecha, esto es:

$$(F_i)_{A_d} = -(F_i)_{A_i}$$

Las fuerzas también se pueden clasificar atendiendo a la zona sobre la cual actúan. Cuando una fuerza actúa sobre un elemento de volumen o de superficie que es pequeño en relación con las dimensiones del cuerpo se le considera una ***fuerza concentrada.*** Por el contrario si las fuerzas están repartidas a lo largo de una longitud o sobre una superficie del cuerpo se dice que es una ***fuerza distribuida.*** La distribución puede ser uniforme o no.

Como ejemplo de fuerza distribuida podemos citar el peso del piso, de grosor uniforme de un puente de hormigón. Sin embargo, la fuerza que aplica la rueda de un coche a los miembros longitudinales del puente puede considerarse que es una carga concentrada.





Otro ejemplo de fuerzas distribuidas son las fuerzas gravitatorias o las fuerzas que ejercen los líquidos sobre las paredes que los contienen y las tierras sobre los muros de sostenimiento. Cuando se estudia el equilibrio del sólido, se puede sustituir este sistema de fuerzas por un sistema formado por una única fuerza, que es, la resultante del sistema.

2.3. Estática del sólido rígido

La Estática es la parte de la Física que estudia ***"el equilibrio"*** de un sistema de cuerpos. Un sistema de cuerpos se halla en equilibrio cuando su estado no se modifica con el tiempo, es decir, cuando no se deforma y permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante. Las condiciones de equilibrio se expresan de la siguiente manera:

a) Punto material

Un cuerpo de dimensiones despreciables se dice corrientemente que es un punto. En Mecánica, cuerpos grandes o pequeños pueden ser considerados como puntos cuando su tamaño y forma no tengan efecto alguno sobre la respuesta del cuerpo a un sistema de fuerzas. En tales condiciones, la masa del cuerpo se puede suponer concentrada en un punto. Por ejemplo, la Tierra puede considerarse punto material en los estudios de su movimiento orbital, ya que el tamaño de la Tierra es insignificante frente al tamaño de su órbita y la forma de la Tierra no influye en la descripción de su posición ni en la acción de las fuerzas a ella aplicadas.

Como en un cuerpo que se considera punto material se supone que la masa está concentrada en un punto y que puede prescindirse de su forma y tamaño, dicho cuerpo podrá estar sometido solamente a un sistema de fuerzas concurrentes. Así pues, será condición necesaria para el equilibrio de un punto:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

b) Sólido

La condición necesaria y suficiente para que un sólido, sobre el que actúa un sistema de fuerzas, se encuentre en equilibrio es que se cumplan simultáneamente las dos condiciones:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

igualdades vectoriales que son equivalente a las seis igualdades escalares siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

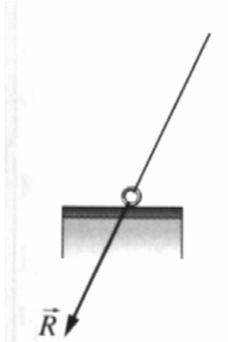
$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

Las tres primeras ecuaciones ponen de manifiesto las condiciones necesarias para que el cuerpo no se desplace con aceleración a lo largo de los ejes coordenados ***(equilibrio de traslación)*** y las tres siguientes para que no gire alrededor de dichos ejes ***(equilibrio de rotación).*** Las fuerzas y momentos que se ejercen sobre un cuerpo pueden ser exteriores o interiores.

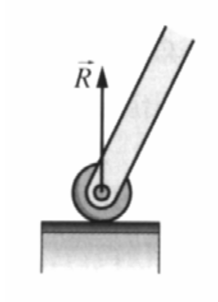
Las acciones de las conexiones y apoyos del sólido son tenidas en cuenta mediante las fuerzas de reacción o reacciones vinculares, esto es, son sustituidos por fuerzas en sentidos contrarios a los movimientos que impiden.

Los tipos de enlaces o ligaduras habituales en un sistema plano son los siguientes:

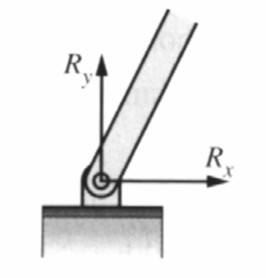
- **Cable:** si unimos un sólido a un cable, este tira del sólido con una fuerza determinada en la dirección del propio cable.



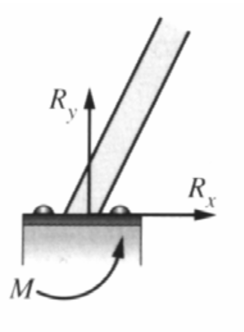
- **Apoyo móvil o apoyo simple:** impide la traslación en la dirección normal a la de desplazamiento del apoyo móvil. Un apoyo simple aplica sobre el sólido una fuerza perpendicular al plano sobre el que se apoya.



- **Apoyo fijo o articulación:** ejerce dos coacciones sobre el cuerpo al impedirle sus dos posibles traslaciones, permitiéndole únicamente girar alrededor del punto en el que está aplicada. Para impedir las traslaciones según dos ejes X, Y la articulación aplica una reacción consistente en dos componentes en las direcciones en las que se impide la traslación.



- **Empotramiento o nudo rígido:** el empotramiento ejerce tres coacciones sobre una viga impidiendo la dos traslaciones y el giro, es decir, todo posible movimiento. El empotramiento aplica sobre la viga una reacción consistente en dos componentes en la dirección en las que no es posible el movimiento de traslación y un momento, el de ***empotramiento***, normal a dicho plano.



Cuando se trata de un sólido rígido para que se encuentre en equilibrio es necesario y suficiente que se verifiquen las ecuaciones anteriores que son las condiciones generales del equilibrio estático. Sin embargo, en un sólido elástico o deformable estas condiciones son necesarias pero no suficientes ya que si suponemos realizado en el sólido un corte ideal y prescindimos de una de las partes es necesario que el sistema de fuerzas interiores en los puntos de la sección ideal sea equivalente al sistema de fuerzas que actúan sobre la parte eliminada. Llegamos así al concepto de ***equilibrio elástico*** que exige que se verifiquen en un sólido elástico no sólo las condiciones de equilibrio estático, sino también que exista equilibrio entre las fuerzas exteriores y las internas en cada una de las infinitas secciones.

Como esto debe suceder en las infinitas secciones del sólido y siendo imposible el estudio de todas ellas, lo que se hace es estudiar solamente las secciones que deben soportar un mayor esfuerzo, y lógicamente si éstas resisen es de suponer que las sometidas a esfuerzos menores también lo hagan.