TEMA 3.1

Mecánica del sólido deformable: Análisis de tensiones

3. 1. 1. Introducción

MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

OBJETIVO:

- estudio del comportamiento de los medios deformables

- establecer las bases físicas que nos permitan determinar:

1) el material mas conveniente
2) la forma
3) las dimensiones

más adecuadas de estos sólidos cuando se emplean como elementos de una construcción

MÉTODO DE TRABAJO:

Efectos que las FUERZAS APLICADAS provocan en el INTERIOR de un cuerpo cualquiera

SE ANALIZARÁN:

1) las TENSIONES INTERIORES que se engendran en un punto en el cuerpo:

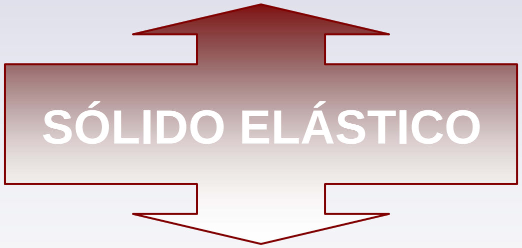
- **vector tensión**
- **estado de tensiones: TENSOR DE TENSIONES**

MÉTODO DE TRABAJO:

2) las DEFORMACIONES que se originan alrededor de un punto:

- **vector desplazamiento**
- **tensor de pequeñas deformaciones: deformación unitaria**

ESTADO DE TENSIONES



ESTADO DE DEFORMACIONES

3.1.2. Concepto de medio continuo

MODELO DEL SISTEMA OBJETO DE ESTUDIO:

- **SIMPLIFICACIÓN:** útil y cómodo
- **CONCLUSIONES:** buena aproximación de la realidad

PUNTO MATERIAL

- estudio de:

  cuerpos celestes,
  moléculas de gas

- trayectorias >> dimensiones

SÓLIDO RÍGIDO

- modificaciones de forma despreciables
- fuerzas aplicadas no pueden ser arbitrariamente grandes

SÓLIDO DEFORMABLE:

- **DISTANCIA ENTRE PARTÍCULAS: modificada por acciones externas**

- **MATERIA: constituida por partículas sometidas a complejas fuerzas de interacción, PLANTEAMIENTO COMPLEJO**

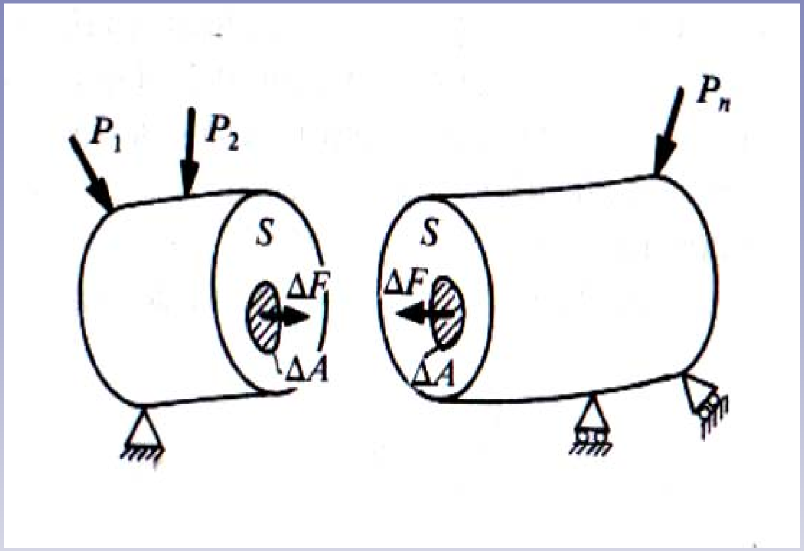
MODELO DEL MEDIO CONTINUO:

- **continuidad del sistema**
- **no existen huecos, ni distancias intersticiales**
- **continuidad de las funciones y magnitudes**

MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO:

- **MECÁNICA DEL SÓLIDO**
- **MECÁNICA DE FLUIDOS**

3.1.3. Vector tensión (o esfuerzo)



$$\Delta A$$

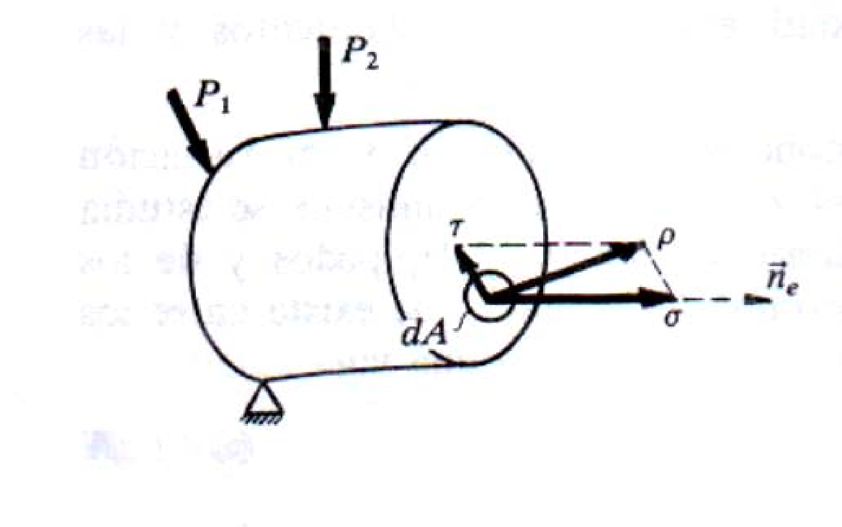
$$\Delta \vec{F}$$

$$\vec{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

$\vec{t}$ **: fuerza por unidad de superficie en un punto O**

¿ES ÚNICO EL VECTOR TENSIÓN ASOCIADO A UN PUNTO O?

DESCOMPOSICIÓN DEL VECTOR TENSIÓN $\vec{t}$



σ **: TENSIÓN NORMAL**

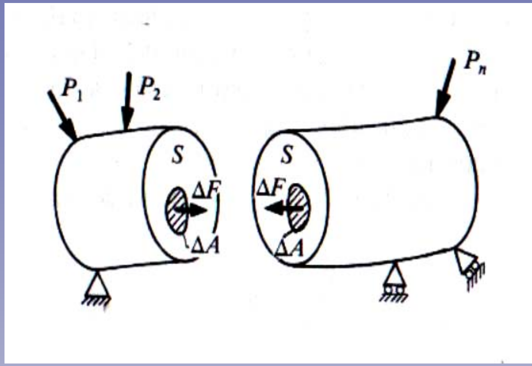
τ **: TENSIÓN TANGENCIAL**

Componentes intrínsecas de $\vec{t}$:

$$t^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

3.1.4. Estudio de los vectores tensión en un punto

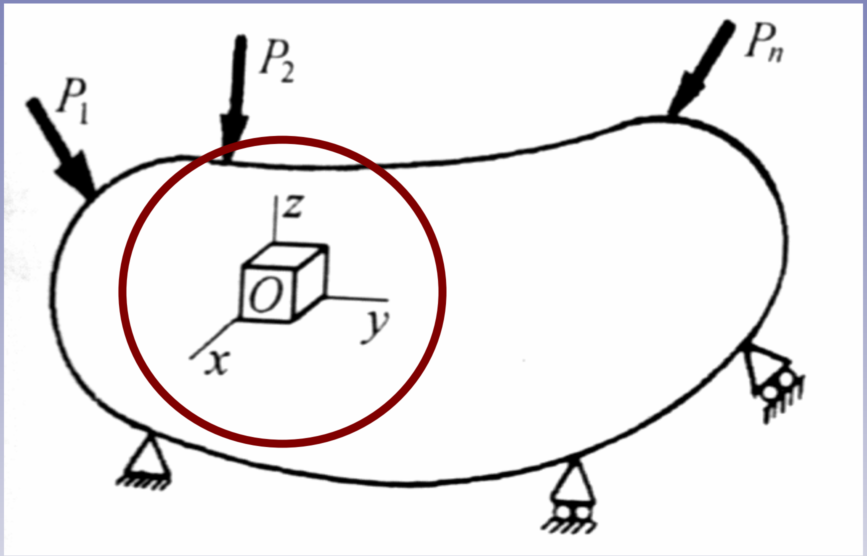
Vectores $\vec{t}$ asociados a las superficies S que pasan por O



ESTADO DE TENSIONES DE UN PUNTO "O"

CUESTIÓN:

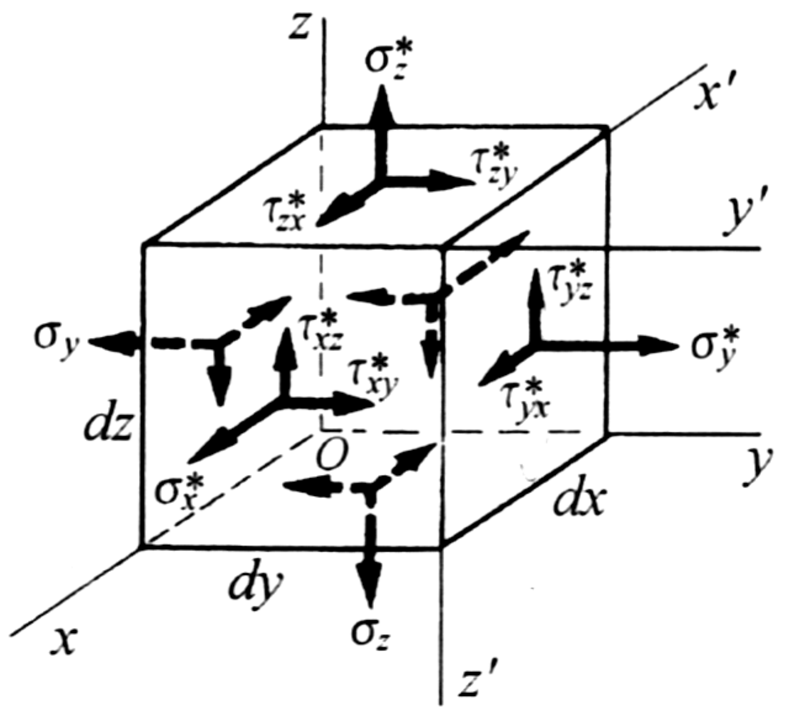
¿Es posible calcular de una manera sencilla el valor de la tensión en O para cualquier orientación de S?



- paralelepípedo de lados dx, dy, dz con vértice en O

- en el límite: caras del paralelepípedo = superficies S

Paralelepípedo de lados dx, dy dz:



Para cada cara, $\vec{t}$:

- Tensión intrínseca normal: σ_i

i : eje normal a la cara

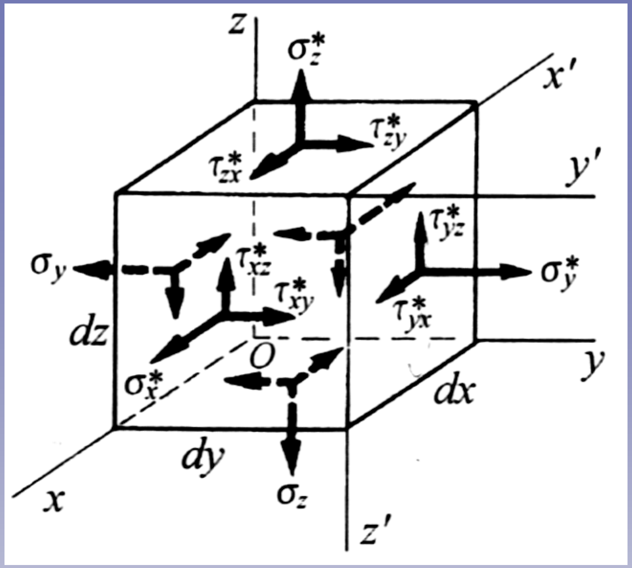
- Tensión intrínseca tangencial:

dos componentes τ_{ij}

i : eje normal a la cara

j : eje paralelo a la arista

Signo de las componentes: según el sentido de los ejes coordenados



$$¿\sigma_y \neq \sigma_y^* ? \qquad ¿\tau_{yz} \neq \tau_{yz}^* ?$$

En el equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

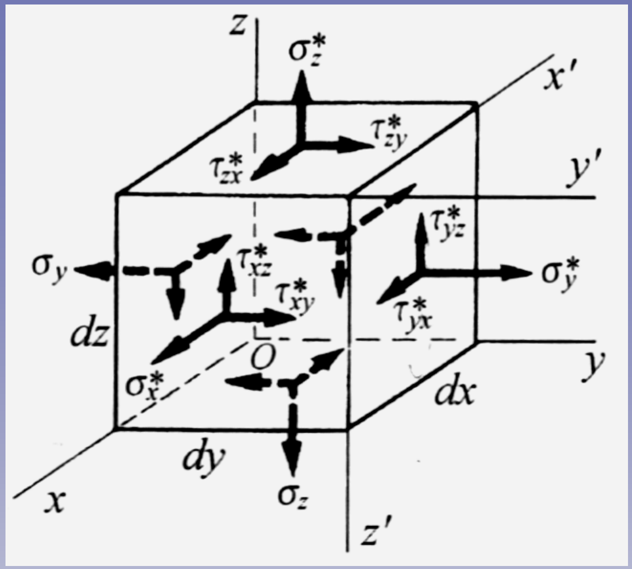
Despreciando el peso del paralelepípedo:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = 0 \Rightarrow \quad (\sigma_x^* - \sigma_x)dydz + (\tau_{yx}^* - \tau_{yx})dzdx + (\tau_{zx}^* - \tau_{zx})dxdy = 0$$

$$\sigma_x^* = \sigma_x \qquad \tau_{yx}^* = \tau_{yx} \qquad \tau_{zx}^* = \tau_{zx}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = 0 \Rightarrow \quad \sigma_y^* = \sigma_y \qquad \tau_{zy}^* = \tau_{zy} \qquad \tau_{xy}^* = \tau_{xy}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = 0 \Rightarrow \quad \sigma_z^* = \sigma_z \qquad \tau_{yz}^* = \tau_{yz} \qquad \tau_{xz}^* = \tau_{xz}$$



$$¿\tau_{yz} \neq \tau_{zy}?$$

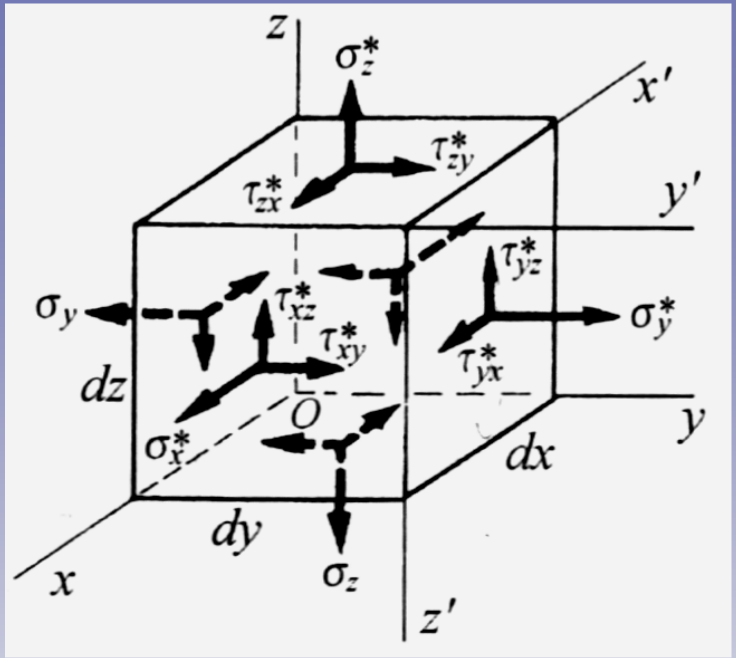
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{yz} dxdz)dy - 2(\tau_{zy} dxdy)dz = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{zx} dxdy)dz - 2(\tau_{xz} dydz)dx = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{xy} dydz)dx - 2(\tau_{yx} dxdz)dy = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

TEOREMA DE CAUCHY

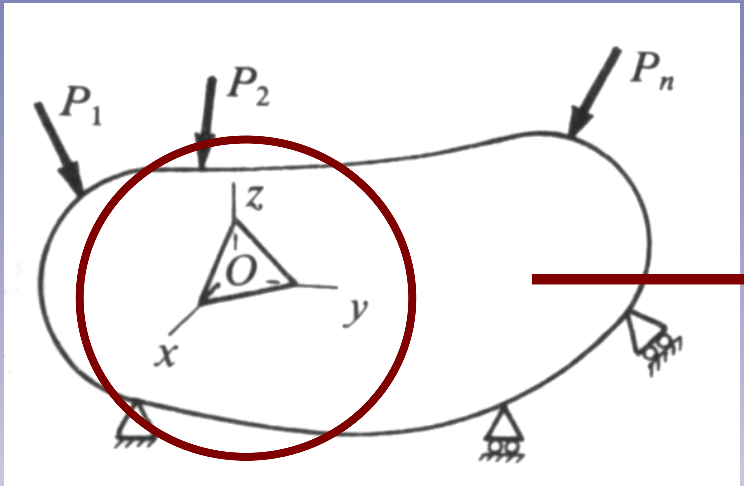


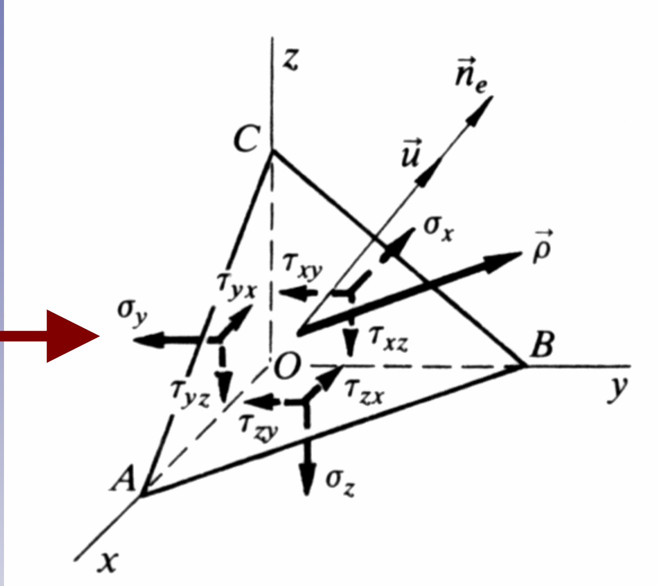
6 valores independientes:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$$

$$\tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$$

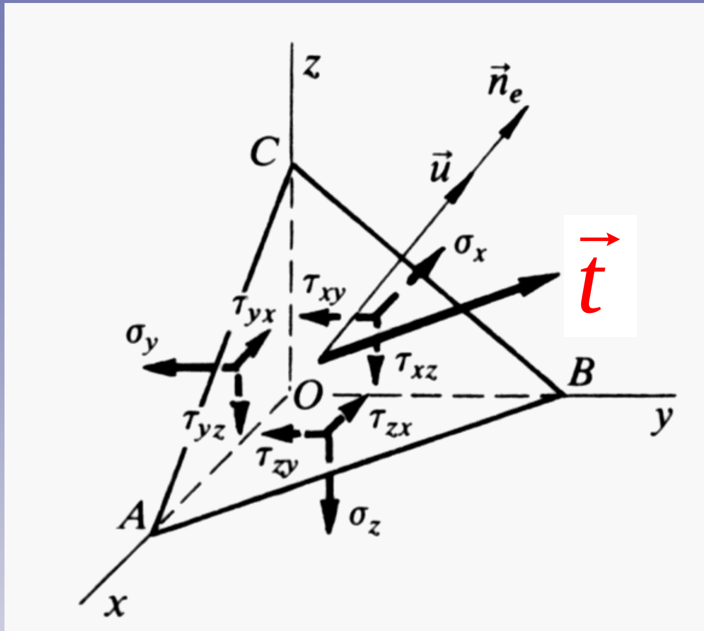
3.1.5. Tensor de tensiones





- cara ABC $\begin{cases} \text{Área: } dA \\ \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$

- áreas caras coincidentes con planos coordenados $\begin{cases} \alpha dA \\ \beta dA \\ \gamma dA \end{cases}$



Vector tensión asociado a ABC:

$$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} & t_x dA - \sigma_x \alpha dA - \tau_{xy} \beta dA - \tau_{zx} \gamma dA = 0 \\ & t_y dA - \tau_{xy} \alpha dA - \sigma_y \beta dA - \tau_{yz} \gamma dA = 0 \\ & t_z dA - \tau_{zx} \alpha dA - \tau_{yz} \beta dA - \sigma_z \gamma dA = 0 \end{aligned} \right.$$

Dividiendo por dA y reordenando los términos:

$$\left.\begin{aligned} t_x &= \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{zx} \gamma \\ t_y &= \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma \\ t_z &= \tau_{zx} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

VECTOR TENSIÓN ASOCIADO A “S” EN EL PUNTO O:

$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

ESTADO TENSIONAL EN EL INTERIOR DE UN SÓLIDO

En todos los puntos del sólido:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DEL TENSOR DE TENSIONES:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

1) TENSOR SIMÉTRICO: EJES PRINCIPALES

a) autovalores: tensiones principales

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

EN CADA PUNTO O:

- tres superficies perpendiculares entre sí
- desaparecen tensiones tangenciales, solo tensiones normales

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Para calcular las direcciones principales....

b) autovectores: direcciones principales

ANALÍTICAMENTE:

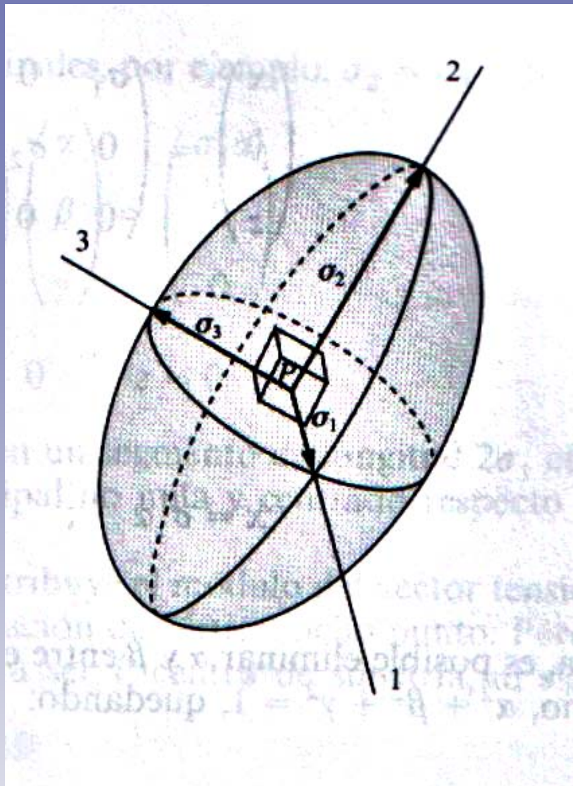
$$T \cdot \vec{u}_i = \sigma_i \cdot \vec{u}_i \Rightarrow (T - \sigma_i I) \cdot \vec{u}_i = 0$$

$\vec{u}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)\alpha_i + \tau_{xy}\beta_i + \tau_{zx}\gamma_i = 0 \\ \tau_{xy}\alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i)\beta_i + \tau_{yz}\gamma_i = 0 \\ \tau_{zx}\alpha_i + \tau_{yz}\beta_i + (\sigma_z - \sigma_i)\gamma_i = 0 \end{aligned}\right\} \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$$

$i = 1,2,3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma_1 \alpha \\ y &= \sigma_2 \beta \\ z &= \sigma_3 \gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

ELIPSOIDE DE TENSIONES O ELIPSOIDE DE LAMÉ:
lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión en un punto P

2) INVARIANTES

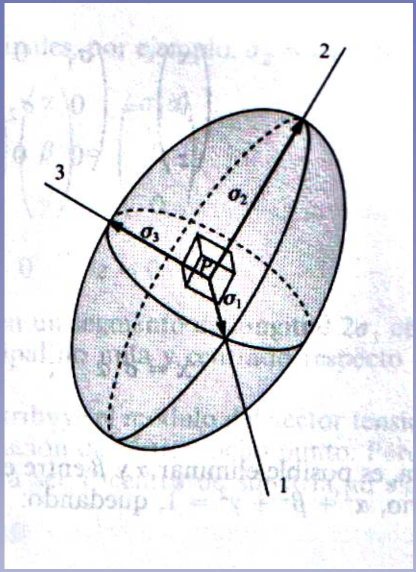
$$\det(T - \sigma I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

a) Invariante lineal o traza:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Suma de tensiones normales a tres planos perpendiculares entre sí es constante



b) Invariante cuadrático:

$$I_2 = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2$$

c) Invariante cúbico:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$