3. MECÁNICA DEL MEDIO CONTINÚO

Nuestro objetivo será estudiar el comportamiento de los sólidos deformables para poder establecer los criterios que nos permitan determinan el material más conveniente, la forma y las dimensiones más adecuadas de estos sólidos cuando se les emplea como elementos de una construcción.

Para ello primero vamos a estudiar los efectos que las fuerzas aplicadas provocan en el interior de un cuerpo cualquiera analizando:

1) las tensiones interiores que se engendran en el cuerpo
2) las deformaciones que se originan

Posteriormente, estudiaremos las relaciones entre el estado de tensiones y deformaciones cuando el cuerpo es elástico.

Para desarrollar este estudio lo primero que debemos hacer es postular un modelo acerca del sistema objeto de estudio. Así, el modelo de ***punto material*** es una buena aproximación para el estudio de los cuerpos celestes o de las moléculas de un gas, dado que las trayectorias por ellos descritas son muy grandes en comparación con sus propias dimensiones.

Cuando las dimensiones de los cuerpos materiales no permiten que sea válida esta modelización y en el caso de que las modificaciones de forma sean despreciables respecto al movimiento de su conjunto, la Mecánica adopta el modelo de ***cuerpo rígido***, es decir, de un sólido indeformable. Esta descripción de sólido no es en el fondo más que una abstracción, ya que no corresponde en la realidad a material alguno. Sin embargo, es de gran utilidad por la comodidad y simplificación que introduce. Las conclusiones que se obtienen en gran número de casos son buenas aproximaciones de lo que realmente ocurre. Sin embargo, experimentalmente observamos para que esta modelización sea válida las fuerzas aplicadas no pueden ser arbitrariamente grandes, ya que de lo contrario el cuerpo se deforma y se rompe. En este sentido, si existiesen sólidos rígidos no existirían peligros de rotura ni deformaciones de ningún tipo y disciplinas como la Elasticidad o la Resistencia de Materiales carecerían de sentido. Esta observación nos exige revisar el concepto de sólido que hasta aquí hemos admitido.

Para el estudio que vamos a iniciar vamos a considerar el ***sólido deformable***, esto es la distancia mutua entre partículas es función de las acciones externas, pero vamos a suponer la cualidad de la ***continuidad.*** La materia está constituida por un elevadísimo número de partículas sometidas a complejas fuerzas de interacción. Este planteamiento resulta extraordinariamente complejo, por lo que se adopta el modelo de ***medio continuo*** en el que se prescinde de toda consideración molecular, y en su lugar, se da por hecho que la materia se halla distribuida en forma continua en todo su volumen, llenando por completo el espacio que ocupa. Se supone que no existen huecos entre partículas ni distancias intersticiales. Este concepto de medio continuo del material es el postulado fundamental de la Mecánica del Medio Continuo.

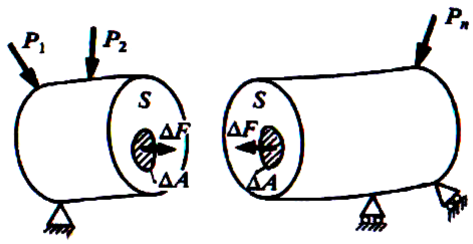
En este contexto y dentro de las naturales limitaciones se sientan las bases para estudiar los sólidos mediante la Mecánica de los Sólidos, y los gases y líquidos mediante la Mecánica de Fluidos.

3.1. TENSIONES

3.1.1. Vector tensión

Consideremos un sólido deformable sometido a un sistema de fuerzas y que se encuentra en equilibrio. Imaginémoslo cortado en dos partes por una superficie *S*. Cada una de las partes en que hemos dividido el sólido estará en equilibrio sólo si consideramos la existencia de una distribución continua fuerzas internas que sobre ese lado del sólido ejerce el otro lado. En este sentido, sobre un elemento de superficie ΔA correspondiente a la superficie *S* y que contiene el punto *O* actúa una fuerza $\Delta\vec{F}$. Se denomina ***vector tensión en el punto O correspondiente a la superficie S*** al siguiente límite:

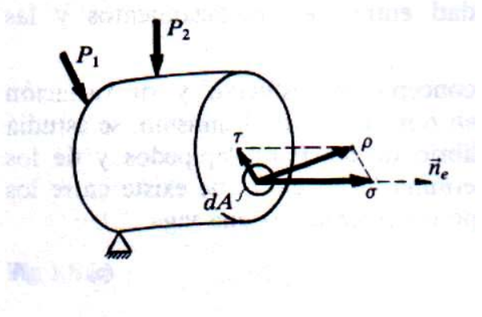
$$\vec{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$$



La tensión así definida resulta ser un vector paralelo a $\Delta\vec{F}$ y que cuyo módulo representa la fuerza por unidad de superficie ejercida sobre la sección *S.* Si cambiamos la orientación de la superficie *S* que divide al sólido en dos y que contiene el punto *O*, cambia la distribución continua de fuerzas, en general $\Delta\vec{F}$ cambiará su módulo y dirección, por lo que también serán distintos los vectores tensión correspondientes. El vector tensión, por tanto por definición se asocia a una superficie.

Para cada orientación de la superficie *S* que pase por el punto *O* el vector tensión podrá descomponerse en una ***tensión normal*** a la superficie S y que representaremos por σ y una ***tensión tangencial*** y que representaremos por τ . Según que σ esté dirigido en el sentido de la normal exterior o en sentido contrario, σ es ***una tensión de tracción o una tensión de compresión.*** A σ y τ se les llama componentes intrínsecas de la tensión y entre ellas se verificará la relación:

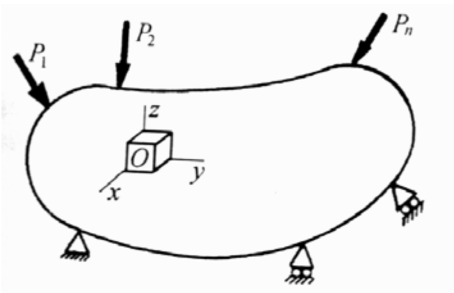
$$t^2 = \sigma^2 + \tau^2$$



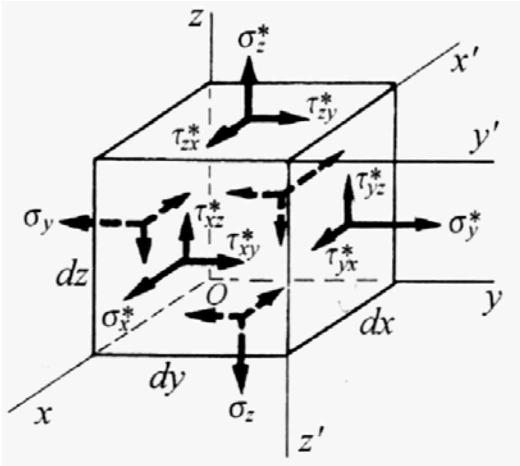
3.1.2. Estudio de los vectores tensión en un punto

Hemos visto que al pasar diferentes superficies por el punto O se obtienen diferentes valores de tensión. ***El conjunto de tensiones correspondientes a todas esas superficies constituye el estado de tensiones en el punto O.*** Llegado a este punto se nos planea la cuestión de si es posible calcular de una manera sencilla el valor de la tensión para cualquier orientación de la superficie. Veremos que la respuesta es afirmativa y es nuestra siguiente cuestión de estudio.

Sea *O* el punto del cuerpo cuyo estado de tensiones estamos considerando. Para ello, aislamos un elemento de volumen diferencial en forma de paralelepípedo recto con vértice en el punto *O* y de aristas *dx, dy* y *dz.* Consideremos un sistema de ejes coordenados coincidentes con las aristas del paralelepípedo y con origen en el punto *O*. Cuando se reducen las dimensiones del paralelepípedo, éste tiende al punto *O*; en el límite todas sus caras pasan por *O* y podemos considerar las tensiones sobre las caras como tensiones en el punto *O*.



Sobre cada una de las caras existe un vector tensión cuya tensión intrínseca normal tendrá la dirección del eje al que es perpendicular la cara y las tensión intrínseca tangencial se podrá descomponer en las direcciones de los dos ejes paralelos a la cara que se considere. El subíndice de las tensiones normales σ_i denotará el eje coordenado al que es normal la superficie sobre la que actúa. Las componentes de las tensiones tangenciales las denotaremos con dos subíndices τ_{ij} el primero corresponde al eje coordenado al cual es normal la superficie y el segundo al eje al que es paralelo la componente de la tensión tangencial. En el siguiente gráfico están representadas las componentes de las tensiones sobre cada una de las caras del paralelepípedo:



En cuanto al signo de las tensiones tangenciales, diremos que son positivas cuando actuando en una cara vista, cara frontal, tienen el sentido positivo de los ejes coordenados. Si se considera la cara dorsal de este mismo plano, la tensión sobe ella será igual y opuesta a la anterior. Las componentes de las tensiones en el plano dorsal se consideran positivas cuando sus direcciones son contrarias a los ejes coordenados. Sobre las caras del paralelepípedo elemental, dado que sus dimensiones son muy pequeñas admitiremos que las fuerzas que se ejercen sobre ellas debido a las tensiones se encuentran uniformemente repartidas, por lo que podremos suponer que la resultante de estas fuerzas que actúan en cada cara pasa por el centro de gravedad de la misma. Estas fuerzas de superficie son infinitésimos de segundo orden $(\vec{f}_\Omega dS = \vec{f}_\Omega dxdy)$. Las fuerzas de volumen, si las hay, las consideraremos despreciables respecto a las de superficie, por ser infinitésimos de tercer orden $(\vec{f}_V dV = \vec{f}_\Omega dxdydz)$.

En algunas caras las tensiones están marcada con un asterisco para indicar que las tensiones que actúan sobre dos caras paralelas del paralelepípedo a priori no tiene que ser iguales. Ahora bien, este paralelepípedo se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre cada cara (obtenidas multiplicando las tensiones por el área de cada cara) y su peso. Si consideramos despreciable el peso del paralelepípedo, el resto de fuerzas deben verificar las ecuaciones de equilibrio del sólido:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

De la ecuación de la Estática $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = 0$ obtenemos:

$$(\sigma_x^* - \sigma_x)dydz + (\tau_{yx}^* - \tau_{yx})dzdx + (\tau_{zx}^* - \tau_{zx})dxdy = 0$$

de donde se deduce que para que dicha expresión sea nula las fuerzas sobre dos caras opuestas deben ser iguales y de signo opuesto y, por tanto, las tensiones, ya que las áreas de dos caras opuestas son iguales. Ecuaciones análogas se obtienen mediante $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = 0$.

El equilibrio también exige que sea nulo el momento resultante (calculando respecto el centro del paralelepípedo):

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{yz} dxdz)dy - 2(\tau_{zy} dxdy)dz = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{zx} dxdy)dz - 2(\tau_{xz} dydz)dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \Rightarrow 2(\tau_{xy} dydz)dx - 2(\tau_{yx} dxdz)dy = 0$$

De estas ecuaciones se deduce:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

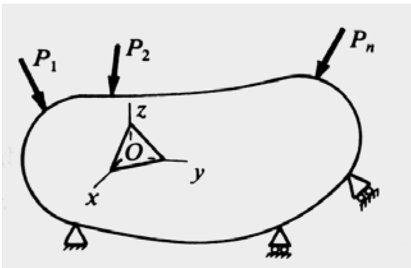
Estas igualdades constituyen el ***Teorema de Cauchy.*** Obtenemos entonces que de las 18 componentes (tres por cada cara) de los vectores tensión correspondientes a las seis caras del paralelepípedo considerado, solamente hay seis valores independientes:

$$\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{zx} , \tau_{xy}$$

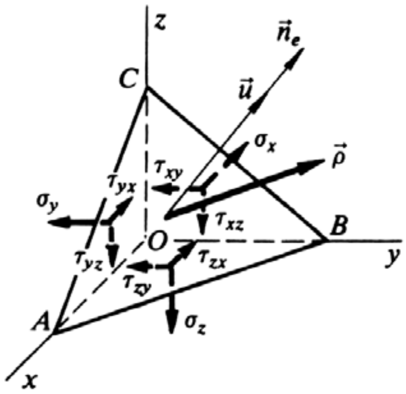
A continuación vamos a demostrar que conocidos estos seis valores queda determinado el vector tensión para cualquier orientación de la superficie que pase por dicho punto.

3.1.3. Tensor de tensión

Consideremos en torno al punto O un elemento de volumen en forma de tetraedro con vértice en el punto O. Tres caras son coincidentes con los planos coordenados y la cuarta cara *ABC (esta es la superficie de orientación cualquiera)* tiene un área *dA* y α, β y γ son los cosenos directores de la recta perpendicular al plano determinado por estos tres puntos. Las áreas de las caras del tetraedro paralelas a los planos coordenados son las proyecciones ortogonales del área *dA*, es decir, tienen los valores αdA, βdA y γdA respectivamente.



Cuando se reducen las dimensiones del tetraedro, manteniéndolo semejante a sí mismo, el tetraedro elemental tiende hacia el punto *O*. En el límite, todas sus caras pasan por *O* y podemos considerar que los esfuerzos sobre las caras del tetraedro elemental son iguales a las tensiones en el punto *O*.



Si llamamos t_x, t_y y t_z a las componentes del vector tensión $\vec{t}$ sobre la superficie *ABC* y el tetraedro está en equilibrio debe cumplirse que la suma de componentes paralelas a cada eje debe ser nula:

$$t_x dA - \sigma_x \alpha dA - \tau_{xy} \beta dA - \tau_{zx} \gamma dA = 0$$
$$t_y dA - \tau_{xy} \alpha dA - \sigma_y \beta dA - \tau_{yz} \gamma dA = 0$$
$$t_z dA - \tau_{zx} \alpha dA - \tau_{yz} \beta dA - \sigma_z \gamma dA = 0$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores por *dA* se obtiene:

$$t_x = \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{zx} \gamma$$
$$t_y = \tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma$$
$$t_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma$$

Ecuaciones que podemos escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

o bien según la expresión vectorial:

$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

siendo *T* el tensor de tensiones, tensor simétrico y $\vec{u}$ el vector unitario dirigido según la normal a la superficie *ABC*. Esta expresión indica que se obtiene el vector tensión correspondiente a un determinado plano multiplicando la matriz de tensión por el vector unitario perpendicular a dicho plano. Se deduce de ello que el estado de tensiones en el interior de un sólido es conocido si lo es en todos sus puntos el tensor de tensiones.

Propiedades:

1) Al ser el tensor de tensiones simétrico, existen un ejes, los ejes principales, en los que la matriz que lo representa es diagonal con todos los autovalores reales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las ***tensiones principales.*** Cuando se escogen estas ***direcciones principales*** como ejes, las componentes tangenciales o cortantes desaparecen, quedando únicamente las componentes normales, es decir, las fuerzas sobre las caras de un cubo orientado según esos ejes principales son perpendiculares a las caras.

Las raíces de la siguiente ecuación nos permitirán obtener las tensiones principales:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Las direcciones principales o autovectores correspondientes a las tensiones principales o autovalores se obtienen sabiendo que dichas direcciones verifican la siguiente ecuación vectorial:

$$T \cdot \vec{u}_i = \sigma_i \cdot \vec{u}_i \Rightarrow (T - \sigma_i I) \cdot \vec{u}_i = 0$$

con *i = 1, 2, 3.*

$$(\sigma_x - \sigma_i)\alpha_i + \tau_{xy}\beta_i + \tau_{zx}\gamma_i = 0$$

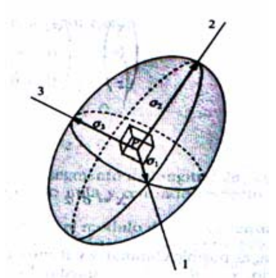
$$\tau_{xy}\alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i)\beta_i + \tau_{yz}\gamma_i = 0$$

$$\tau_{zx}\alpha_i + \tau_{yz}\beta_i + (\sigma_z - \sigma_i)\gamma_i = 0$$

En el sistema de ejes principales se puede ver fácilmente que el lugar geométrico de los extremos de todos los vectores tensión para todas las superficies S de cualquier orientación que pasan por el punto P, constituye un elipsoide el llamado ***elipsoide de tensiones o elipsoide de Lamé:***

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma_1 \alpha \\ y &= \sigma_2 \beta \\ z &= \sigma_3 \gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$



2) Invariantes del tensor de tensiones:

Invariante lineal o traza: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

La invarianza del coeficiente I_1 establece que *en un punto interior a un sólido la suma de las tensiones normales a tres planos cualesquiera perpendiculares entre sí y que pasan por dicho punto es constante y por tanto también igual a la suma de las tensiones principales.*

Invariante cuadrático: $I_2 = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2$

Invariante cúbico: $I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Los tres invariantes están relacionados con el elipsoide de tensiones o elipsoide de Lamé. I_1 además es igual a la suma de los tres semiejes del elipsoide, I_2 es proporcional a la suma de las áreas de las tres elipses que intercepta el elipsoide con los planos principales y I_3 es proporcional al volumen del elipsoide de tensiones.