TEMA 3.2
Mecánica del medio continuo:
Análisis de deformaciones

3.2.1. Introducción

ESTUDIO DE LOS SÓLIDOS DEFORMABLES: efectos de las fuerzas aplicadas

MÉTODO DE TRABAJO:

1) las TENSIONES INTERIORES que se engendran en un punto

2) las DEFORMACIONES que se originan alrededor de un punto

ESTADO DE TENSIONES

SÓLIDO ELÁSTICO

ESTADO DE DEFORMACIONES

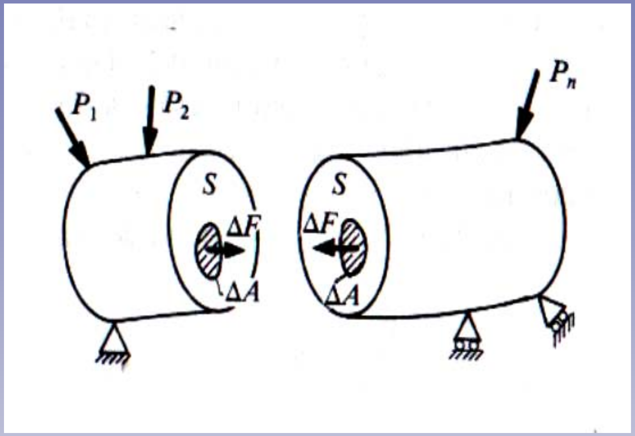
MODELO DEL MEDIO CONTINUO:

- materia distribuida de forma continua
- no existen huecos, ni distancias intersticiales

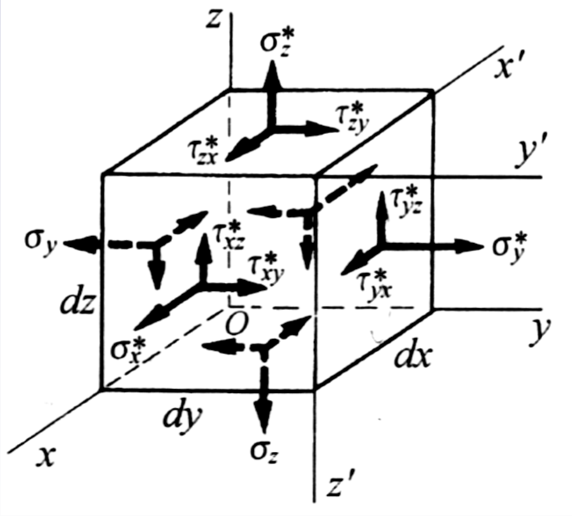
MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO:

- MECÁNICA DEL SÓLIDO
- MECÁNICA DE FLUIDOS

VECTOR TENSIÓN:



$$\vec{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$



$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

CONCEPTO DE DEFORMACIÓN:

DEFORMACIÓN:

cambio de posiciones relativas de los puntos del cuerpo debido al conjunto de fuerzas que actúan

$$\text{A, B} \longrightarrow \text{A´, B´}$$

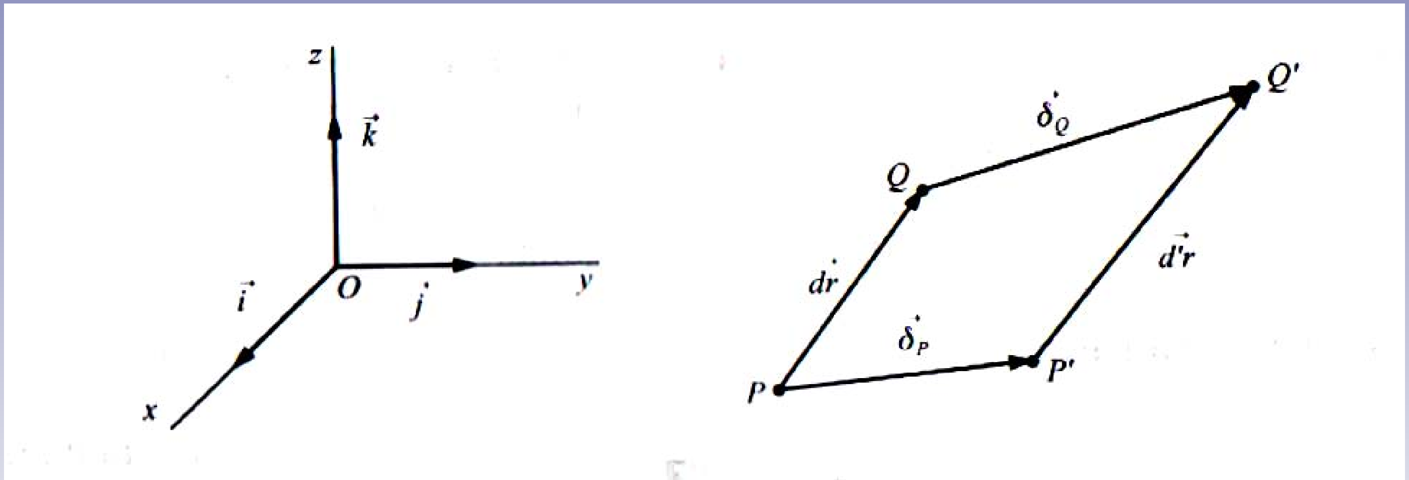
Deformación del segmento A - B:

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\Delta u}{\Delta r} \Rightarrow \qquad \varepsilon = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{du}{dr}$$

Deformación del entorno de un punto A en una dirección (B) específica

3.2.2. Deformaciones en el entorno de un punto

P y Q: **puntos próximos de un sólido (pequeñas deformaciones)**



$$\vec{PQ} = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \Rightarrow \boxed{¿\,\vec{P'Q'} = d'\vec{r}\,?}$$

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P)$$

Corrimientos o desplazamientos **de los puntos P y Q:**

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{\delta}_P = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \vec{\delta}_Q = u'\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$$

Para pequeñas deformaciones:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\delta}_Q = \vec{\delta}_P + [M] \cdot d\vec{r}$$

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow [M] = \frac{[M]+[M]^T}{2} + \frac{[M]-[M]^T}{2} = [D]+[H]$$

$[D]$ **: MATRIZ SIMÉTRICA**

$[H]$ **: MATRIZ ANTISIMÉTRICA**

Componente de las matrices $[D]$ y $[H]$:

$$[D]=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$[H]=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\delta}_Q = \vec{\delta}_P + [M]\cdot d\vec{r} = \vec{\delta}_P + [D]\cdot d\vec{r} + [H]\cdot d\vec{r} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P = [D]\cdot d\vec{r} + [H]\cdot d\vec{r} \\ \\ d'\vec{r} = d\vec{r} + (\vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d'\vec{r} = d\vec{r} + [D]\cdot d\vec{r} + [H]\cdot d\vec{r}$$

$[H]$: representa un giro infinitesimal

$[D]$: matriz de deformación, aplicada a $d\vec{r}$ produce un cambio de módulo y dirección

Matriz antisimétrica $\left[H\right]$:

$$\left[H\right]\cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\left[H\right]\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \frac{1}{2} rot(\vec{\delta}_P)\times d\vec{r}$$

Matriz antisimétrica $\left[H \right]$:

$$\left[H \right] \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} rot(\vec{\delta}_P) \times d\vec{r}$$

$$rot\vec{\delta}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

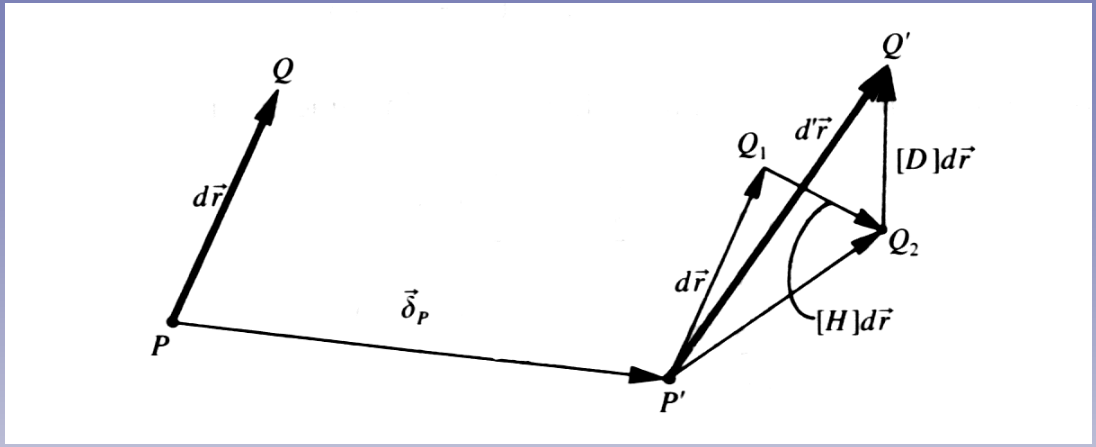
$$\Downarrow$$

ROTACIÓN DE UN SÓLIDO RÍGIDO:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

$\left[H \right] \cdot d\vec{r}$: **giro del entorno del punto como un sólido rígido**

$$d\'\vec{r} = d\vec{r} + [D]\cdot d\vec{r} + [H]\cdot d\vec{r}$$



1. **Traslación definida por** $\vec{\delta}_P$ **:** $\vec{PQ} \Rightarrow \vec{P\'Q_1}$
2. **Giro determinado por** $[H]$ **:** $\vec{P\'Q_1} \Rightarrow \vec{P\'Q_2}$
3. **Deformación definida por** $[D]$ **:** $\vec{P\'Q_2} \Rightarrow \vec{P\'Q\'}$

DEFORMACIÓN: $[D] \Rightarrow$ **tensor pequeñas deformaciones**

3.2.3. Tensor de pequeñas deformaciones

$$[D]=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si hacemos:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

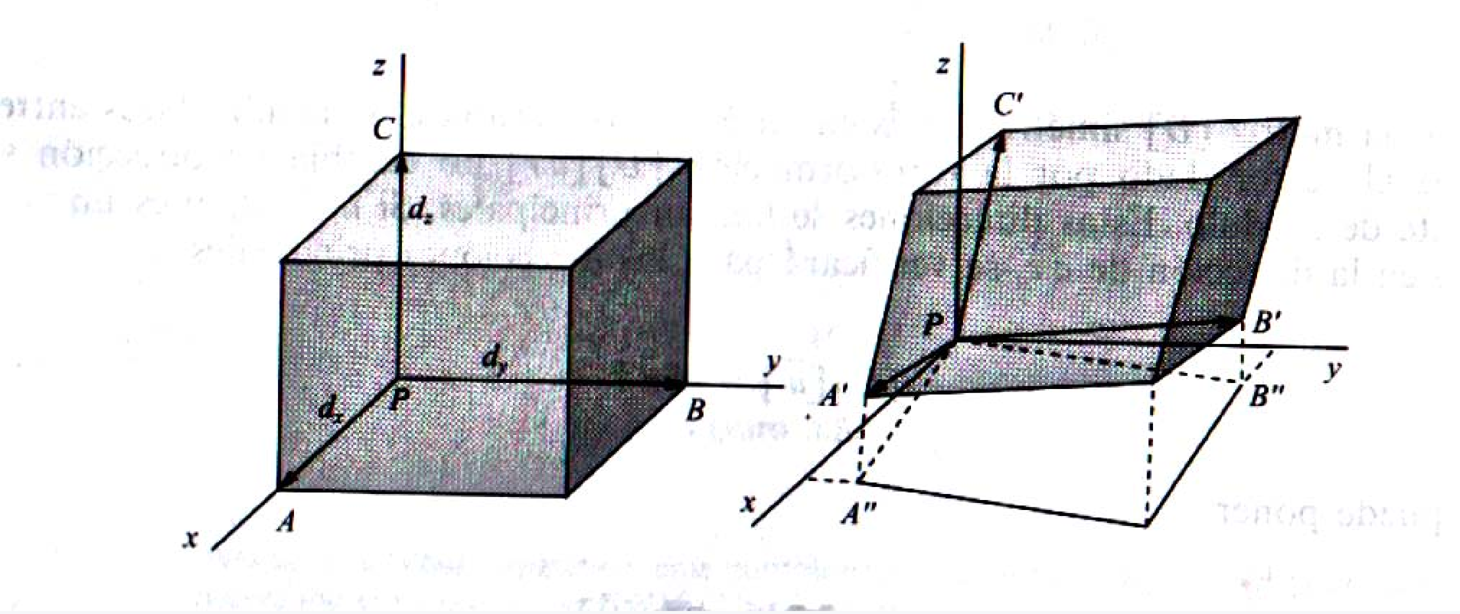
$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$[D]=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Significado de las componentes...

Significado de las componentes de $[D]$:

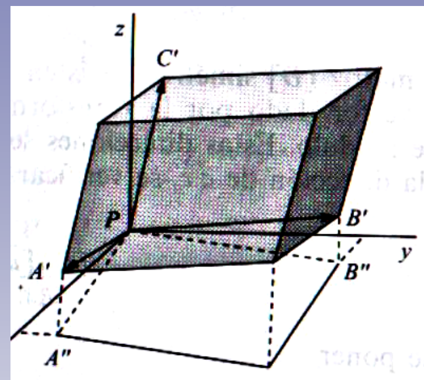
- traslación de componentes u, v, w: P→P´
- rotación alrededor de un eje que pasa por el punto P´
- matriz de deformaciones

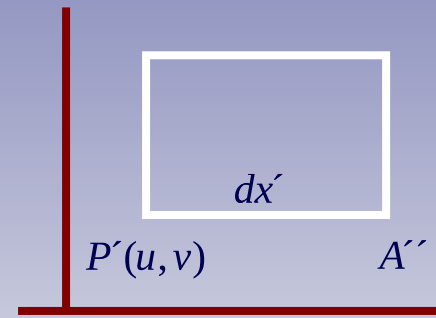


Significado de las componentes de $[D]$:

DEFORMACIONES LINEALES unitarias en dirección de ejes coordenados:

Según el eje X:





$$P\acute{} \rightarrow (u,v) \left.\right\} \begin{array}{l} A \rightarrow (dx,0) \\ A\acute{}\acute{} \rightarrow \left(u + \dfrac{\partial u}{\partial x} dx, v\right) \end{array}$$

$$\varepsilon_x = \frac{(P\acute{}A\acute{}\acute{}) - PA}{PA} = \frac{dx\acute{} - dx}{dx} = \frac{\left(dx + \dfrac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

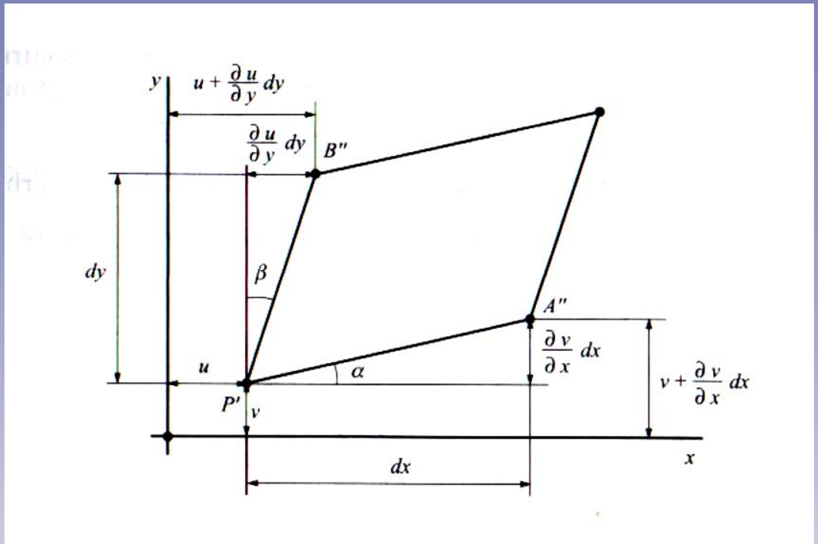
Alargamiento unitario según el eje X: $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

Alargamiento unitario según el eje Y: $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Alargamiento unitario según el eje Z: $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$

Se consideran positivas si originan alargamientos de las aristas

Significado de las componentes de $[D]$:



$$[D]=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$¿\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)?$$

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha=\alpha=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x} \\ tg\beta=\beta=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy}=\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \gamma_{xy}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\alpha+\beta$$

$$[D]=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Significado de las componentes de $[D]$:

$\gamma_{xy} \Longrightarrow$ **Variación angular de ángulo recto de lados paralelos a X e Y**

$\gamma_{xz} \Longrightarrow$ **Variación angular de ángulo recto de lados paralelos a X y Z**

$\gamma_{yz} \Longrightarrow$ **Variación angular de ángulo recto de lados paralelos a Y y Z**

- **Si $\gamma > 0$: el ángulo inicialmente recto disminuye**
- **Si $\gamma < 0$: el ángulo inicialmente recto aumenta**

3.2.4. Deformación unitaria en cualquier dirección

$$d\acute{}\vec{r} = d\vec{r} + [D]\cdot d\vec{r} + [H]\cdot d\vec{r}$$

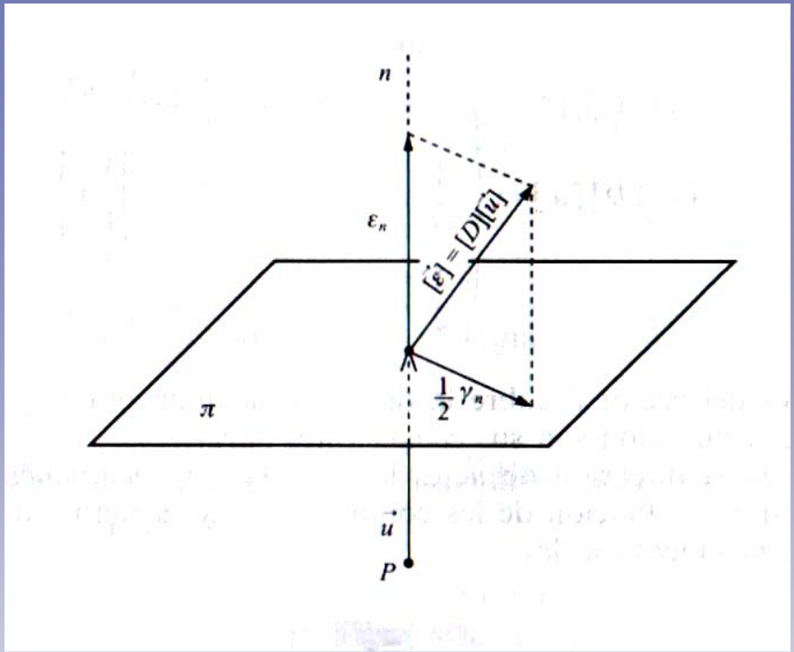
DEFORMACIÓN UNITARIA:

$$\vec{\varepsilon} = [D]\cdot \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = [D]\cdot \vec{u}$$

ESTADO DE DEFORMACIÓN :

conocido en todos sus puntos el tensor de deformación $[D]$

COMPONENTES INTRÍNSECAS:



$\vec{\varepsilon}$

- **Deformación longitudinal:** $\varepsilon_n = \vec{\varepsilon} \bullet \vec{u}$
- **Deformación transversal:** $\dfrac{\gamma_n}{2}$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2$$

3.2.5. Deformaciones y direcciones principales

$\left[D\right]$ **en cada punto O tensor simétrico:**

- **ejes principales: diagonal**
- **deformaciones principales reales**

a) AUTOVALORES: DEFORMACIONES PRINCIPALES

$$\left[D\right]=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3 = 0$$

b) AUTOVECTORES: DIRECCIONES PRINCIPALES

$$D \cdot \vec{u}_i = \varepsilon_i \cdot \vec{u}_i \Rightarrow (D - \varepsilon_i I) \cdot \vec{u}_i = 0$$

$$i = 1,2,3$$

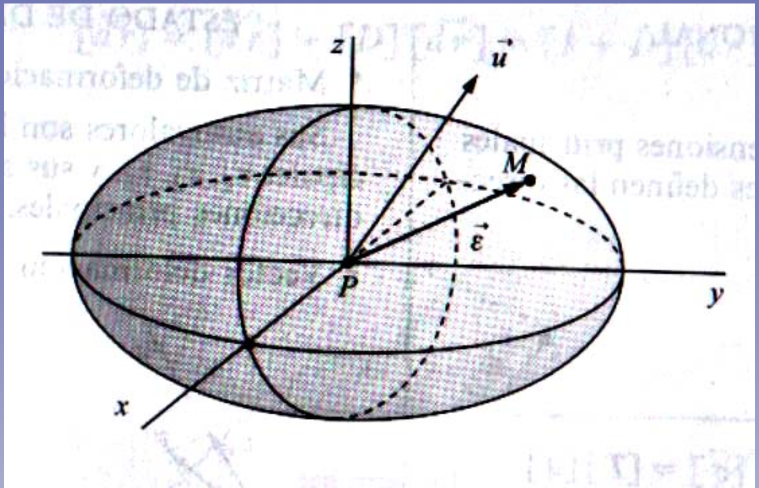
$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon)\alpha_i + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\beta_i + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\gamma_i = 0$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha_i + (\varepsilon_y - \varepsilon)\beta_i + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\gamma_i = 0$$

$$\vec{u}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha_i + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\beta_i + (\varepsilon_z - \varepsilon)\gamma_i = 0$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varepsilon_1 \alpha \\ y = \varepsilon_2 \beta \\ z = \varepsilon_3 \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{y^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3^2} = 1$$

ELIPSOIDE DE DEFORMACIONES:

lugar geométrico de los extremos de los vectores deformación

INVARIANTES DE $[D]$:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(D - \varepsilon I) = -\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3$$

a) INVARIANTE LINEAL O TRAZA:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Sistema de referencia: ejes principales

$$dV = dxdydz \Rightarrow dV' = dx'dy'dz'$$

DILATACIÓN CÚBICA UNITARIA:

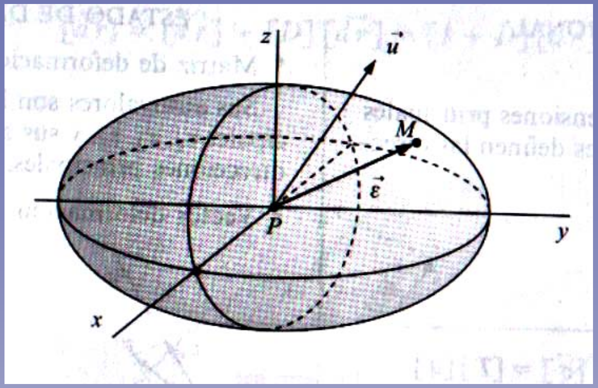
$$e = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{d'xd'yd'z - dxdydz}{dxdydz}$$

$$e = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{d'xd'yd'z - dxdydz}{dxdydz}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{d'x - dx}{dx} \Rightarrow d'x = (1+\varepsilon_1)dx \\
\varepsilon_2 &= \frac{d'y - dy}{dy} \Rightarrow d'y = (1+\varepsilon_2)dy \\
\varepsilon_3 &= \frac{d'z - dz}{dz} \Rightarrow d'z = (1+\varepsilon_3)dz
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$e = \frac{d'xd'yd'z - dxdydz}{dxdydz} = \frac{dxdydz\left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1\right]}{dxdydz}$$

$$e \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



b) INVARIANTE CUADRÁTICO:

$$I_2 = \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

c) INVARIANTE CÚBICO:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

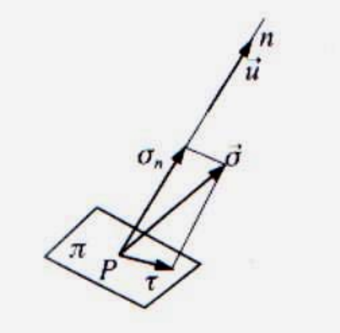
APÉNDICE 1. Ley de dualidad entre los estados tensional y de deformación

ESTADO TENSIONAL

- **Matriz de tensiones:**

$$[T] \left.\begin{matrix} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \end{matrix}\right\}$$

- **Vector tensión:** $\vec{t} = T \cdot \vec{u}$



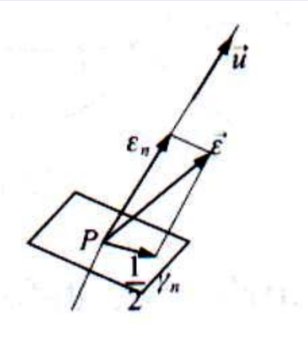
$$t^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

ESTADO DE DEFORMACIÓN

- **Matriz de deformaciones:**

$$[D] \left.\begin{matrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \end{matrix}\right\}$$

- **Vector deformación:** $\vec{\varepsilon} = D \cdot \vec{u}$



$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2$$

APÉNDICE 1. Ley de dualidad entre los estados tensional y de deformación

EQUIVALENCIA ENTRE AMBOS ESTADOS:

$$\vec{t} \rightarrow \vec{\varepsilon}$$

$$[T] \rightarrow [D]$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

$$\sigma \rightarrow \varepsilon_n$$

$$\tau \rightarrow \frac{\gamma_n}{2}$$