3.2. DEFORMACIONES

3.2.1. Introducción

Cuando sobre un cuerpo actúa un conjunto de fuerzas, cambian las posiciones relativas entre todos o parte de los puntos que lo componen: el cuerpo se deforma.

Si consideramos dos puntos *A* y *B* de un sólido, al actuar una fuerza externa, pasan a ocupar las posiciones *A´* y *B ´*. En realidad en lo que estamos interesados no es tanto en los desplazamientos absolutos, como en los desplazamientos relativos, ya que son éstos los que nos darán el estado de deformaciones de un cuerpo. Para ello definimos la deformación en la sección *AB* en la forma:

$$\frac{\Delta longitud}{longitudoriginal} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

y al considerar la deformación de segmentos cada vez más pequeños, tendremos la deformación en el punto *A* que queda como:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

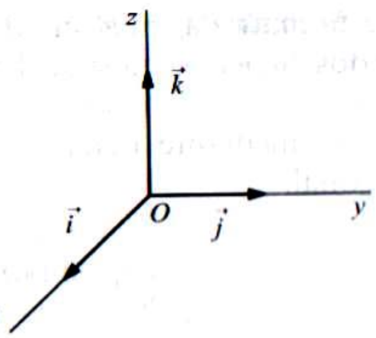
Ahora bien, cuando nos fijamos en las cercanías de un punto concreto *A*, se observa que el desplazamiento relativo que sufren dos puntos *B* y *C* situadas a la misma distancia de *A* es distinto, por tanto, la deformación depende de la dirección en que se estudie. Por ello, debe hablarse de deformación del entorno de un punto en una dirección y distancia específicas.

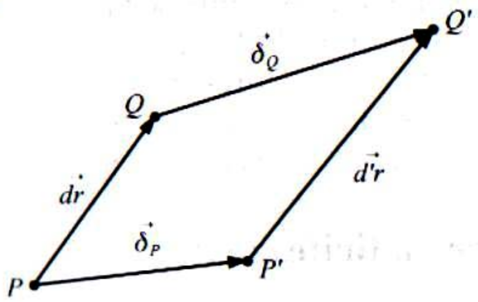
3.2.2. Deformaciones en el entorno de un punto

Consideremos un sólido inicialmente no deformado y dos puntos P y Q del mismo, tal que el punto Q está muy próximo a P (pequeñas deformaciones), de esta manera, el vector que une ambos puntos se puede escribir de la siguiente manera referido a un sistema cartesiano ortogonal *OXYZ:*

$$\vec{PQ} = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Producida la deformación el punto P pasará a P´ y Q a Q´:





Se denomina ***desplazamiento de un punto P*** al vector $\vec{PP'}$ definido por las posiciones del punto antes y después de la deformación del cuerpo. Los desplazamientos $\vec{\delta}_P$ y $\vec{\delta}_Q$ de estos dos puntos:

$$\vec{\delta}_P = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$
$$\vec{\delta}_Q = u'\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$$

y teniendo en cuenta que estamos en el caso de pequeñas deformaciones, podemos expresar las componentes de $\vec{\delta}_Q$ en función de las de $\vec{\delta}_P$ y de sus derivadas por medio del siguiente desarrollo:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + vdz$$
$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

La relaciones entre los desplazamientos de los puntos P y Q se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\delta}_Q = \vec{\delta}_P + [M] \cdot d\vec{r}$$

La matriz $[M]$ se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$[M] = \frac{[M]+[M]^T}{2} + \frac{[M]-[M]^T}{2} = [D] + [H]$$

siendo:

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$[H]=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto, podemos escribir:

$$\vec{\delta}_Q=\vec{\delta}_P+[M]\cdot d\vec{r}=\vec{\delta}_P+[D]\cdot d\vec{r}+[H]\cdot d\vec{r}$$

Como estamos más interesados en los desplazamientos relativos que en los absolutos, vamos a ver cuál es la expresión para el vector $d\vec{r}\,'$. De la figura inicial se deduce:

$$d'\vec{r}=d\vec{r}+(\vec{\delta}_Q-\vec{\delta}_P)$$

Expresión que usando los resultados deducidos hasta ahora podemos escribir de la siguiente manera:

$$d'\vec{r}=d\vec{r}+(\vec{\delta}_Q-\vec{\delta}_P)=d\vec{r}+[M]\cdot d\vec{r}=d\vec{r}+[D]\cdot d\vec{r}+[H]\cdot d\vec{r}$$

La matriz $[H]$ es una matriz antisimétrica que aplicada a un vector conserva su módulo por lo que representa un giro infinitesimal. La matriz $[D]$ es una matriz simétrica que vamos a llamar ***matriz (tensor) de deformación*** y que aplicada a un vector le produce un cambio de módulo y un cambio de dirección.

....

Propiedades de la matriz antisimétrica $[H]$:

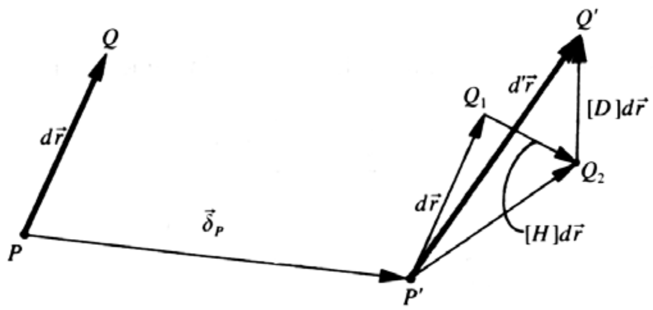
$$[H]\cdot d\vec{r}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=\frac{1}{2}rot(\vec{\delta}_P)\times d\vec{r}$$

siendo $rot\vec{\delta}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$

La expresión $[H]\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} rot(\vec{\delta}_P) \times d\vec{r}$ nos recuerda el campo de velocidades de un sólido rígido, en el que la rotación $\vec{\omega}$ fuera igual a $\frac{1}{2} rot(\vec{\delta}_P)$, entonces la matriz $[H]$ por el vector $d\vec{r}$ va a producir un giro del entorno como si se tratara de un sólido rígido.

....

A partir de aquí la ecuación deducida para $d'\vec{r}$ nos indica que el vector $d\vec{r}$ que tienen por origen un punto *P* del sólido y por extremo otro punto *Q* de su entorno antes de la deformación se convierte, después de producida la deformación, en otro vector $d'\vec{r}$ que se puede obtener a partir del primero mediante los siguientes pasos:



1. Una traslación definida por el vector desplazamiento $\vec{\delta}_P$ del punto P mediante la cual $P\vec{Q}$ pasa a $P'\vec{Q}_1$.
2. Un giro determinado por la matriz antisimétrica $[H]$ por el que $P'\vec{Q}_1$ pasa a $P'\vec{Q}_2$.
3. Una deformación definida por la matriz simétrica $[D]$ mediante la cual $P'\vec{Q}_2$ pasa finalmente a la posición $P'\vec{Q}'$.

Fijado el punto P, los dos primeros pasos, traslación y giro, son comunes para todos los puntos del entorno de *P*, por lo que no tienen influencia en la deformación propiamente dicha, ya que no se produce variación relativa alguna de las distancias entre las partículas del sólido. Es por ello que la deformación viene dada por la matriz $[D]$ que hemos denominado matriz (tensor) de deformación.

3.2.3. Tensor de pequeñas deformaciones

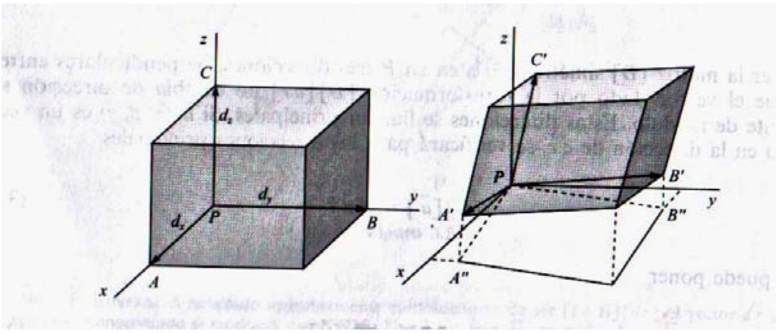
Como lo que nos interesa es averiguar la variación de la distancia entre el punto *P* y uno cualquiera *Q* de su entorno, nos centramos en la matriz de deformaciones. Si hacemos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

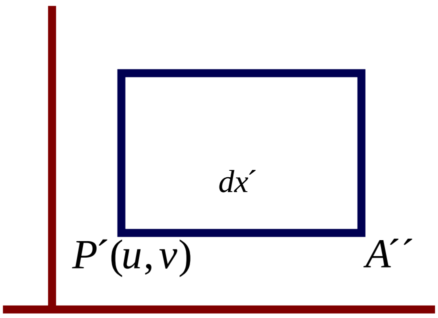
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

la matriz de deformación toma la forma:

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$



Los términos situados en la diagonal principal $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y ε_z indican las ***deformaciones longitudinales unitarias*** (por unidad de longitud) en las direcciones de los ejes coordenados. Se consideran positivas las deformaciones lineales que originan alargamientos en las aristas correspondientes. Por ejemplo, supongamos que solo los ejes paralelos al eje X aumentan su longitud:

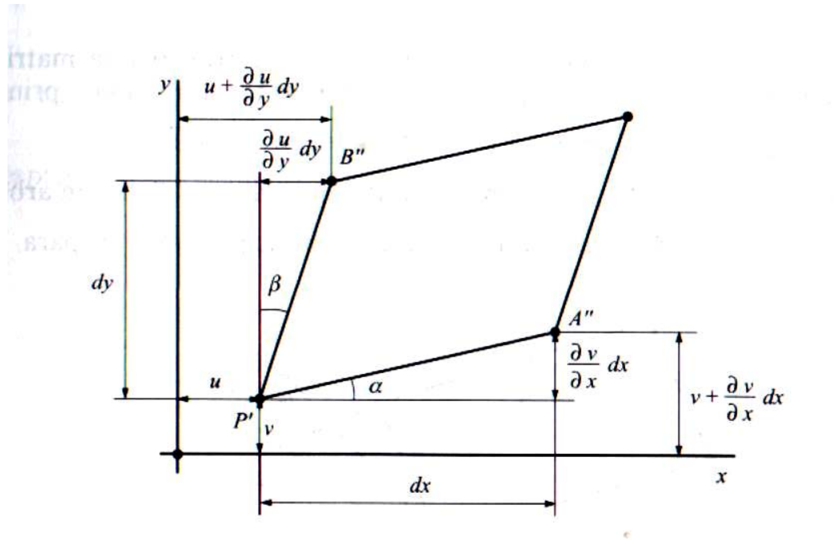


$$P(0,0) \Rightarrow P' \rightarrow (u, v)$$

$$A(0, dx) \Rightarrow A''(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v)$$

$$\varepsilon_x = \frac{(P'A'') - PA}{PA} = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

El término γ_{xy}:



$$tg\alpha = \alpha = \frac{\quad}{dx} = \frac{\quad}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \alpha + \beta$$

$$tg\beta = \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Los términos fuera de la diagonal principal representan las ***deformaciones angulares*** experimentadas por ángulos inicialmente rectos:

γ_{xy} : de lados paralelos a los ejes coordenados X e Y

γ_{xz} : de lados paralelos a los ejes coordenados X y Z

γ_{yz} : de lados paralelos a los ejes coordenados Y y Z

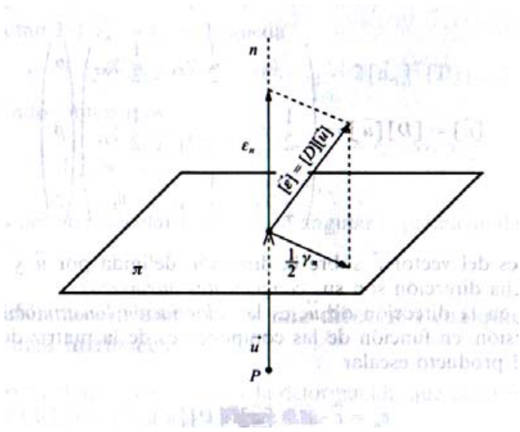
Si γ es positivo, el ángulo inicialmente recto correspondiente disminuye. En cambio, si es negativo, el ángulo aumenta.

3.2.4. Deformación unitaria en una dirección cualquiera

Hemos visto que la deformación que experimenta un vector $d\vec{r}$ viene dada por $[D]\cdot d\vec{r}$. Para calcular la deformación por unidad de longitud basta dividir por el módulo del vector:

$$\vec{\varepsilon} = [D]\cdot\frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = [D]\cdot\vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$. Al vector calculado de esta manera y que simbolizaremos por $\vec{\varepsilon}$ le llamaremos ***deformación unitaria*** en la dirección determinada por $d\vec{r}$. La proyección del vector $\vec{\varepsilon}$ sobre la dirección definida por $\vec{u}$ y sobre el plano perpendicular a dicha dirección constituyen sus ***componentes intrínsecas.***



La deformación longitudinal ε_n se obtiene proyectando $\vec{\varepsilon}$ sobre la dirección definida por $\vec{u}$, esto es, $\varepsilon_n = \vec{\varepsilon} \bullet \vec{u}$. A la deformación transversal la denotaremos por $\frac{\gamma_n}{2}$. Las componentes intrínsecas del vector deformación unitaria están relacionadas entre sí con el módulo del vector:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + (\frac{\gamma_n}{2})^2$$

Existe una analogía entre las tensiones, o fuerzas por unidad de superficie, y las deformaciones o desplazamientos por unidad de longitud. A cada superficie que pasa por un punto *O* de un sólido le corresponde un vector tensión y a cada elemento lineal que pasa por *O* le corresponde un vector deformación unitaria. Cada uno de los vectores puede escribirse en función de sus componentes intrínsecas:

$$\vec{t} \rightarrow \vec{\varepsilon}$$

$$[T] \rightarrow [D]$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

$$\sigma \rightarrow \varepsilon_n$$

$$\tau \rightarrow \frac{\gamma_n}{2}$$

3.2.5. Direcciones principales

Al ser la matriz de deformaciones una matriz simétrica, existen en *P* tres direcciones, perpendiculares entre sí, tales que el vector dado por la transformación $[D] \cdot d\vec{r}$ no cambia de dirección sino solamente de módulo, esto es las direcciones principales.

Las direcciones principales se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(\varepsilon_x - \varepsilon)\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\beta + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\gamma = 0$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy}\alpha + (\varepsilon_y - \varepsilon)\beta + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\gamma = 0$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz}\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\beta + (\varepsilon_z - \varepsilon)\gamma = 0$$

en el que ε toma los valores ε_1, ε_2 y ε_3, raíces de la ecuación característica:

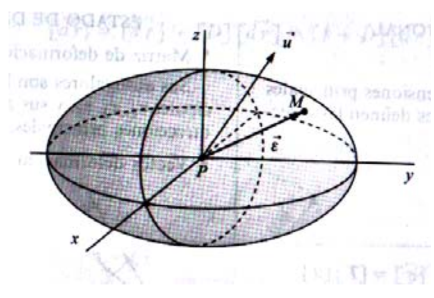
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los autovalores de la matriz de deformaciones y reciben el nombre de ***deformaciones principales.*** En el sistema de referencia coincidente con las direcciones principales la matriz diagonal que representa al tensor de deformaciones quedaría de la siguiente manera:

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

En el sistema de ejes principales se puede ver que el lugar geométrico de los extremos de todos los vectores deformación en el entorno de un punto P y que constituye el llamado ***elipsoide de deformaciones:***

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \varepsilon_1 \alpha \\ y &= \varepsilon_2 \beta \\ z &= \varepsilon_3 \gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{x^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{y^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3^2} = 1$$



De manera análoga a cómo se han obtenido en la matriz de tensiones, se deducen los siguientes invariantes para el tensor de deformaciones:

Invariante lineal o traza: $I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Veamos el significado físico del primer invariante de la matriz de deformación. Tomando como sistema de referencia uno coincidente con las direcciones principales, el volumen elemental $dV = dxdydz$ se transforma en un volumen $dV' = dx'dy'dz'$. Las deformaciones unitarias a lo largo de cada una de las direcciones principales:

$$\varepsilon_1 = \frac{d'x - dx}{dx} \Rightarrow d'x = (1+\varepsilon_1)dx$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d'y - dy}{dy} \Rightarrow d'y = (1+\varepsilon_2)dy$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d'z - dz}{dz} \Rightarrow d'z = (1+\varepsilon_3)dz$$

La deformación cúbica unitaria, *e*, la calculamos de la siguiente manera:

$$e = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{d'xd'yd'z - dxdydz}{dxdydz} = \frac{dxdydz\left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1\right]}{dxdydz} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Vemos que el primer invariante de la matriz de deformación nos da el valor de la ***dilatación cúbica unitaria.***

Invariante cuadrático: $I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{xz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$

Invariante cúbico: $I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$

Al igual que en el caso del tensor de tensiones, los tres invariantes están relacionados con el elipsoide de deformaciones. I_1 además es igual a la suma de los tres semiejes del elipsoide, I_2 es proporcional a la suma de las áreas de las tres elipses que intercepta el elipsoide con los planos principales y I_3 es proporcional al volumen del elipsoide de deformaciones.