TEMA 3.3

Mecánica del medio continuo:
El cuerpo elástico: ley de Hooke generalizada

3.3.1. Introducción

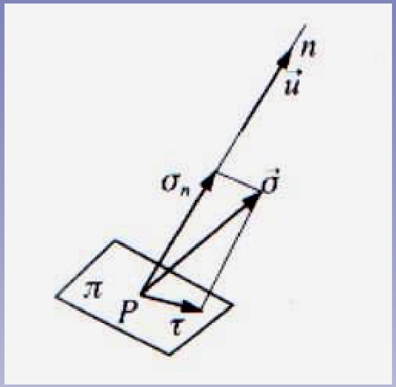
ESTUDIO DE LOS SÓLIDOS DEFORMABLES: efectos de las fuerzas aplicadas

MÉTODO DE ESTUDIO que hemos seguido:

1) las TENSIONES INTERIORES que se engendran en un punto

2) las DEFORMACIONES que se originan alrededor de un punto

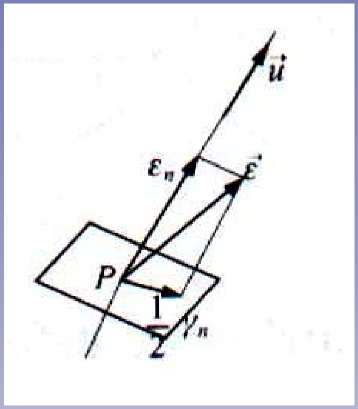
ESTADO TENSIONAL:



$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

ESTADO DE DEFORMACIÓN:



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = [D] \cdot \vec{u}$$

3.3.2. Sólido elástico

ESTADO TENSIONAL

ESTADO DE DEFORMACIÓN

CAUSA Y EFECTO:

NO SON INDEPENDIENTES

Ecuaciones que relacionan TENSIÓN-DEFORMACIÓN complejas:

- **dependientes de fuerzas de atracción molecular**
- **determinación experimental**

PEQUEÑAS DEFORMACIONES

Tensiones y deformaciones son proporcionales:

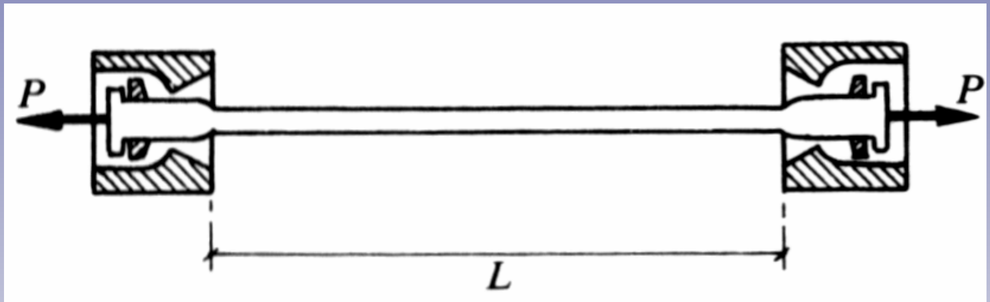
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO LINEAL

SÓLIDO ELÁSTICO:

- **una fuerza exterior lo deforma**
- **recupera su forma inicial al cesar la fuerza**

3.3.3. Diagrama esfuerzos-deformaciones

Medida experimental comportamiento mecánico:
ENSAYO DE TRACCIÓN



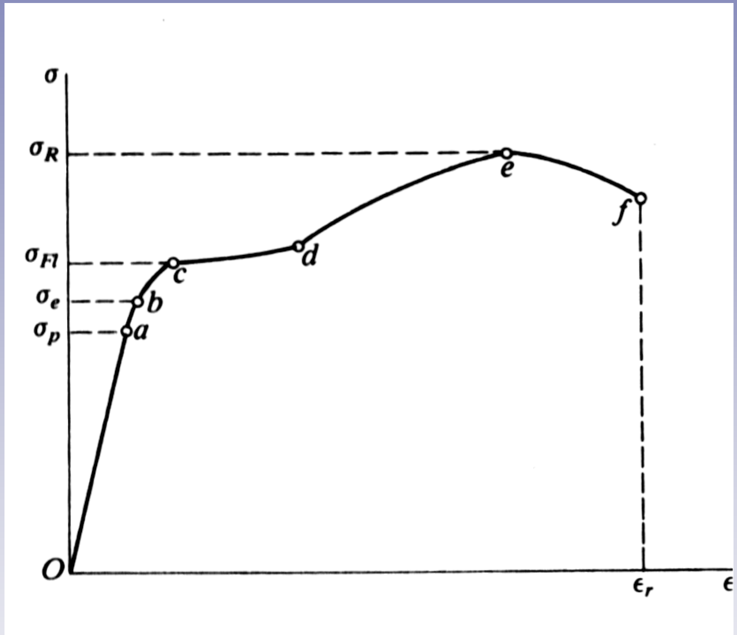
PROBETA: pieza recta, dimensiones normalizadas

S_0**: área transversal inicial,** L_0 **: longitud inicial**

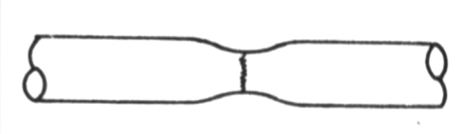
(F_i, L_i)

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S_0} \qquad \varepsilon_i = \frac{L_i - L_0}{L_0}$$

$(\sigma_i, \varepsilon_i)$: DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN



Zona plástica: estricción



1. *Oa* : ley de Hooke
   σ_P : límite de proporcionalidad

2. *ab* : elástico no lineal
   σ_e : límite elástico

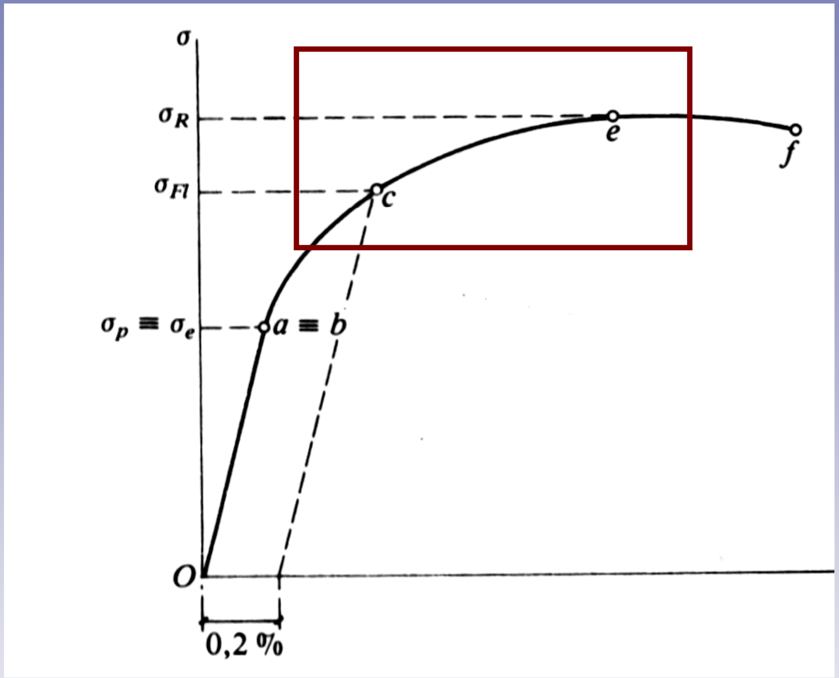
3. *bc* : deformación permanente
   σ_{Fl}: tensión de fluencia

4. *cd* : zona de fluencia

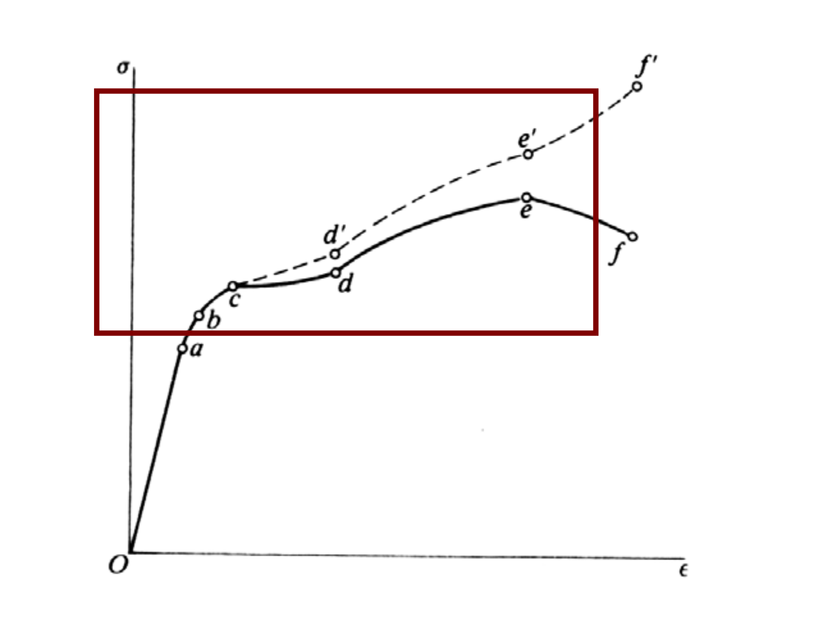
5. *de* : aumento de resistencia, acritud
   σ_R: tensión de rotura

6. *ef* : rotura
   ε_r : deformación de rotura

MATERIALES FRÁGILES:
la rotura aparece bruscamente



MATERIALES DÚCTILES

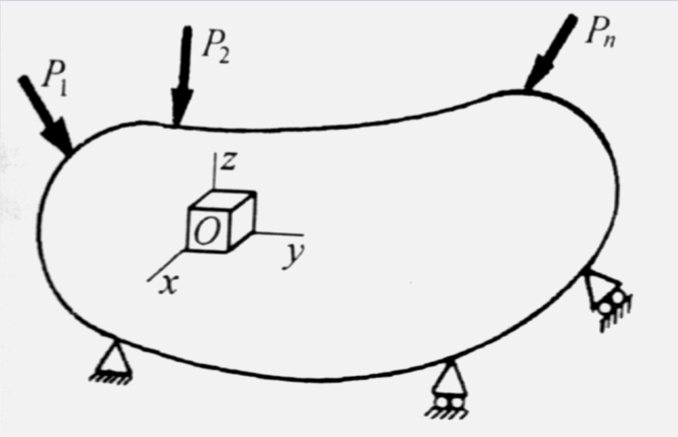


3.3.4. Ley de Hooke generalizada

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN O DE INDEPENDENCIA DE EFECTOS:

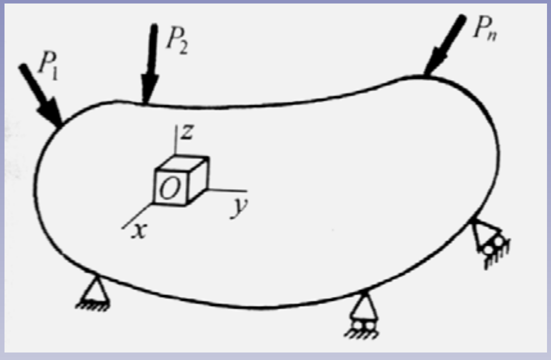
- efecto de un sistema de fuerzas: suma de efectos de fuerzas por separado

- tensiones, deformaciones: independiente orden de aplicación de fuerzas



PROPIEDADES DEL SÓLIDO ELÁSTICO :

- CONTINUIDAD
- ISOTROPÍA
- HOGOMENEIDAD



DEFORMACIÓN ε:

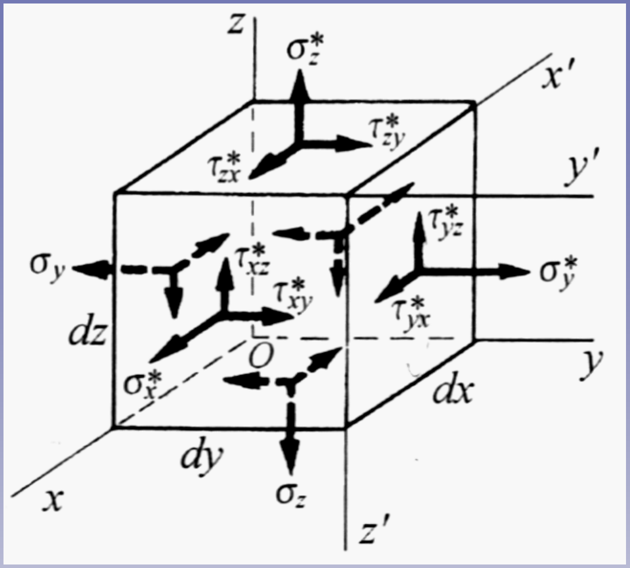
- suma de deformación debida a cada tensión

- sólido ISÓTROPO: deformación independiente de dirección (de 21 a 2 parámetros independientes)

SÓLIDO ELÁSTICO: relación entre componentes de tensor de tensiones y deformaciones

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$



TENSIÓN σ_x :

1) Alargamiento eje X:

$$\varepsilon_{x1} = K\sigma_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

2) Contracciones ejes Y y Z:

$$\varepsilon_{y1} = \varepsilon_{z1} = \upsilon\varepsilon_{x1} = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

TENSIÓN σ_y : $\varepsilon_{y2} = \dfrac{\sigma_y}{E}$ $\qquad \varepsilon_{x2} = \varepsilon_{z2} = -\upsilon\dfrac{\sigma_y}{E}$

TENSIÓN σ_z : $\varepsilon_{z3} = \dfrac{\sigma_z}{E}$ $\qquad \varepsilon_{x3} = \varepsilon_{y3} = -\upsilon\dfrac{\sigma_z}{E}$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

Deformación longitudinal eje X:

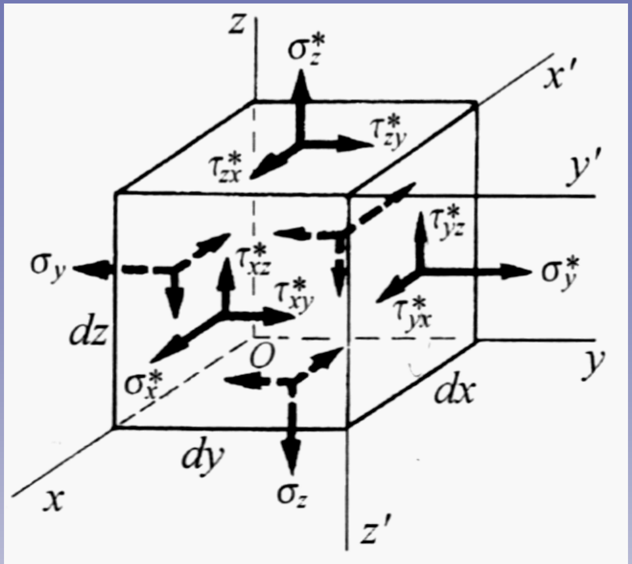
$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

Deformación longitudinal eje Y:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} + \varepsilon_{y3} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

Deformación longitudinal eje Z:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z1} + \varepsilon_{z2} + \varepsilon_{z3} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$



TENSIONES TANGENCIALES

$$\Downarrow$$

DEFORMACIONES ANGULARES

Ley de Hooke:

$$\gamma_{xy} = K'\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

G **: módulo de elasticidad transversal o módulo de rigidez**

LEY DE HOOKE generalizada para un cuerpo isótropo:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Sólido elástico:

EJES PRINCIPALES $\Rightarrow$ coincidentes para tensor de TENSIONES y de DEFORMACIONES

3.3.5. Ecuaciones de Lamé

Expresión de las tensiones en función de las deformaciones

Invariantes lineales o traza de los tensores de deformación y tensión:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Ecuaciones de Hooke para deformaciones longitudinales:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_3 - \sigma_x)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{E}\left[\sigma_z(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

Sumando las tres ecuaciones:

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)(1+\upsilon)-3\upsilon\sigma_3\right]=\frac{1}{E}\left[\sigma_3(1+\upsilon)-3\upsilon\sigma_3\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_3=\frac{1-2\upsilon}{E}\sigma_3}$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x(1+\upsilon)-\upsilon\sigma_3\right]\Rightarrow\ \sigma_x=\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_x=\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y(1+\upsilon)-\upsilon\sigma_3\right]\Rightarrow\ \sigma_y=\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_y=\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z(1+\upsilon)-\upsilon\sigma_3\right]\Rightarrow\ \sigma_x=\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_z=\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3+\frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_z$$

Se escriben de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_x \Rightarrow \quad \sigma_x = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_z$$

Coeficientes de Lamé:

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Para las tensiones cortantes:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \Rightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \Rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \Rightarrow \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

ECUACIONES DE LAMÉ PARA UN CUERPO ISÓTROPO:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

3.3.6. Tensiones y deformaciones de origen térmico

Cambio de forma:
DILATACIÓN

- **proceso reversible: dimensión original**
- **temperatura uniforme**

Sólido en forma de barra, para cualquier dimensión:

$$L_1 = L_0(1+\alpha_L \Delta T) \Rightarrow L_1 - L_0 = \Delta L = L_0 \alpha_L \Delta T$$

α_L

- **coeficiente de dilatación lineal**
- **característico del material**

CASO PARTICULAR (unidimensional):

a) DILATACIÓN LIBRE:

- DEFORMACIÓN LONGITUDINAL:

$$\varepsilon_{térmica} = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \alpha \Delta T$$

- TENSIÓN:

No se producen tensiones

b) DILATACIÓN NO LIBRE:

- DEFORMACIÓN LONGITUDINAL:

No se produce dilatación

- TENSIÓN:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma = -E\varepsilon_{térmica} \Rightarrow$$

$$\sigma = -E\alpha\Delta T$$

CASO GENERAL:

a) DILATACIÓN LIBRE:

- Deformaciones: sistema de fuerzas + dilatación térmica
- Cuerpo isótropo: dilatación térmica no produce variaciones angulares
- Estado tensional: sistema de fuerzas externas

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \Delta T) \Rightarrow (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xelástica} + \varepsilon_{xtérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yelástica} + \varepsilon_{ytérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zelástica} + \varepsilon_{ztérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_L \Delta T \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

CASO GENERAL:

a) DILATACIÓN NO LIBRE:

- Deformaciones: sistema de fuerzas + dilatación térmica + ligaduras
- Estado tensional: sistema de fuerzas + tensiones de constricción

$$(\varepsilon_x = 0, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \Delta T) \Rightarrow (\sigma'_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xelástica} + \varepsilon_{xtérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma'_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T = 0 \Rightarrow \exists \sigma'_x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yelástica} + \varepsilon_{ytérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zelástica} + \varepsilon_{ztérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

CASO GENERAL:

- se conocen las fuerzas exteriores

SOLUCIÓN:

- **TEORÍA DE LA ELASTICIDAD:** solución exacta en casos particulares

- **RESISTENCIA DE MATERIALES:** resolución utilizando métodos aproximados e hipótesis simplificadoras

TRACCIÓN Y FLEXIÓN