3.3. EL CUERPO ELÁSTICO. LEY DE HOOKE GENERALIZADA.

3.3.1. Introducción

Hasta ahora hemos estudiado el estado tensional creado en el interior de un sólido y por otro lado, el estado de deformación del mismo. El tratamiento de ambas cuestiones ha sido totalmente independiente. Sin embargo, dado que tensión y deformación son causa y efecto, debe estar relacionados entre sí. Para completar el estudio iniciado vamos a tratar de buscar la relación que existe entre ambas magnitudes.

La experiencia demuestra que dos elementos de idénticas geometrías sometidos a las mismas cargas, y por tanto, las mismas tensiones, sufren deformaciones distintas dependiendo del material del que estén fabricados. Es decir la tensión creada en el material depende de las fuerzas de atracción molecular, por tanto de su estructura interna. En consecuencia, la relación entre las tensiones y las deformaciones depende del material, y la única forma de determinarla es experimentalmente. En general, la formulación matemática de las teorías que relacionan tensiones y deformaciones en el sólido deformable conduce a ecuaciones de gran complejidad. Ello hace que la obtención de soluciones exactas quede restringida a casos muy particulares de forma geométrica y de tipos de fuerzas aplicadas. En el caso de sólidos de forma arbitraria resulta imposible soslayar esta dificultad, siendo necesario recurrir a métodos de resolución aproximados.

En el caso de pequeñas deformaciones, se comprueba que en la mayoría de los materiales, el proceso de deformación es reversible, hablándose de ***comportamiento elástico***. En este estado, tensiones y deformaciones son proporcionales entre sí, hablándose de ***comportamiento elástico lineal***. Para el caso del comportamiento elástico, la rama de la Mecánica de los sólidos que lo estudia se denomina ***Teoría de la Elasticidad***. Así pues, podemos establecer como objeto de la Teoría de la Elasticidad el estudio de los sólidos deformables con comportamiento elástico. El objetivo de este capítulo será encontrar la relación lineal entre los estados de tensiones y deformaciones**.**

En el caso de sólidos unidimensionales o bidimensionales, esto es, aquellos en los que existe preponderancia de algunas dimensiones frente a las demás, es posible establecer a priori hipótesis que simplifiquen dichas ecuaciones. Este es el planteamiento de la ***Resistencia de Materiales***, cuyo objeto de estudio son aquellos sólidos deformables que por sus características de forma geométrica y fuerzas a las que se encuentren sometidos, admitan hipótesis simplificativas en relación a sus estados de tensiones y deformaciones. No obstante, la Resistencia de Materiales permite establecer con suficiente aproximación las ecuaciones de comportamiento de los elementos constructivos básicos tales como vigas, columnas, arcos......

3.3.2. Sólido elástico

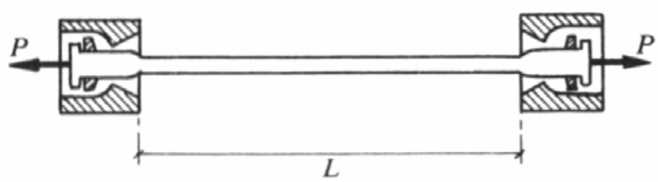
Podemos definir el ***sólido elástico*** como aquel que ante una fuerza exterior se deforma y recupera su forma primitiva al cesar la causa exterior. A los sólidos elásticos se les supone una serie de cualidades como son las de ***continuidad***, ***isotropía*** y ***hogomeneidad***. Como ya hemos visto, la propiedad de ***continuidad*** supone que no existen huecos entre partículas ni, por consiguiente, distancias intersticiales.

Se dice que un cuerpo es ***isótropo*** cuando sus propiedades físicas no dependen de la dirección en que se han medido en dicho cuerpo. El suponer el sólido elástico ***homogéneo*** equivale a considerar que una parte arbitraria del mismo posee idéntica composición y características que otra cualquiera. Estas dos propiedades suelen estar íntimamente unidas, pues si un cuerpo es igualmente elástico en cualquier dirección es de suponer que sea homogéneo.

Por otro lado, estas propiedades de isotropía, homogeneidad y continuidad no concurren en ningún material, ya sea natural o elaborado por el hombre. Por ejemplo, la propiedad de isotropía no se cumple exactamente en materiales fibrosos como la madera, ni en materiales formados por laminación. Tampoco es posible que se dé un grado de elasticidad igual en todas las direcciones debido a la distribución de átomos o moléculas en el material. A pesar de ello, los resultados que se obtienen con esta hipótesis son satisfactorios en la mayoría de los casos.

3.3.3. Diagrama esfuerzos – deformaciones

Ya hemos comentado en la introducción que la relación entre las tensiones y las deformaciones depende del material, y la única forma de determinarla es experimentalmente.¿Qué ensayos se realizan para caracterizar el comportamiento mecánico de un material? El ensayo más utilizado para determinar la relación entre tensiones y deformaciones en un material es el ***ensayo de tracción***.



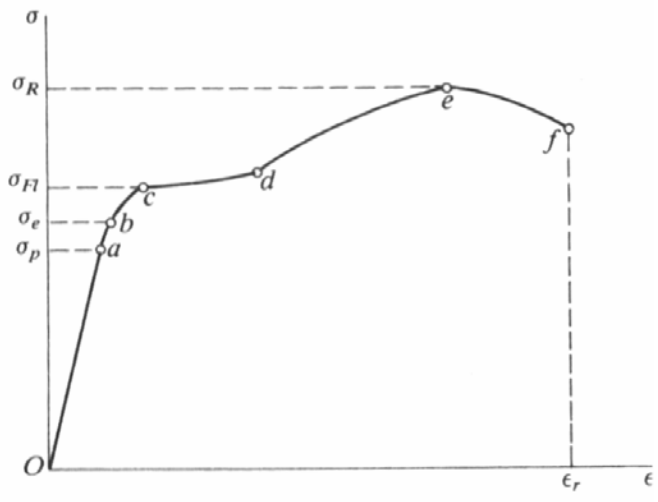
Se realiza este ensayo sobre una pieza recta de dimensiones normalizadas llamada probeta en la que el área transversal S_0 y la longitud L_0 de la parte central han sido determinadas con precisión. Durante el ensayo, una máquina de pruebas somete a la probeta a una carga de tracción pura F cuyo valor va aumentando progresivamente hasta que se produce la fractura. Al ir aumentando la carga, la probeta va alargándose y la parte central pasa a medir una longitud, L, cada vez mayor. La máquina está provista de sensores para saber en todo instante el valor de L. Cada cierto intervalo de tiempo se va registrando simultáneamente la pareja de valores (F_i, L_i) donde F_i es la carga aplicada y L_i la longitud medida en ese instante. Esta fuerza F_i causa en el interior del material un estado de tensiones que supondremos uniforme para cualquier sección recta. Conocido el valor de F_i se puede determinar el módulo de la tensión normal en un punto cualquiera en ese instante:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S_0}$$

Igualmente, dada la longitud L_i se determinar el alargamiento unitario en el sentido longitudinal:

$$\varepsilon_i = \frac{L_i - L_0}{L_0}$$

Con las parejas de valores $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ obtenidas a lo largo del ensayo, se traza el ***diagrama esfuerzo-deformación*** que encierra información importante sobre su comportamiento mecánico.



¿Qué datos pueden extraerse de la curva del ensayo de tracción?

El tramo inicial *Oa* del diagrama es lineal, lo que indica una proporcionalidad directa entre tensiones y deformaciones que establece la ley de Hooke. Esta ley es válida mientras las tensiones sean inferiores a un cierto valor σ_P llamado ***límite de proporcionalidad.***

La ley de Hooke, enunciada en 1678 por Robert Hooke establece que los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas que los originan. Un punto cualquiera *O* experimenta un desplazamiento $\vec{OO'}$, cuya componente *u* según el eje *X*, según la ley de Hooke se relaciona con la carga:

$$u = kP$$

siendo *k* el coeficiente de proporcionalidad dependiente de las propiedades físicas del material.

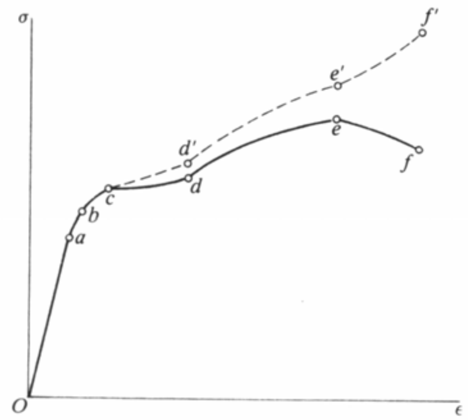
A partir del punto *a* al aumentar la carga el diagrama adquiere una cierta curvatura. A pesar de ello, las propiedades elásticas del material se mantienen hasta que las tensiones alcanzar un valor σ_e llamado ***límite elástico***. ***El límite elástico es el máximo esfuerzo que se puede alcanzar sin que se produzcan deformaciones permanentes en la probeta.***

Si se aumenta la carga a partir del punto *b*, el diagrama continúa curvándose hasta llegar al punto c al que corresponde la ***tensión de fluencia*** σ_{Fl}. A partir del punto *c*, las deformaciones crecen rápidamente sin apenas aumentar la carga hasta llegar al punto *d* en el que finaliza la ***zona de fluencia cd***. En esta zona la probeta experimenta importantes deformaciones que producen a partir del punto *d* un aumento de la resistencia del material conocido por ***acritud***. Esta propiedad hace que sea preciso incrementar de nuevo la carga para que las deformaciones continúen, hasta llegar al punto e en el que la carga alcanza su valor máximo al que corresponde el máximo esfuerzo σ_R, o ***esfuerzo de rotura***.

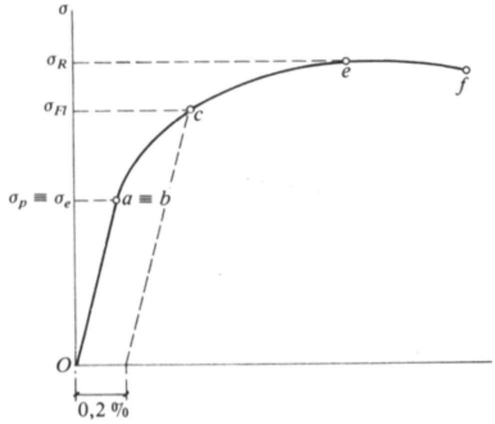
Hasta llegar al punto *d* la probeta se ha alargado uniformemente en toda su longitud y este alargamiento uniforme ha ido acompañado de una contracción lateral también uniforme. A partir del punto *d*, el alargamiento y la contracción lateral se localizan en las proximidades de una sección de la probeta en la que posteriormente se producirá la rotura. Este fenómeno conocido por ***estricción*** se manifiesta de forma poco destacada en un gran número de materiales.

Una vez alcanzado el punto *e* la rotura de la probeta es irreversible alcanzando la deformación en el punto *f* su máximo valor o deformación de rotura ε_R. El tramo final *df* del diagrama en el que se producen las grandes deformaciones de la probeta constituye la ***zona plástica***.

El diagrama esfuerzos-deformaciones representa los esfuerzos reales en la probeta únicamente mientras las deformaciones son pequeñas. Cuando las deformaciones son elevadas, debe tenerse en cuenta la reducción de la sección transversal de la probeta.



Por otro lado, los diagramas esfuerzos-deformaciones considerados hasta ahora corresponden a materiales ***dúctiles*** como el acero, el aluminio y el cobre, que se caracterizan por una rotura precedida de grandes deformaciones. Existen otros materiales como el hormigón y el vidrio que no presentan una zona de fluencia definida. En estos materiales llamados ***frágiles***, la rotura aparece bruscamente sin previo aviso, lo que es un grave inconveniente para las estructuras.



3.3.3. Relación entre esfuerzos y deformaciones

a) Ley de Hooke generalizada para sólidos isótropos

En la zona elástica la ley de Hooke establece la proporcionalidad que existe entre tensiones y deformaciones, esta ley nos permite extender esta relación de proporcionalidad entre las componentes del tensor de deformaciones y del tensor de tensiones lo que constituye la ***ley de Hooke generalizada***. Los coeficientes de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones que nos van a aparecer son constantes físicas del material y no dependen de las particularidades geométricas del cuerpo.

Consideremos un paralelepípedo elemental sobre cuyas caras actúan tensiones normales y cortantes o tangenciales. Para estudiar la deformación del paralelepípedo debida a la acción de las tensiones, utilizaremos el ***principio de superposición o principio de independencia de efectos.*** Este principio establece que los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo es igual a la suma de los efectos que originan esas mismas fuerzas actuando por separado y en consecuencia los desplazamientos, las tensiones y las deformaciones originadas por un sistemas de fuerzas aplicadas son independientes de su orden de aplicación. De esta manera, por ejemplo, los desplazamientos que se producen son la suma de los desplazamientos que origina cada fuerza actuando por separado. Este principio es válido solo cuando se verifica la ley de Hooke.

En el caso del paralelepípedo elemental la deformación la calcularemos sumando las deformaciones producidas por las tensiones actuando por separado, estas deformaciones serán independientes de la orientación de los ejes a causa de la isotropía del material.

Nota:

En el caso más general de un sólido anisótropo existe una relación lineal entre cada componente del tensor de deformaciones y todas las componentes del tensor de tensiones. El tensor de constantes elásticas tiene 81 componentes. Estas componentes se reducen a 36 debido a la simetría de los tensores de tensión y deformación. La simetría del tensor de constantes elásticas convierte el número de constantes independientes para le sólido anisótropo en 21. En el caso del sólido isótropo bastan sólo dos parámetros independientes para establecer la relación entre tensiones y deformaciones.

Las tensiones normales σ_x actuando sobre dos caras opuestas provocan deformaciones lineales según las aristas del paralelepípedo. De acuerdo con la ley de Hooke, estas deformaciones lineales serán proporcionales a dichas tensiones σ_x :

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E}$$

siendo E el ***módulo de elasticidad longitudinal*** o simplemente ***módulo de elasticidad*** que es una constante física del material que se determina experimentalmente. Las dimensiones de E son $M \cdot L^{-2}$. Este alargamiento longitudinal unitario ε_{x1} va acompañado de contracciones laterales unitarias ε_{y1} y ε_{z1} proporcionales a ε_{x1} :

$$\varepsilon_{y1} = -\upsilon \varepsilon_{x1} = -\upsilon \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{z1} = -\upsilon\varepsilon_{x1} = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

siendo υ un coeficiente de proporcionalidad adimensional llamado ***coeficiente de Poisson***. Es una constante física del material de valor comprendido entre 0,25 y 0,35 para los metales.

De manera análoga, las tensiones σ_y y σ_z producen respectivamente las siguientes deformaciones lineales:

$$\varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_{z2} = \varepsilon_{x2} = -\upsilon\frac{\sigma_y}{E}$$

y

$$\varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_{x3} = \varepsilon_{y3} = -\upsilon\frac{\sigma_z}{E}$$

Según el principio de superposición, la deformación lineal según el eje X, debida a los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z será $\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3}$ y de manera análoga se calculan ε_y y ε_z:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Por otro lado, las tensiones tangenciales o cortantes τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx} originan las deformaciones angulares γ_{xy}, γ_{yz} y γ_{zx} respectivamente transformando el paralelepípedo recto elemental en uno oblicuo. Según la ley de Hooke podemos escribir:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

siendo *G* el ***módulo de elasticidad transversal o módulo de rígidez***, que es una constante física del material que tiene las dimensiones $M \cdot L^{-2}$. El módulo de elasticidad transversal *G* se demuestra que se puede escribir en función de *E* y υ de la siguiente manera:

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Las tensiones tangenciales τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx} y las deformaciones angulares γ_{xy}, γ_{yz} y γ_{zx} se anulan para el mismo sistema de referencia. Por consiguiente, ***en un cuerpo isótropo los ejes principales del estado de esfuerzos y del estado de deformaciones coinciden.***

Las seis ecuaciones deducidas:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

constituyen ***las leyes de Hooke generalizadas*** para cuerpo isótropo en la zona de elasticidad lineal y con las condiciones de continuidad y homogeneidad establecidas.

b) Ecuaciones de Lamé

Las leyes de Hooke generalizadas expresan las deformaciones en función de las tensiones. Obtengamos ahora las fórmulas inversas, es decir, las expresiones de las tensiones en función de las deformaciones. Si denotamos por ε_3 y σ_3 a los invariantes lineales o traza de los tensores de deformaciones y tensiones:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Las ecuaciones de Hooke generalizadas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_3 - \sigma_x)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{E}\left[\sigma_z(1+\upsilon) - \upsilon\sigma_3\right]$$

Sumando estas tres ecuaciones miembro a miembro:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1+\upsilon) - 3\upsilon\sigma_3\right] = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1+\upsilon) - 3\upsilon\sigma_3\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_3(1+\upsilon) - 3\upsilon\sigma_3\right]$$

Obteniendo la siguiente relación:

$$\varepsilon_3 = \frac{1-2\upsilon}{E}\sigma_3$$

Despejando de estas ecuaciones las tensiones normales se tiene:

$$\sigma_x = \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_x = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_y = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_y$$

$$\sigma_x = \frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_z = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\varepsilon_3 + \frac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_z$$

Ecuaciones que podemos escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_z$$

siendo λ y μ los ***coeficientes de Lamé*** definidos por:

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Estas tres ecuaciones junto con las tensiones tangenciales despejadas constituyen las llamadas ***ecuaciones de Lamé***:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_x = \lambda\varepsilon_3 + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\varepsilon_3 + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_z = \lambda\varepsilon_3 + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

De estas ecuaciones se deduce que las componentes de la matriz de tensiones se pueden expresar, dentro del campo elástico, como funciones lineales de las deformaciones: las tensiones normales, en función de las deformaciones longitudinales unitarias y las tensiones cortantes, en función de las deformaciones transversales.

3.3.4. Deformaciones y tensiones de origen térmico

En general, un cuerpo al calentarlo se dilata y este fenómeno es reversible, es decir cuando se enfría y vuelve a la temperatura primitiva, recupera las dimensiones que tenía inicialmente. Vamos a tratar solo el caso en el que en todo el material la temperatura es uniforme.

Consideremos un sólido en forma de barra, la longitud de cualquiera de sus dimensiones experimenta una variación dada por la ecuación:

$$L_1 = L_0(1+\alpha_L \Delta T) \Rightarrow L_1 - L_0 = \Delta L = L_0 \alpha_L \Delta T$$

siendo α_L el ***coeficiente de dilatación lineal*** y que es una característica física del material.

De forma análoga a como hemos hecho con las deformaciones producidas por fuerzas, podemos definir una deformación unitaria de la barra únicamente a efectos térmicos de la forma:

$$\varepsilon_{térmica} = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \alpha \Delta T$$

Esta variación de las dimensiones iniciales no producirá tensión alguna si no hay ninguna causa que impida la libre dilatación. Pero sí se pueden producir tensiones en la pieza si la deformación se ve impedida total o parcialmente.

Supongamos una viga con dos apoyos fijos, en este caso la dilatación no es libre. El sistema queda en una situación equivalente a haber dejado libre la dilatación ΔL y haber aplicado a continuación una fuerza de tracción o compresión (de compresión, en nuestro caso) de valor tal que la deformación producida sea precisamente ΔL. Ahora sí existen tensiones en la viga, que llamaremos ***tensiones térmicas o tensiones de origen térmico***. Por la ley de Hooke, en la barra se creará una tensión normal dada por la ecuación:

$$\sigma = -E\varepsilon_{térmica} = -E\alpha \Delta T$$

Consideremos ahora el caso general de un sólido isótropo y homogéneo sometido a una variación térmica uniforme ΔT, si no se impide la dilatación el estado tensional no varía. Sin embargo, si se modifica la matriz de deformación, pues habrá que sumar a las deformaciones longitudinales el término $\varepsilon_{térmica} = \alpha_L \Delta T$ debido a la deformación por dilatación térmica. Al tratarse de un material isótropo el coeficiente de dilatación térmica α_L no depende de la dirección por lo que sumamos el mismo término a todas las deformaciones longitudinales unitarias. Por otro lado las deformaciones angulares son debidas exclusivamente a las tensiones tangenciales ya que la deformación de origen térmico, al ser el cuerpo isótropo no produce variaciones angulares. Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones de la ley de Hooke generalizada incluyendo la deformación debido a una variación de temperatura quedarían de la forma:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xelástica} + \varepsilon_{xtérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yelástica} + \varepsilon_{ytérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zelástica} + \varepsilon_{ztérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Si se impidiese la dilatación si habría que tener en cuenta las tensiones térmicas o también llamadas tensiones de constricción. El cálculo de estas tensiones se calcula imponiendo que las deformaciones debidas a la acción simultánea del sistema de fuerzas aplicado y las variaciones térmicas son nulas. Las ecuaciones a resolver dependerían del caso particular considerado. El estado tensional se obtiene como superposición de las debidas al sistema de fuerzas aplicado y las tensiones de constricciones obtenidas de imponer las ligaduras correspondientes. Por ejemplo:

$$(\varepsilon_x = 0, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \Delta T) \Rightarrow (\sigma_x', \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xelástica} + \varepsilon_{xtérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x' - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T = 0 \Rightarrow \sigma_x'$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yelástica} + \varepsilon_{ytérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zelástica} + \varepsilon_{ztérmica} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha_L \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$