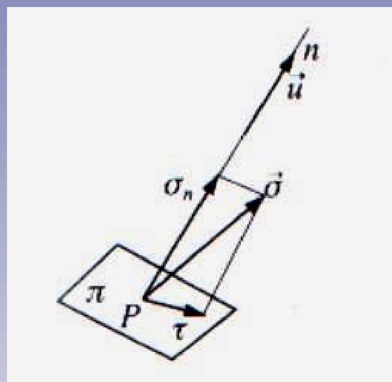
TEMA 3.4
Tracción y Flexion

3.4.1. Introducción

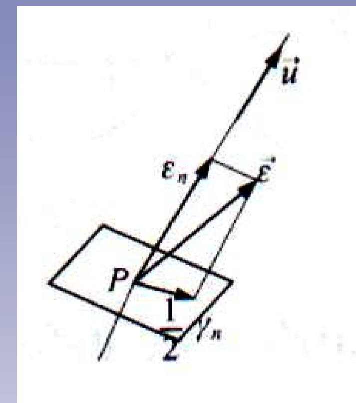
ESTADO TENSIONAL:



$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = T \cdot \vec{u}$$

ESTADO DE DEFORMACIÓN:



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = [D] \cdot \vec{u}$$

ECUACIONES DE HOOKE:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

ECUACIONES DE LAMÉ:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_3 + 2\mu\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

CASO GENERAL:

- se conocen las fuerzas exteriores

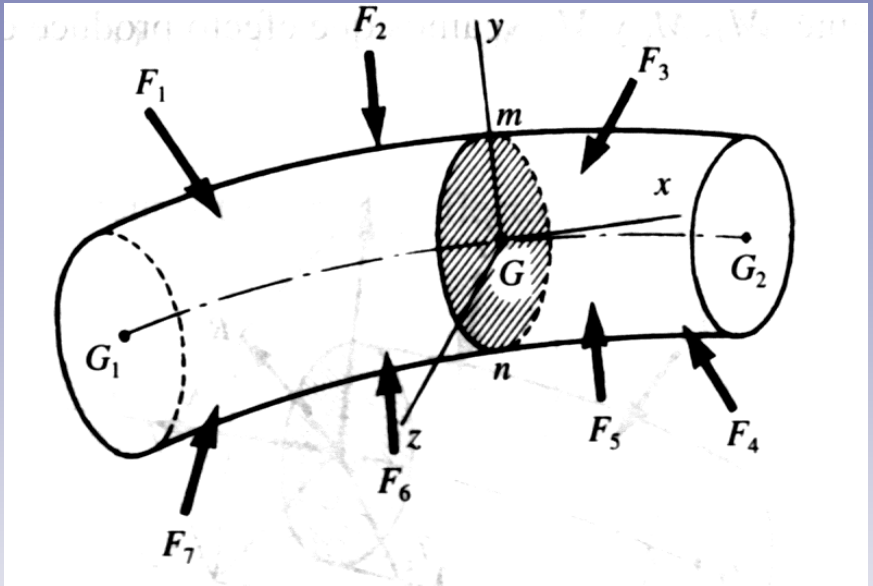
SOLUCIÓN:

- TEORÍA DE LA ELASTICIDAD: solución exacta en casos particulares

- RESISTENCIA DE MATERIALES: resolución utilizando métodos aproximados e hipótesis simplificadoras

TRACCIÓN Y FLEXIÓN

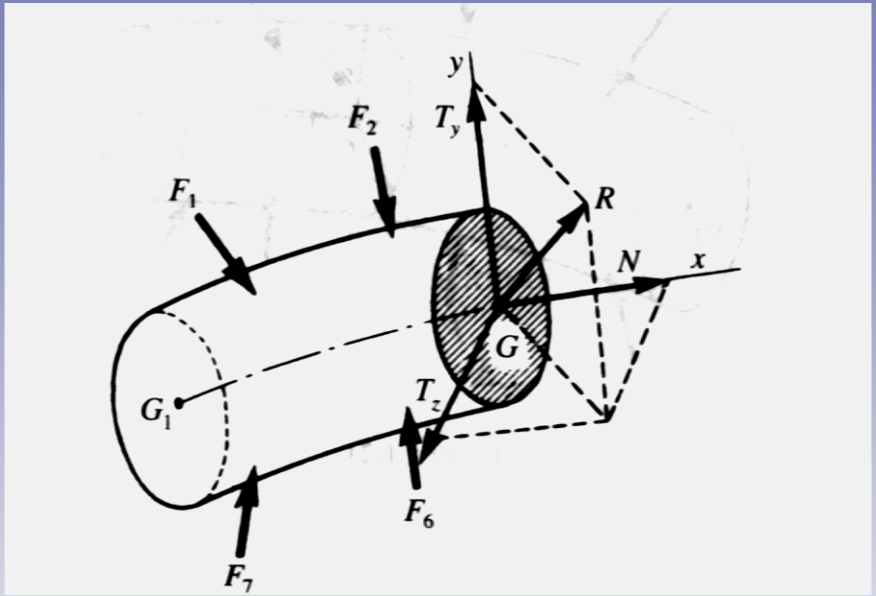
PRISMA MECÁNICO EN EQUILIBRIO ESTÁTICO:



SECCIÓN *mn*: plana, contenida en plano normal a línea media del prisma

EQUILIBRIO: acción parte eliminada: $\vec{R}, \vec{M}$

COMPONENTES DE LA FUERZA RESULTANTE $\vec{R}$:



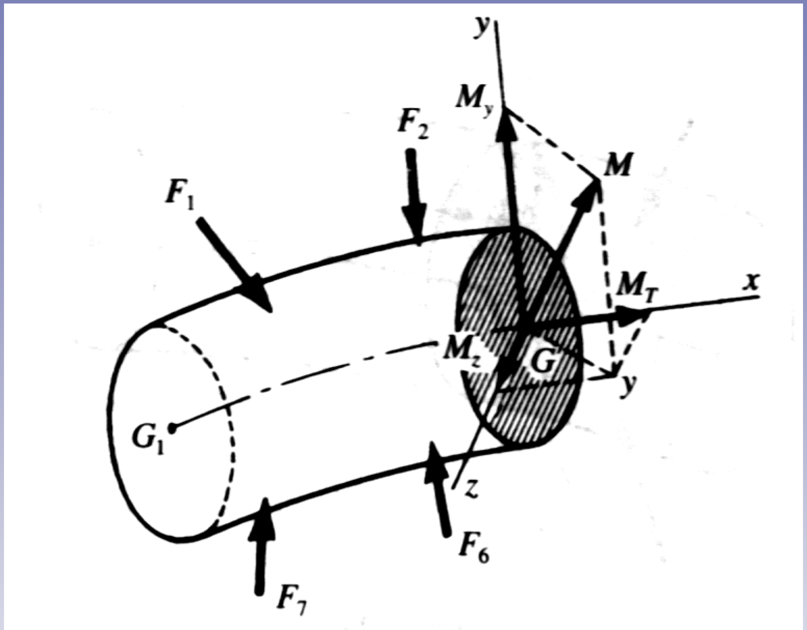
Aplicada en el centro de gravedad G de la sección:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N\vec{i} + T_y\vec{j} + T_z\vec{k}$$

$\vec{N}$: **separa ambas partes del prisma**

$\vec{T}$: **desliza la sección respecto de una próxima**

COMPONENTES DEL MOMENTO RESULTANTE $\vec{M}$:



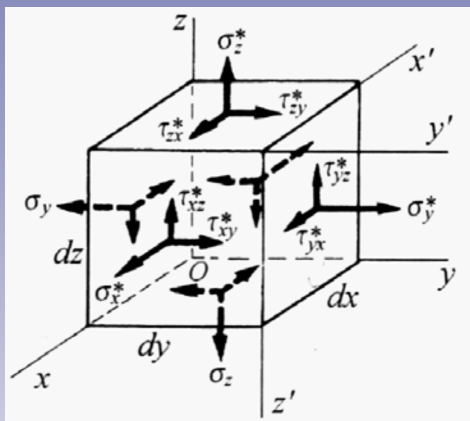
Aplicado en el centro de gravedad G de la sección:

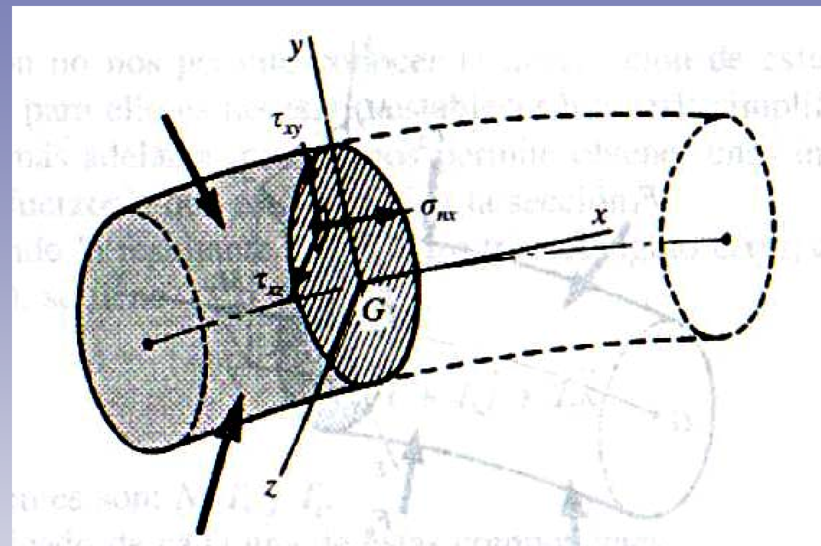
$$\vec{M} = M_T\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

M_T : **momento TORSOR, giro sobre sí mismo**

$\vec{M}_F = M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$: **momento FLECTOR, giro lateral en XZ y XY**

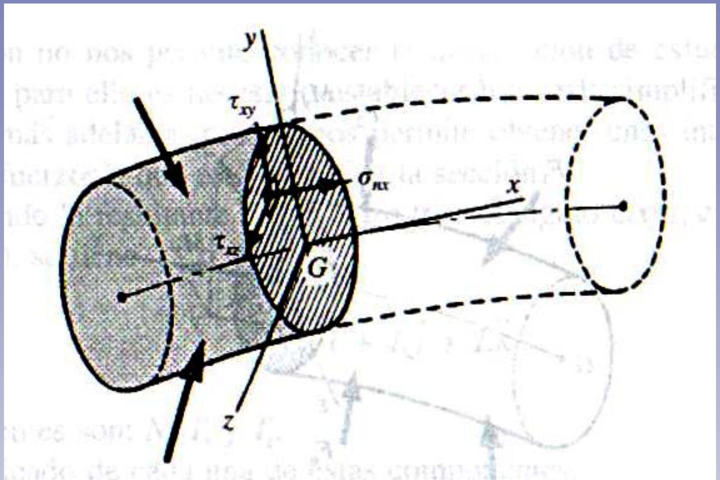
Relación entre $\vec{R}$ y $\vec{M}$ y las componentes de la matriz de tensiones:





$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x d\Omega \qquad T_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \qquad T_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega$$

Relación entre $\vec{R}$ y $\vec{M}$ y las componentes de la matriz de tensiones:



$$\vec{M} = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ \sigma_x d\Omega & \tau_{xy} d\Omega & \tau_{xz} d\Omega \end{vmatrix} =$$

$$= M_T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$M_y = \iint_{\Omega} \sigma_x z d\Omega$$

$$M_T = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega$$

$$M_z = \iint_{\Omega} \sigma_x y d\Omega$$

3.4.2.Solicitaciones exteriores sobre un prisma mecánico

FUERZAS Y MOMENTOS: 1) CARGAS: aplicadas directamente

2) REACCIONES

CLASIFICACIÓN DE CARGAS:

- FUERZAS DE VOLUMEN: sobre todos los puntos, fuerza gravitatoria

- FUERZAS DE SUPERFICIE: superficie exterior, concentradas o distribuidas

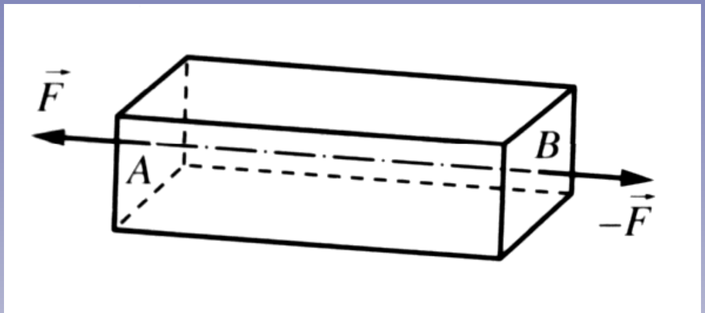
- CARGAS PERMANENTES: existen siempre, peso, techos, pavimentos..

- CARGAS ACCIDENTALES O SOBRECARGAS: personas, muebles, máquinas, vehículos, variaciones térmicas, acciones sísmicas...

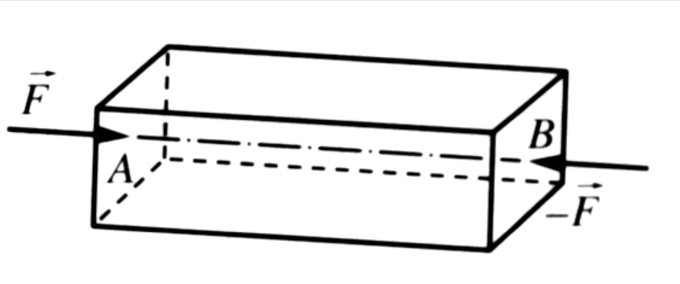
- CARGAS ESTÁTICAS: no varían módulo, punto de aplicación o dirección

- CARGAS DINÁMICAS: varían con el tiempo, vibraciones de las estructuras

TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

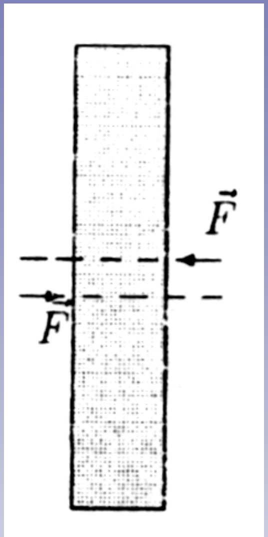


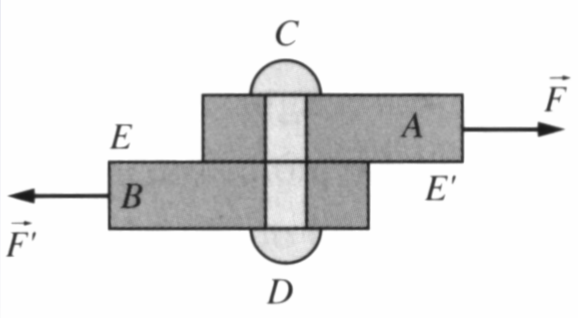
Cables….



Columnas y pilares…..

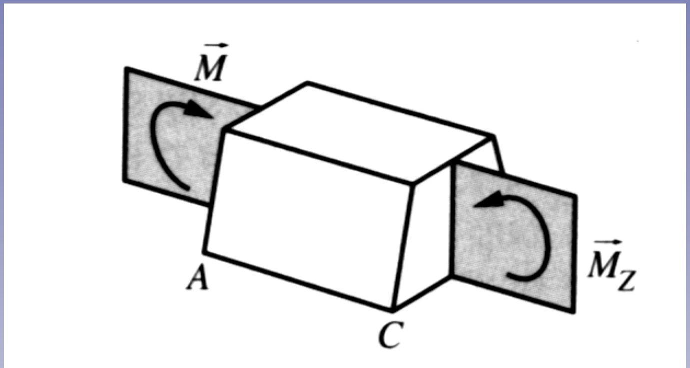
CORTANTE

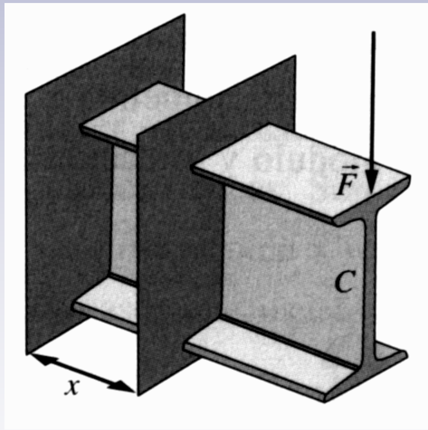




Conexiones atornilladas y remachadas..

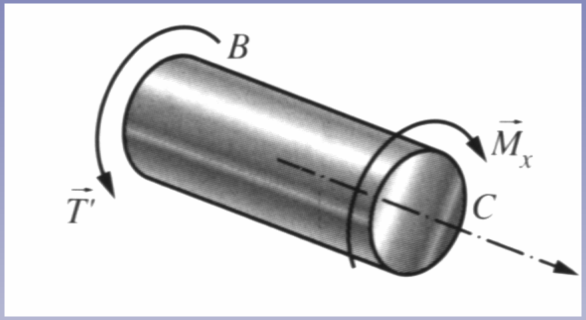
FLEXIÓN

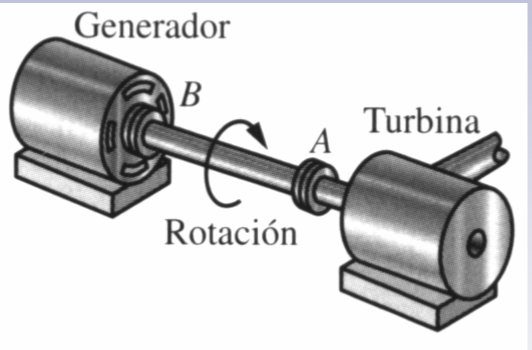




Tuberías, vigas….

TORSIÓN



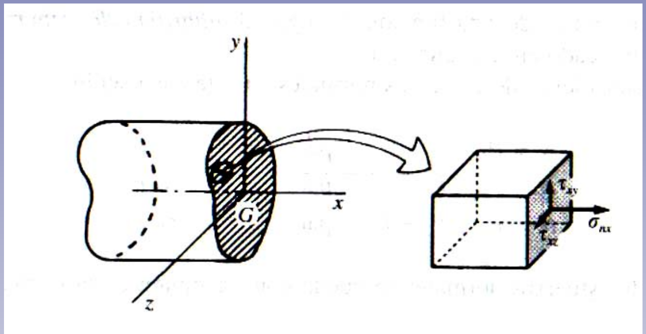


Ejes de transmisión….

3.4.3. Tracción y compresión

TRACCIÓN O COMPRESIÓN MONOAXIAL:

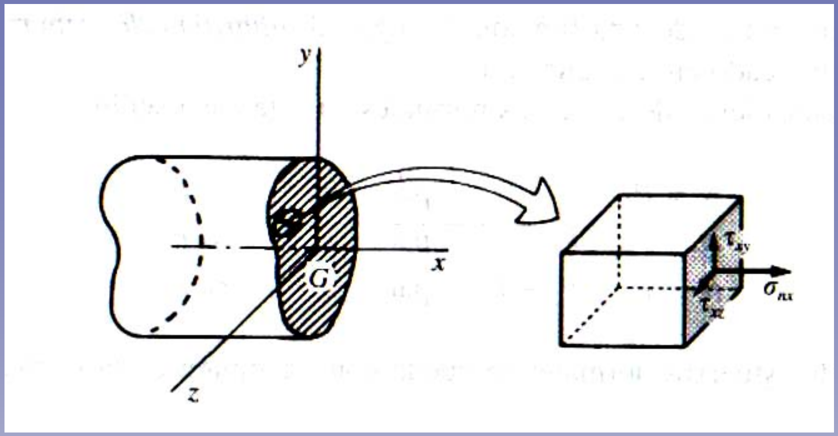
en cada sección solo actúa el esfuerzo normal N



$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x d\Omega \qquad T_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \qquad T_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega$$

$$M_T = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega \qquad M_y = \iint_{\Omega} \sigma_x z d\Omega$$

$$M_z = \iint_{\Omega} \sigma_x y d\Omega$$



$$\iint_{\Omega} \sigma_x \, dydz = N$$

$$\iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \, dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} \tau_{xy} \, dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} \sigma_x \, y \, dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} \tau_{xz} \, dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} \sigma_x \, z \, dydz = 0$$

HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVA:
Hipótesis de Bernoulli o de conservación de las secciones planas

- **secciones transversales: planas y perpendiculares a la línea media después de la deformación**

- **hipótesis comprobada experimentalmente**

$$\iint_{\Omega} \sigma_x \, dydz = N \Rightarrow \sigma_x \iint_{\Omega} dydz = N \Rightarrow \sigma_x = \frac{N}{\Omega}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

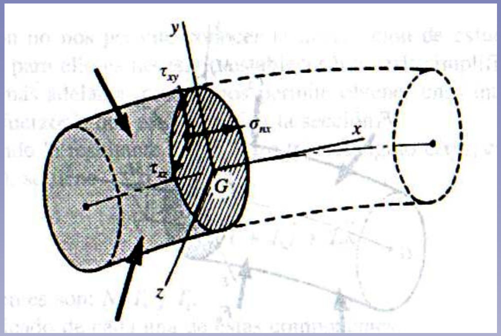
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

EJES PRINCIPALES:

- ejes contenidos en el plano de la sección
- eje del prisma



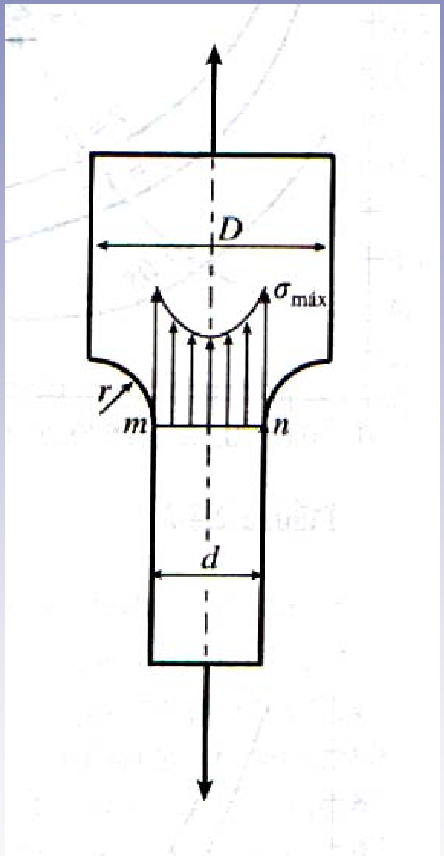
TENSIONES PRINCIPALES:

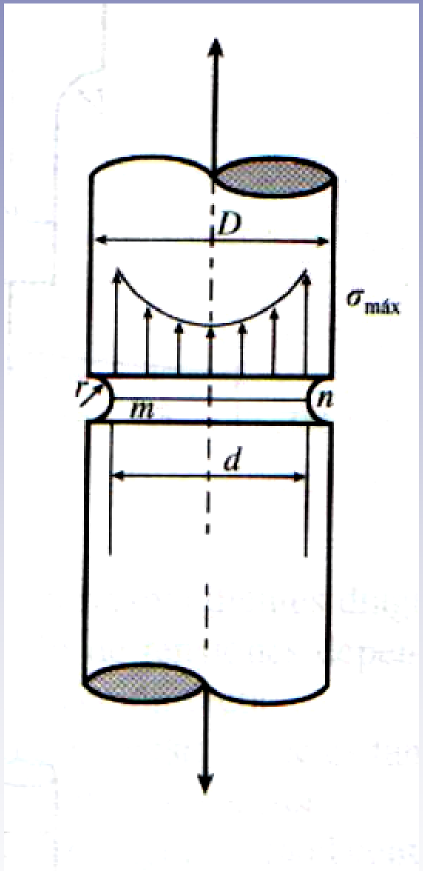
$$\sigma_1 = \frac{N}{\Omega} \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DEFORMACIONES:

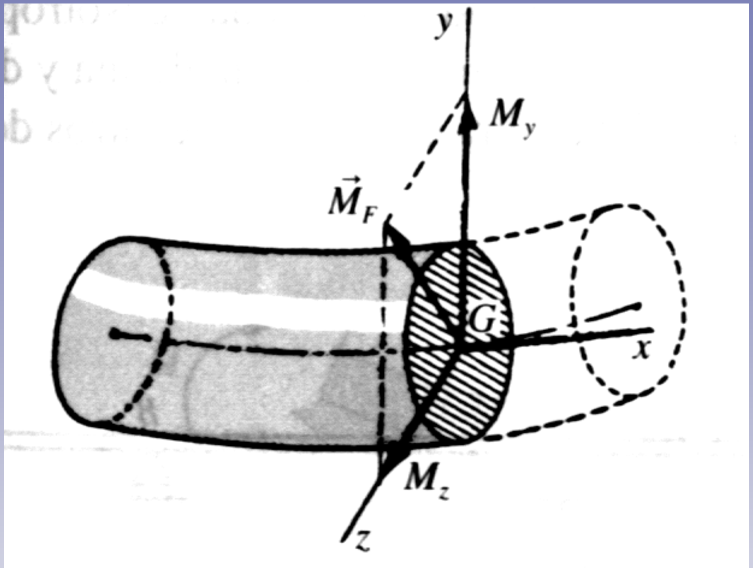
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\upsilon \sigma_x}{E} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

TEOREMA DE BERNOULLI: no es aplicable en secciones próximas a variaciones de Área. En ese caso, TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.





3.4.4. Flexión pura



FLEXIÓN PURA:

en toda sección recta:

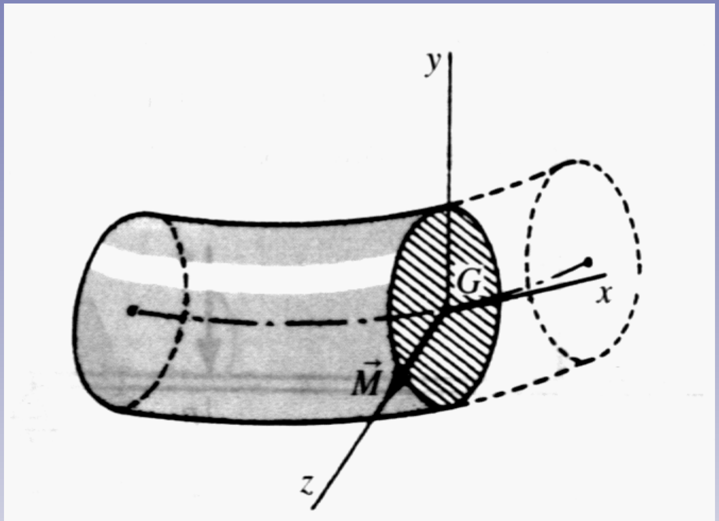
- resultante nula de fuerzas

- momento contenido en plano de la sección

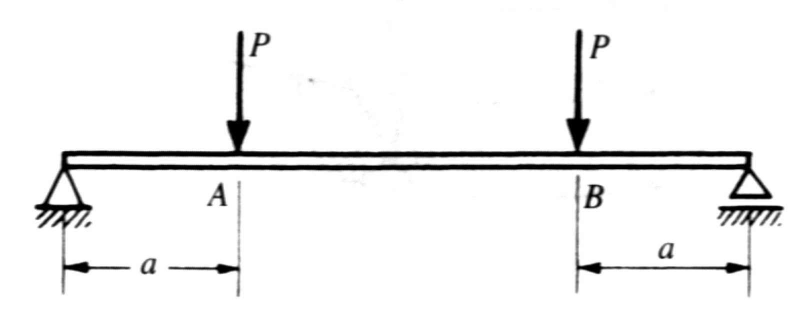
FLEXIÓN PURA ASIMÉTRICA: M_F componentes según dos ejes principales de inercia de la sección

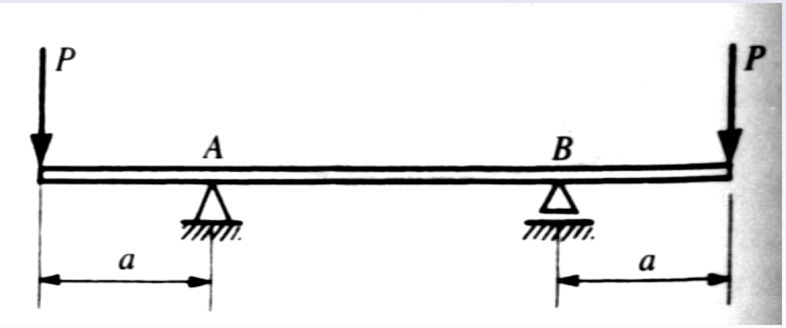
FLEXIÓN PURA SIMÉTRICA: M_F según un eje principal de inercia

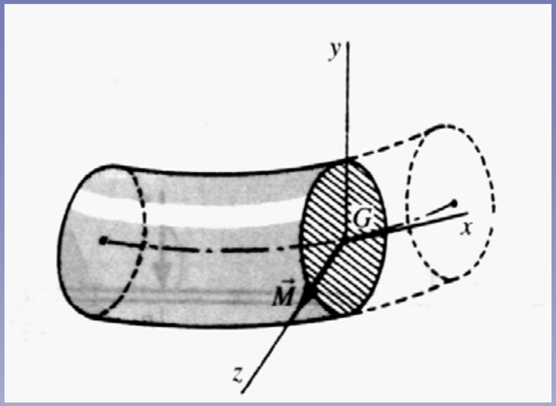
FLEXIÓN PURA SIMÉTRICA:



TRAMOS AB DE LAS SIGUIENTES VIGAS:







$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x d\Omega \qquad T_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \qquad T_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega$$

$$M_T = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega \qquad M_z = \iint_{\Omega} \sigma_x y d\Omega$$

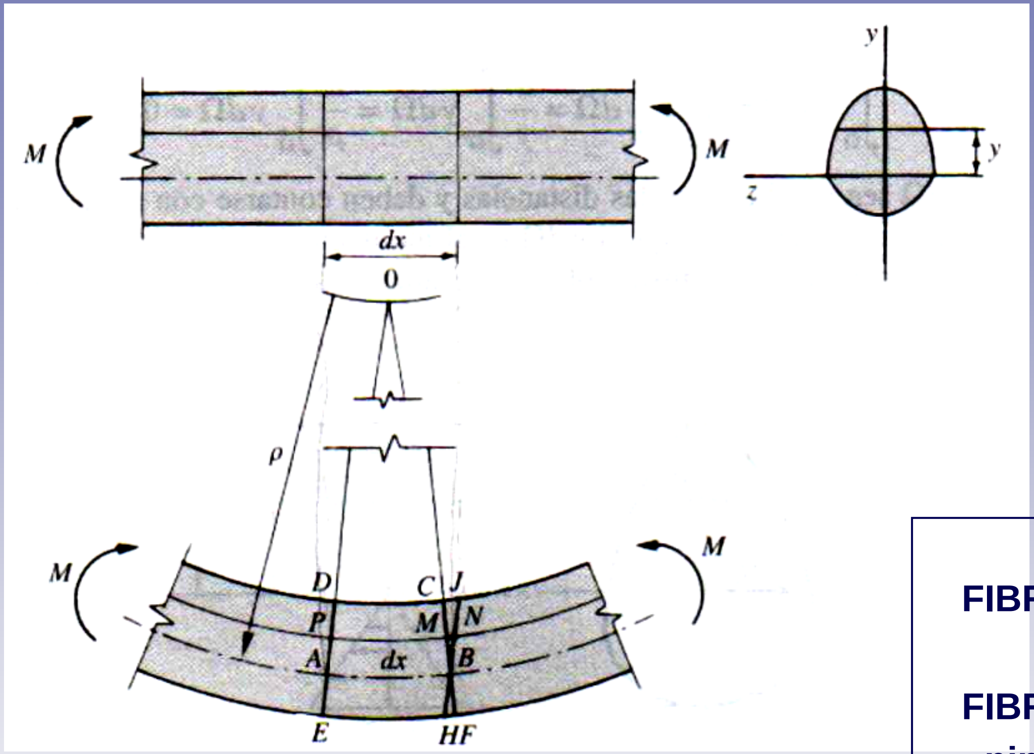
$$M_y = \iint_{\Omega} \sigma_x z d\Omega$$

FLEXIÓN PURA SIMÉTRICA:

$$\iint_{\Omega} \sigma_x dydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \sigma_x zdydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \sigma_x ydydz = M_z = M_F$$

DESCRIPCIÓN DEL PRISMA:



FIBRAS COMPRIMIDAS

FIBRA NEUTRA:
- ninguna tensión
- contiene G de las secciones

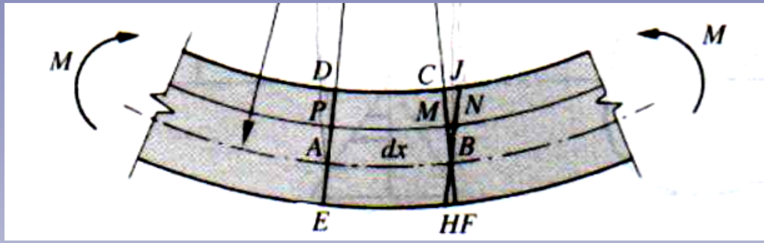
FIBRAS ALARGADAS

HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS (comprobación experimental):

1. Límites de elasticidad proporcional

2. H. de Bernoulli: las secciones transversales se mantienen planas

DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS:



Secciones planas: no se producen deformaciones angulares

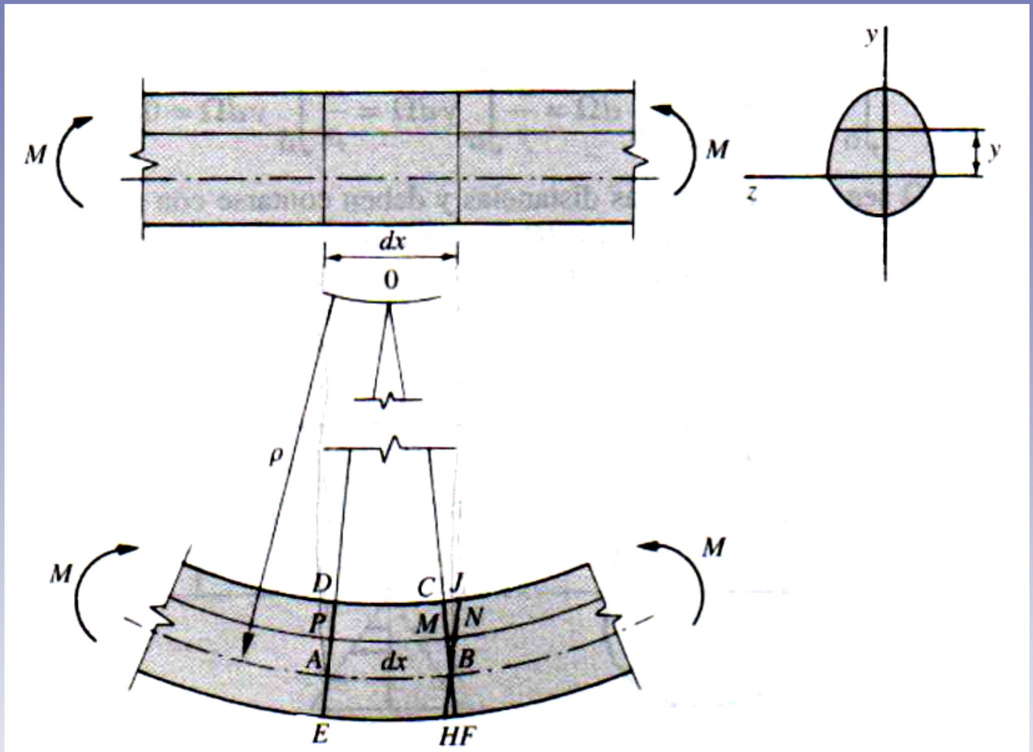
$$(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_x)$$

$$\tau = G\gamma = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

σ_x : LEY DE NAVIER

MÉTODO GEOMÉTRICO

MÉTODO GEOMÉTRICO:



AB: fibra neutra

ρ: radio de curvatura

DE – CF: dos secciones rectas

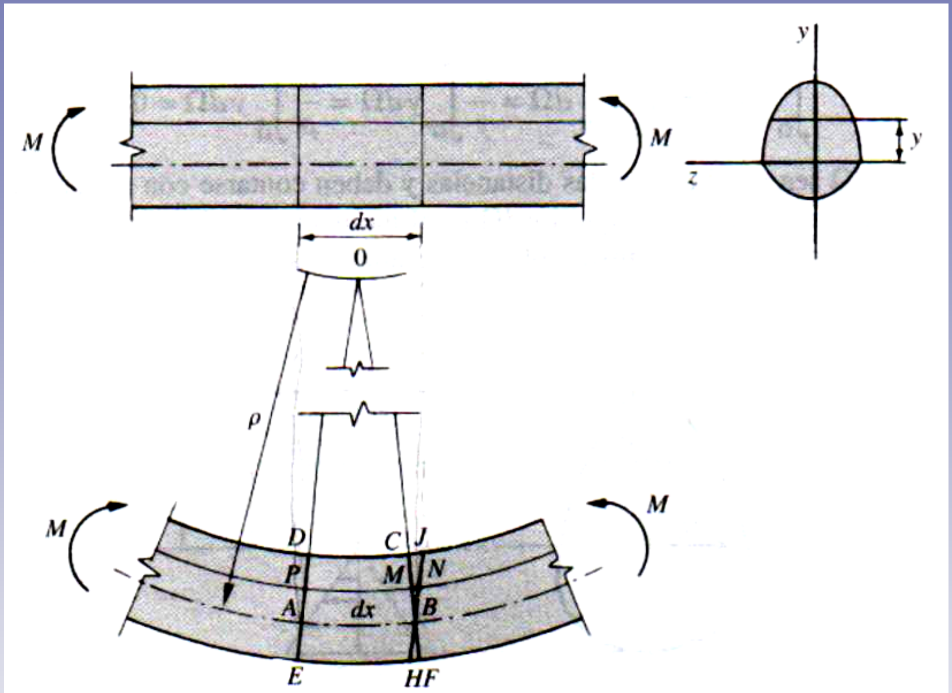
MN: acortamiento fibra encima de fibra neutra

HF: alargamiento fibra debajo de fibra neutra

Deformación para fibra situada a distancia "y" de la fibra neutra:

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{-MN}{AB} = \frac{HF}{AB}$$

MÉTODO GEOMÉTRICO:



TRIÁNGULOS SEMEJANTES: MNB - ABO

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MB}{AO} = \frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{-MN}{AB} = \frac{HF}{AB} \Rightarrow$$

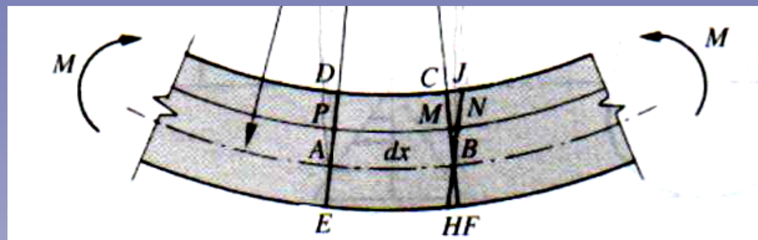
$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$

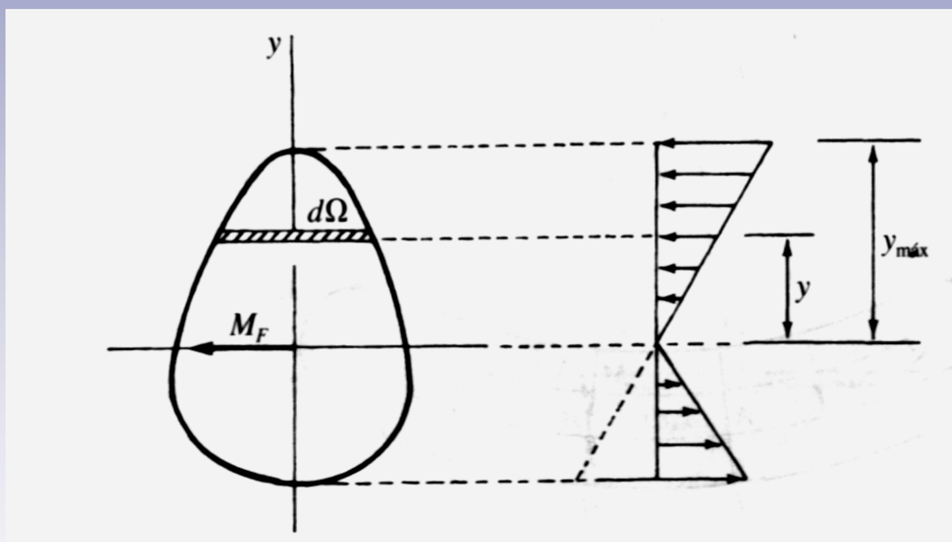
LEY DE HOOKE:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{E}{\rho} y$$

LEY DE NAVIER

MÉTODO GEOMÉTRICO: LEY DE NAVIER

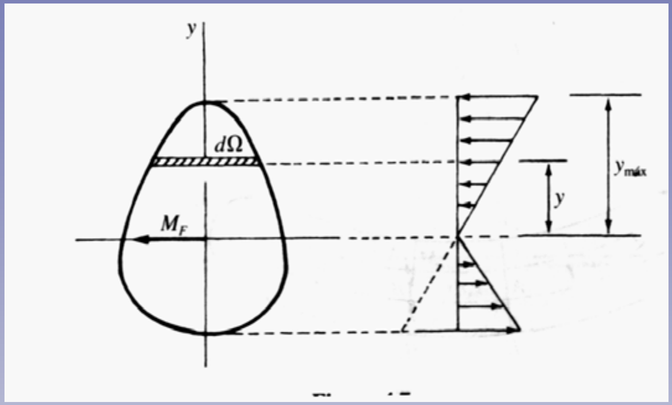




$$\sigma = -\frac{E}{\rho}y$$

$$\sigma = \frac{E}{\rho}y$$

MÉTODO GEOMÉTRICO:



FLEXIÓN PURA: $$dF = \sigma d\Omega \Rightarrow F = 0$$

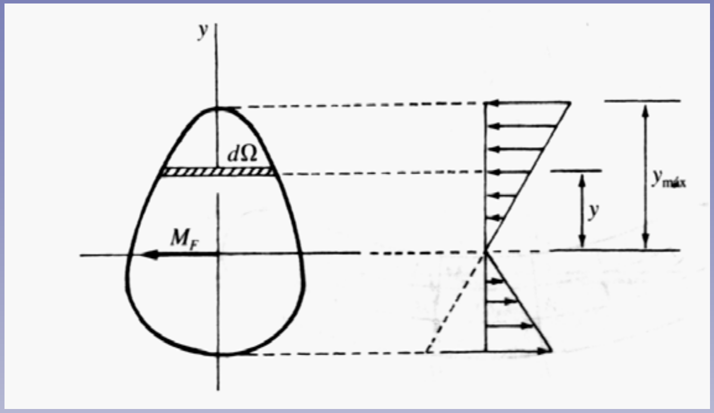
$$F = \int \sigma d\Omega = \frac{E}{\rho}\int y d\Omega = 0$$

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y$$

$$\int y d\Omega = 0$$

La fibra neutra contiene G de todas las secciones

MÉTODO GEOMÉTRICO:



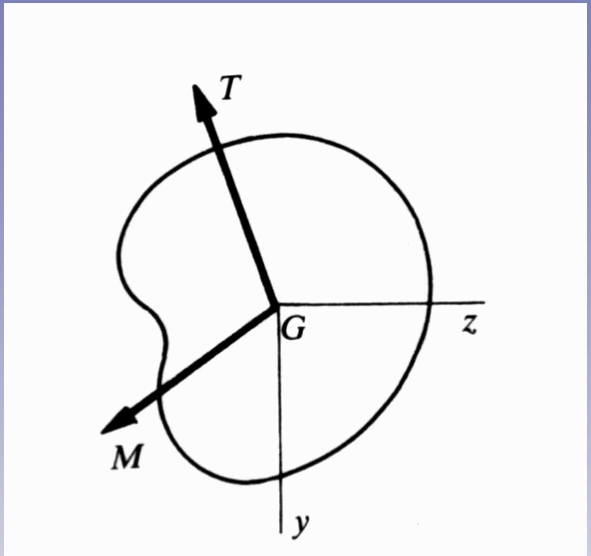
$$\left. \begin{array}{l} dF = \sigma d\Omega \\ \\ \sigma = \dfrac{E}{\rho} y \end{array} \right\} \quad M_F = \int y dF = \int y \sigma d\Omega = \frac{E}{\rho} \int y^2 d\Omega = \frac{E}{\rho} I_z$$

I_z : **momento de inercia respecto eje Z**

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_F}{I_z} \Rightarrow \sigma = \frac{M_F}{I_z} y$$

LEY DE NAVIER

3.4.5. Flexión simple



FLEXIÓN SIMPLE:

en toda sección recta:

- resultante cortante de fuerzas

- momento flector

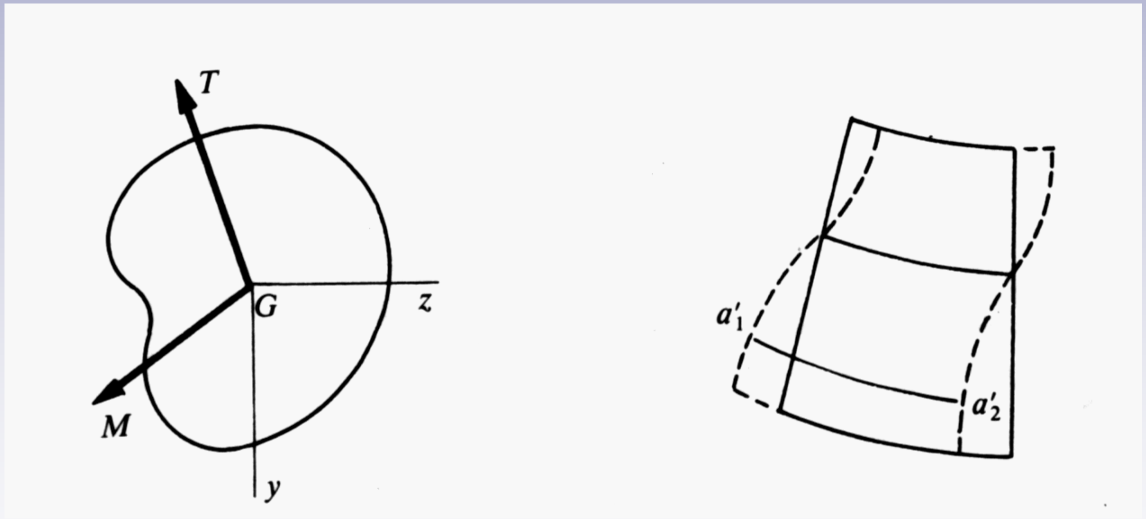
$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x dydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz = T_y \qquad \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz = T_z$$

$$M_T = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dydz = 0 \qquad \iint_{\Omega} \sigma_x zdydz = M_y \qquad \iint_{\Omega} \sigma_x ydydz = M_z$$

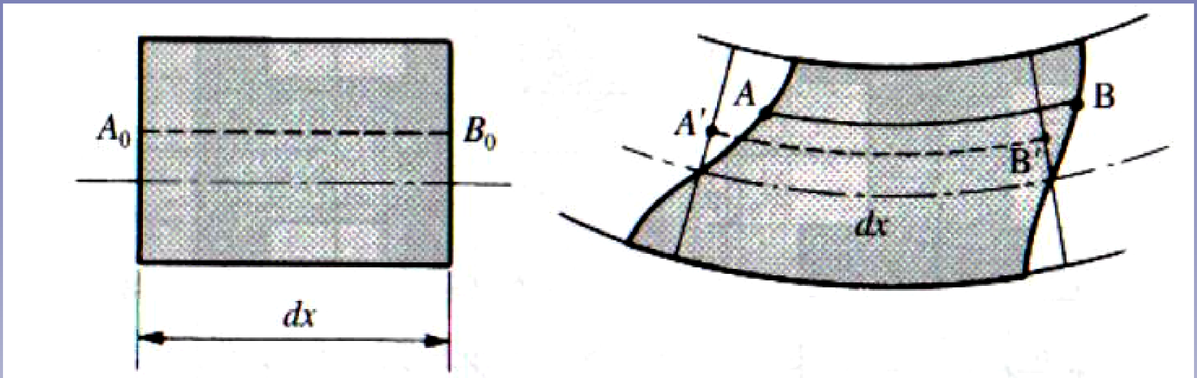
Fuerza cortante: tensiones cortantes y deformaciones angulares

$$\iint_{\Omega} \tau_{xy}\, dydz = T_y \qquad \iint_{\Omega} \tau_{xz}\, dydz = T_z$$

Alabeo de las secciones transversales:



¿Es válida la LEY DE NAVIER en flexión simple?



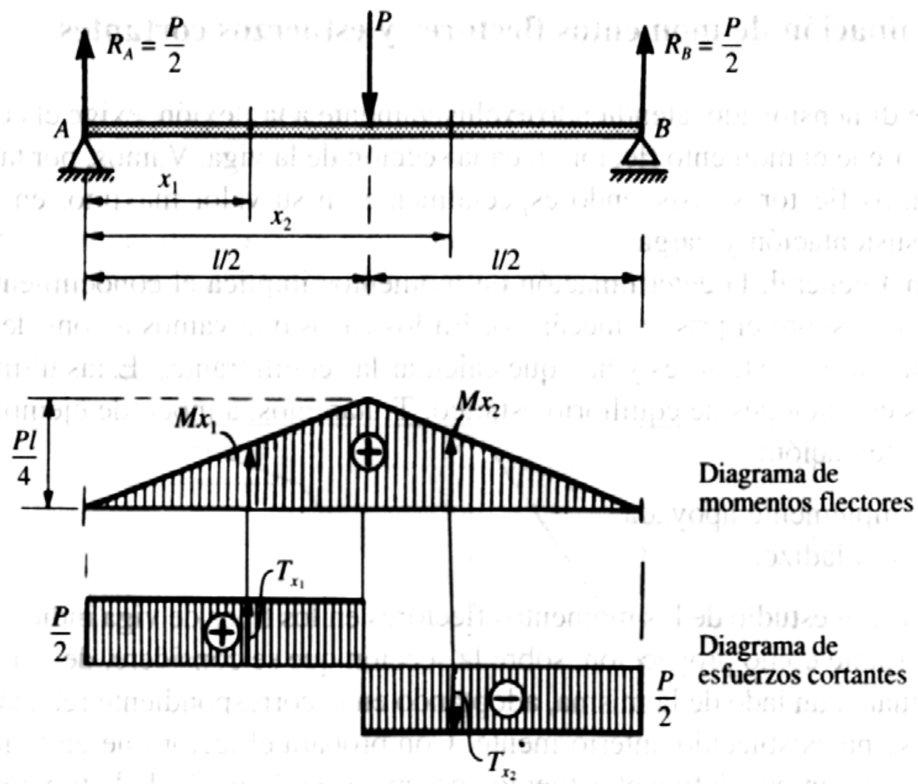
1) se admite alabeo: tensiones cortantes

2) se desprecia alabeo relativo: $A_oB_o \Rightarrow$ AB~A´B´

- Si tensión cortante constante en sección: resultado exacto

- Si tensión cortante varía: error despreciable si dimensiones transversales pequeñas comparadas con longitud

$$\boxed{\sigma = \frac{M_F}{I_z} y}$$



$$0 \le x \le \frac{l}{2}:$$

$$M_{x1} = R_A x = \frac{P}{2} x$$

$$T_{x1} = R_A = \frac{P}{2}$$

$$\frac{l}{2} \le x \le l:$$

$$T_{x2} = R_A - P = -\frac{P}{2} = -R_B$$

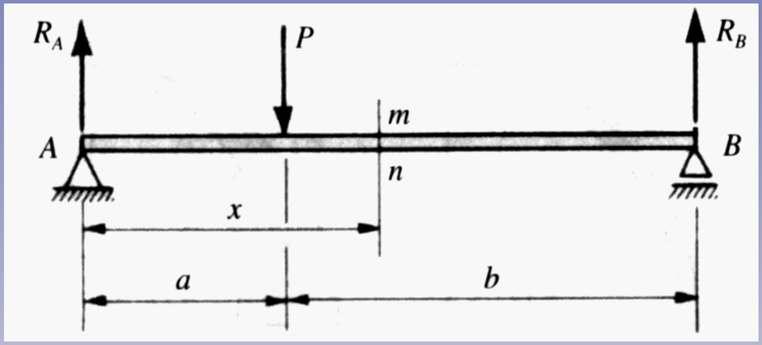
$$M_{x2} = R_A x - P(x - \frac{l}{2}) = \frac{P}{2}(l - x)$$

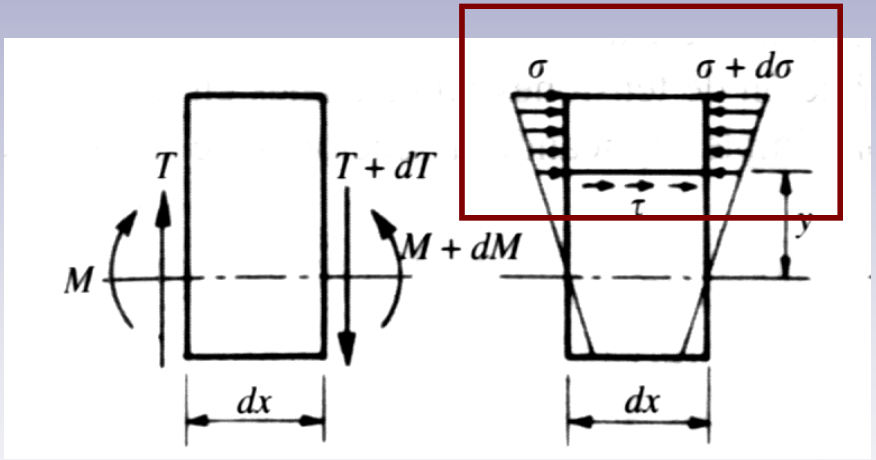
$$R_A + R_B - P = 0$$

$$R_A \frac{l}{2} - R_B \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

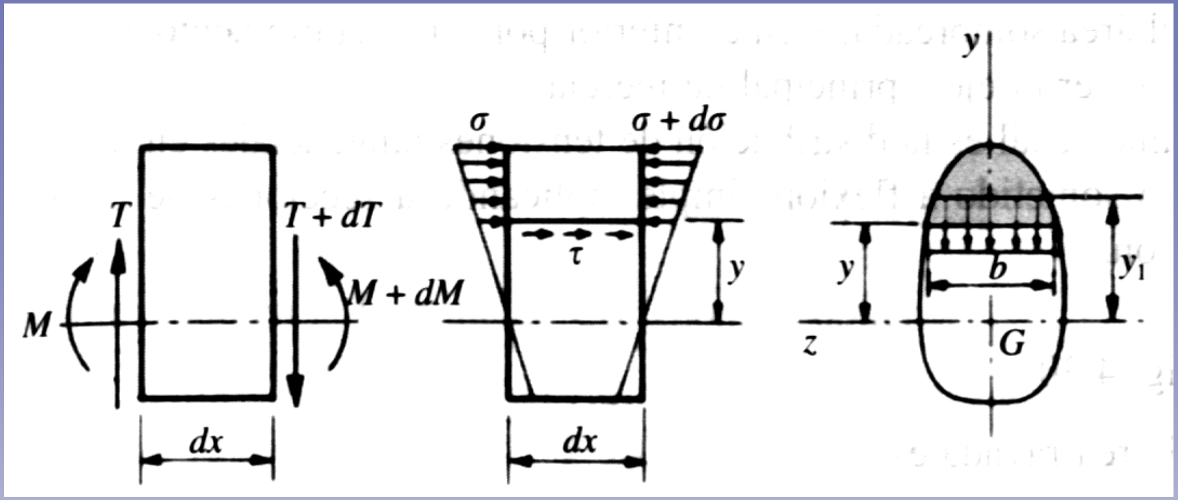
TENSIONES CORTANTES:

En general, tensiones cortantes no constante: $\tau \neq \dfrac{T(x)}{S(x)}$





- Dos secciones: (x, x+dx)
- Momentos flectores: (M, M+dM)
- Equilibrio de la parte cortada a una distancia “y “de la fibra neutra



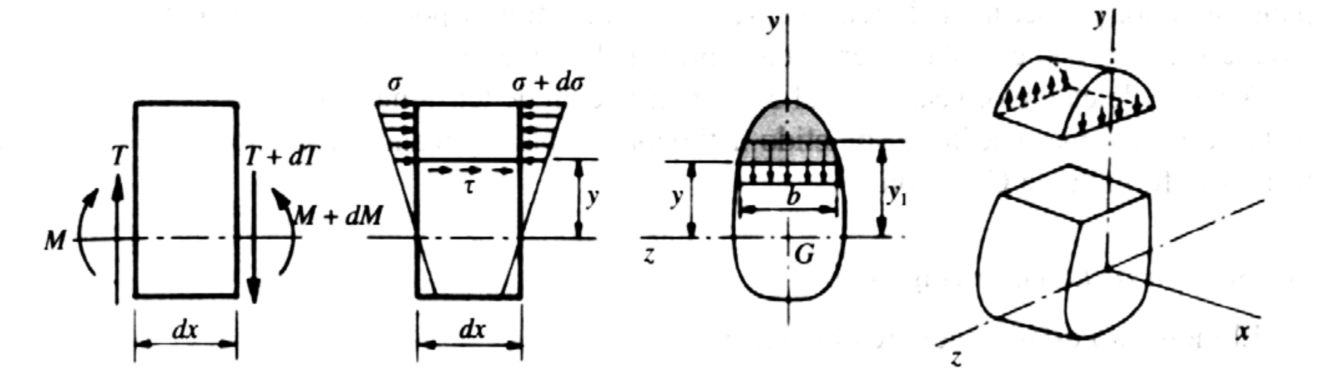
$$\sigma = \frac{M_F}{I_z} y$$

Tensiones normales parte izquierda:

$$N = \int \sigma d\Omega = \frac{M}{I_z} \int y_1 d\Omega = \frac{Mm}{I_z} \qquad m = \int y_1 d\Omega$$

Tensiones normales parte derecha:

$$N + dN = \frac{(M + dM)m}{I_z} \qquad \boxed{dN = \frac{dMm}{I_z}}$$



$$dN = \frac{dMm}{I_z} \Rightarrow \tau$$

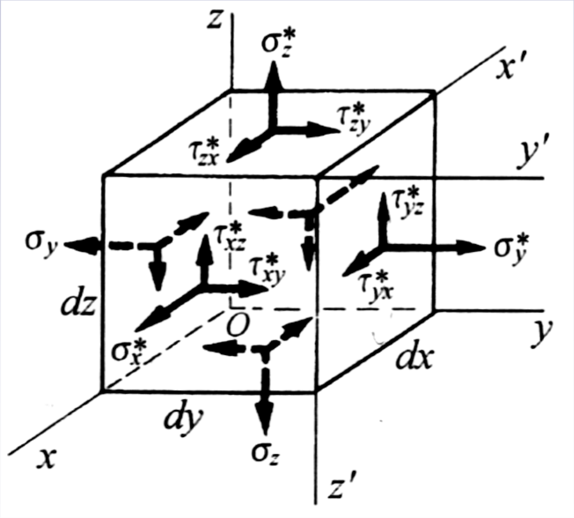
$$\tau b dx = \frac{dMm}{I_z} = \frac{Tdxm}{I_z}$$

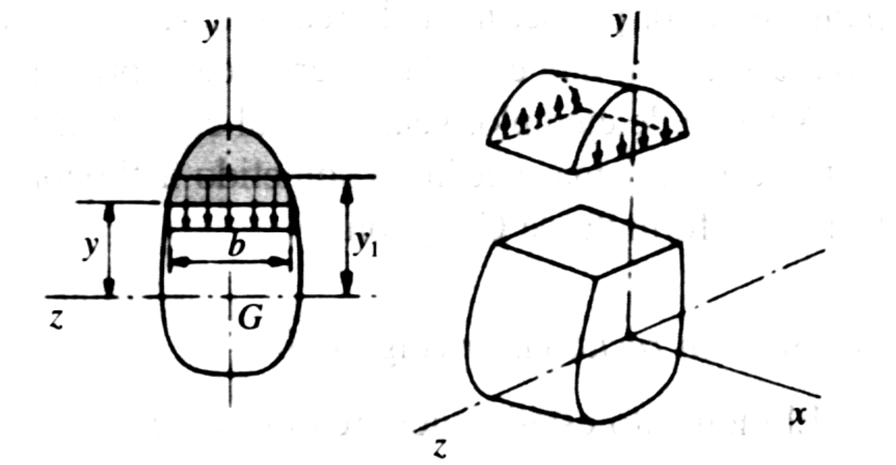
TEOREMA DE COLIGNON

$$\boxed{\tau = \frac{Tm}{bI_z}}$$

Teorema de Cauchy

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$





$$\tau = \frac{Tm}{bI_z}$$

Puntos superior e inferior de la sección:

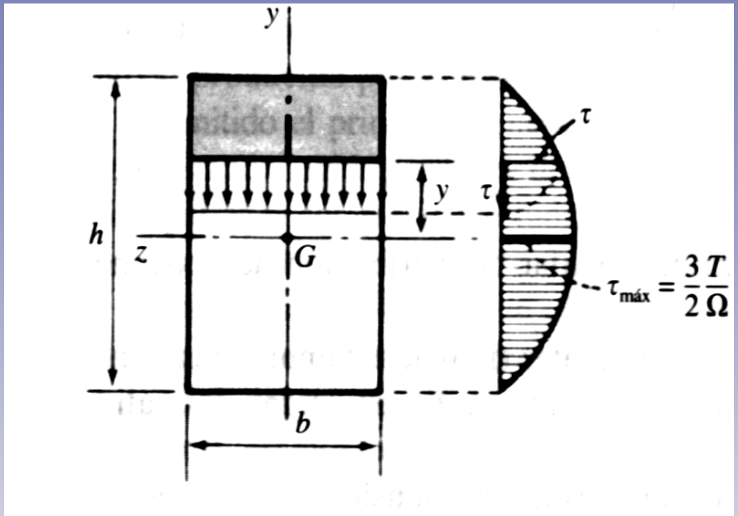
$$m = 0 \Rightarrow \tau = 0 \qquad m = \int y_1 d\Omega$$

- Punto superior: área nula

- Punto inferior: coordenada Y del CM

Distribución de tensiones tangenciales:

a) Sección rectangular



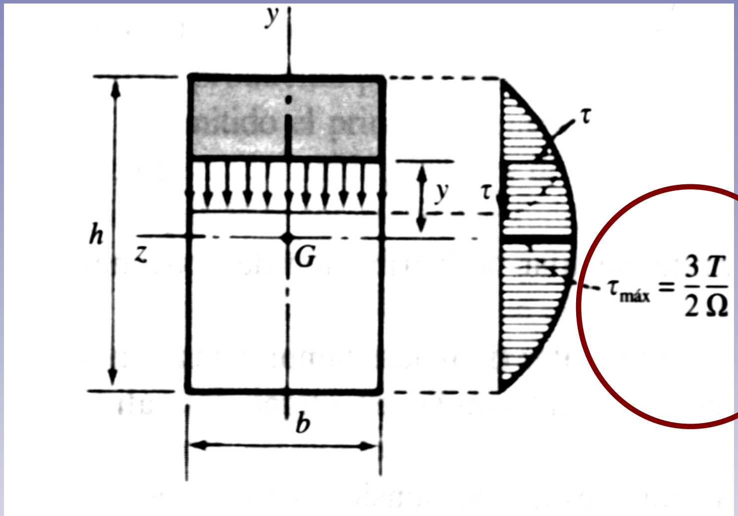
$$\tau = \frac{Tm}{\boxed{bI_z}}$$

$$m = \int y_1 d\Omega = \int_y^{h/2} ybdy = \left[\frac{by^2}{2}\right]_y^{h/2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$I_z = \int y_1^2 d\Omega = 2\int_0^{h/2} y^2 bdy = 2\left[\frac{by^3}{3}\right]_0^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Distribución de tensiones tangenciales:

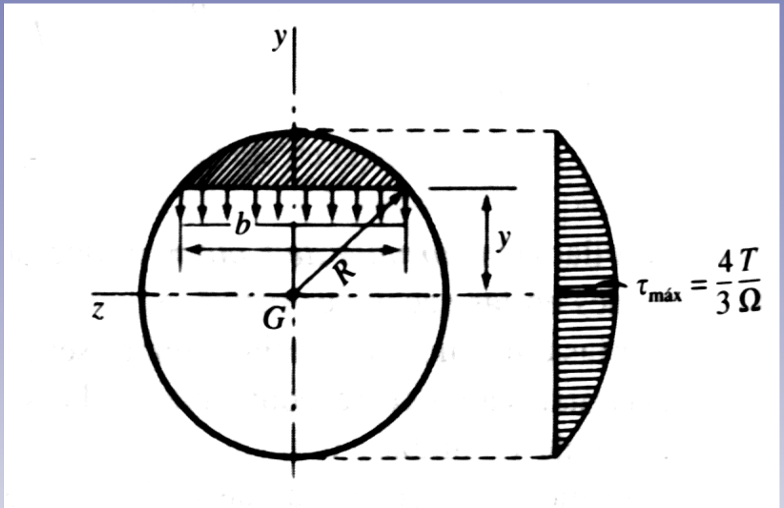
a) Sección rectangular



$$\tau = \frac{Tm}{bI_z} = \frac{T\frac{b}{8}(h^2 - 4y^2)}{b\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{T(h^2 - 4y^2)}{bh^3} = \frac{3}{2}\frac{T}{\Omega}\frac{(h^2 - 4y^2)}{h^2}$$

Distribución de tensiones tangenciales:

b) Sección circular



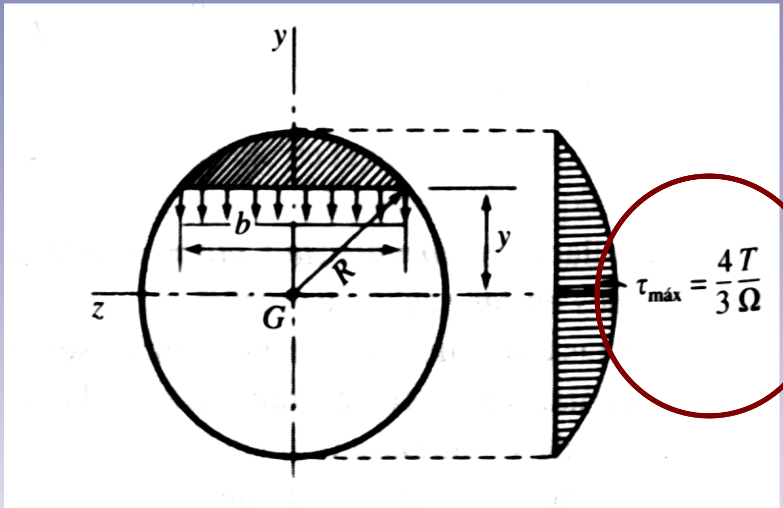
$$\tau = \frac{Tm}{bI_z}$$

$$m = \int y_1 d\Omega = \int_y^R ybdy = \int_y^R y(2\sqrt{R^2 - y^2})dy = -\frac{2}{3}\Big[(R^2 - y^2)^{3/2}\Big]_y^R = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$$

$$I_z = \int y_1^2 d\Omega = 2\int_0^{h/2} y^2 bdy = \frac{\pi R^4}{4}$$

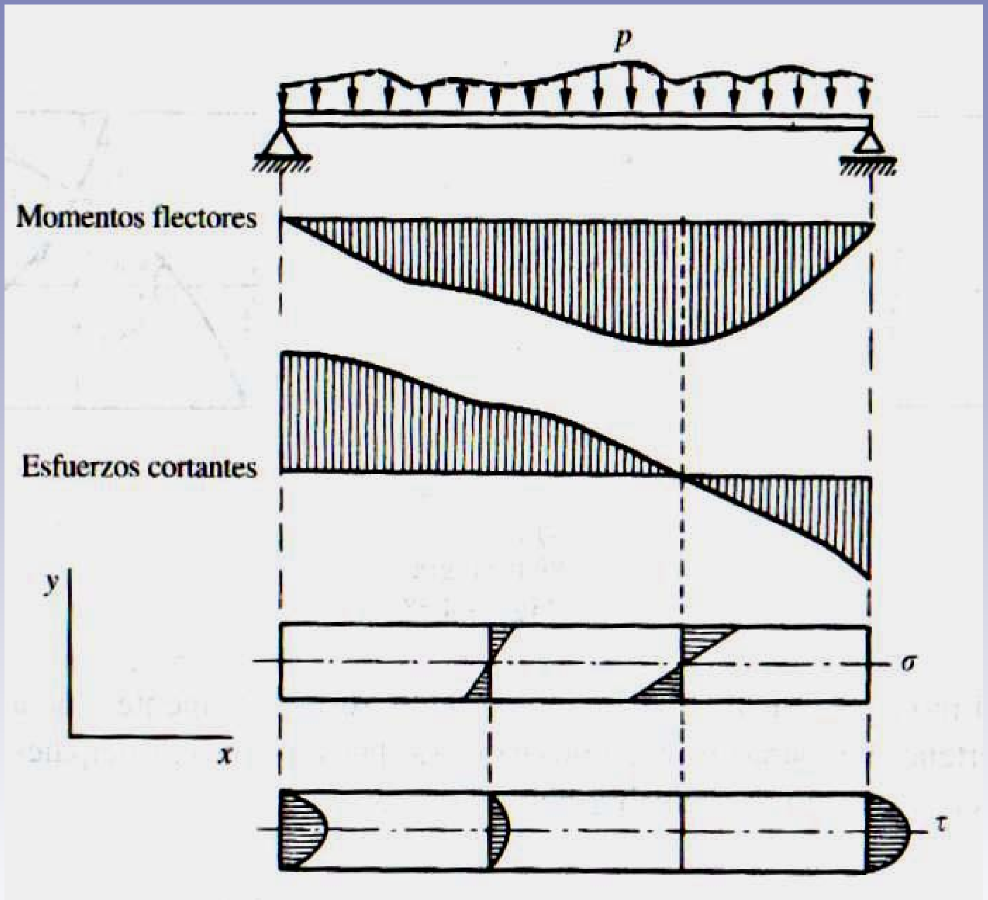
Distribución de tensiones tangenciales:

b) Sección circular



$$\tau = \frac{Tm}{bI_z} = \frac{T\,\frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}}{2\sqrt{R^2 - y^2}\,\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{4}{3}\frac{T}{\Omega}\frac{R^2 - y^2}{R^2}$$

Tensiones principales:



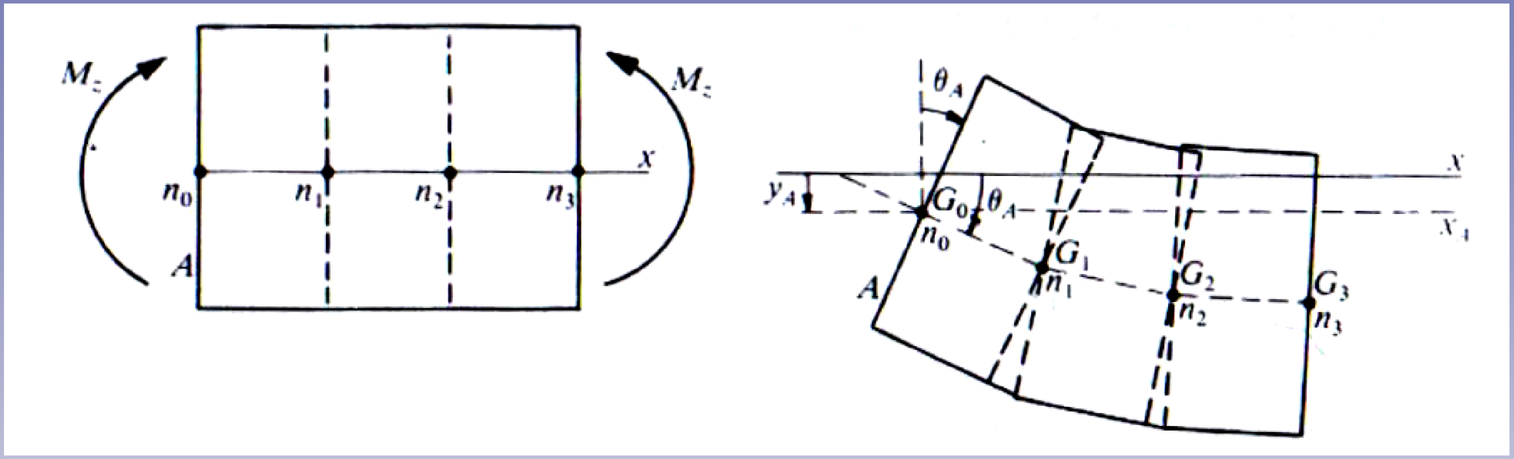
$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{Tm}{bI_z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

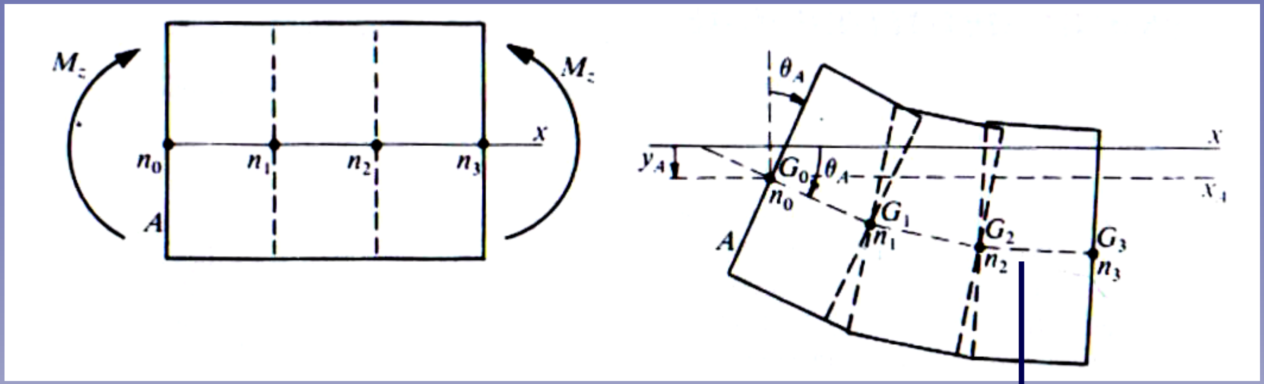
3.4.6. Flexión: deformaciones



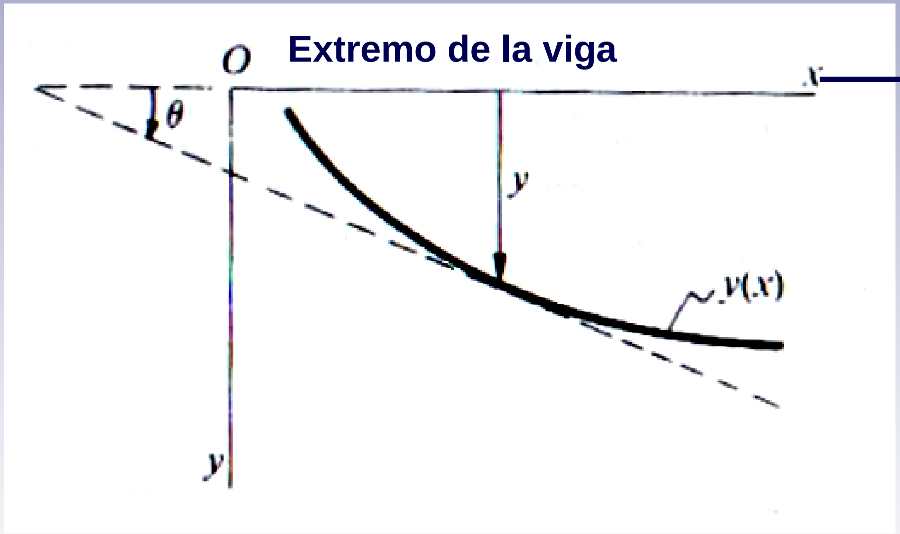
Dos magnitudes definen la deformación:

θ_A : **ángulo girado por sección transversal**

y_A : **desplazamiento perpendicular al eje de la viga del centro de gravedad (desplazamiento despreciable en eje X)**



ELÁSTICA DE LA VIGA



Línea media de la viga

Pequeñas deformaciones:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{M_z}{EI_z}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

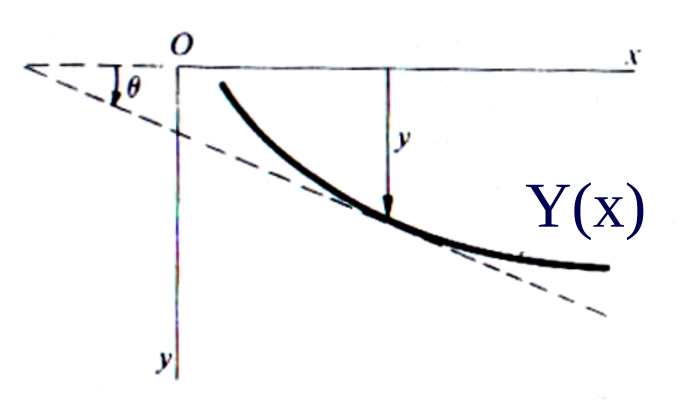
APROXIMADA DE LA ELÁSTICA

ECUACIÓN DIFERENCIAL APROXIMADA DE LA ELÁSTICA

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{M_z}{EI_z}$$

DOBLE INTEGRACIÓN: dos constantes de condiciones de contorno

Flecha: Y_{max}, deformación máxima



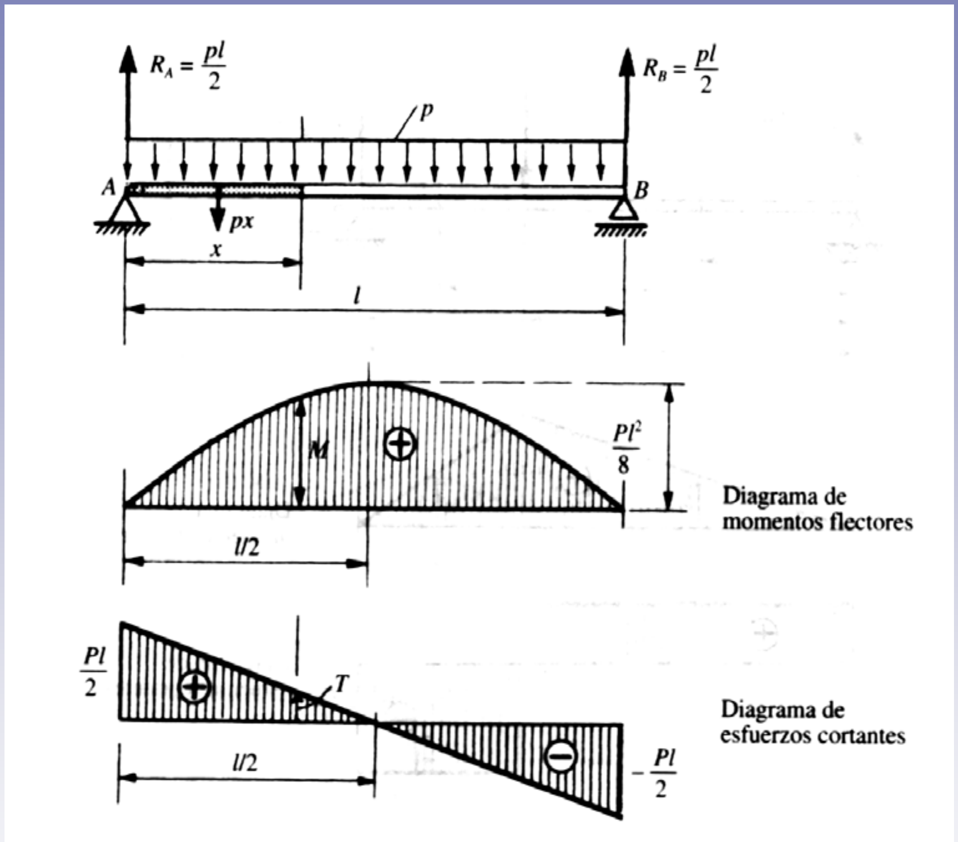
VALIDEZ:

- flexión pura

- flexión simple: **- T(x) constante**

- T(x) no constante: dimensiones transversal << longitud

Ejemplo: **Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida**



$$R_A = R_B = \frac{pl}{2}$$

$$M = R_A x - px\frac{x}{2} = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

$$T = R_A - px = \frac{pl}{2} - px$$

Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{M_z}{EI_z} \qquad M = R_A x - px\frac{x}{2} = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

$$M_z = EI_z\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$$

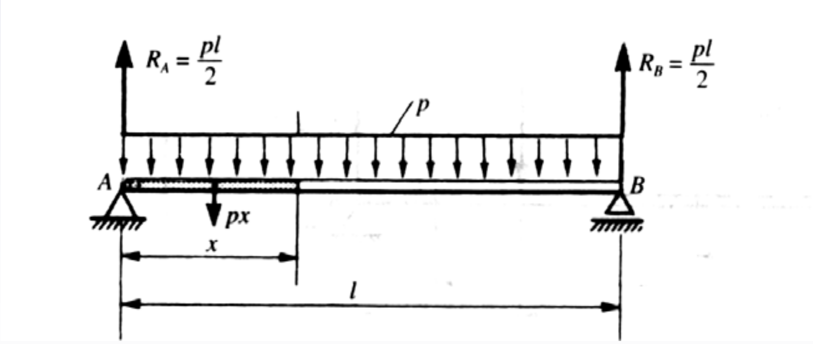
Integrando dos veces:

$$EI_z y = \frac{pl}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 + Cx + K$$

Condiciones de contorno:

$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$



Condiciones de contorno:

$$y(0)=0$$

$$y(l)=0$$

$$EI_z y=\frac{pl}{12}x^3-\frac{p}{24}x^4+Cx+K$$

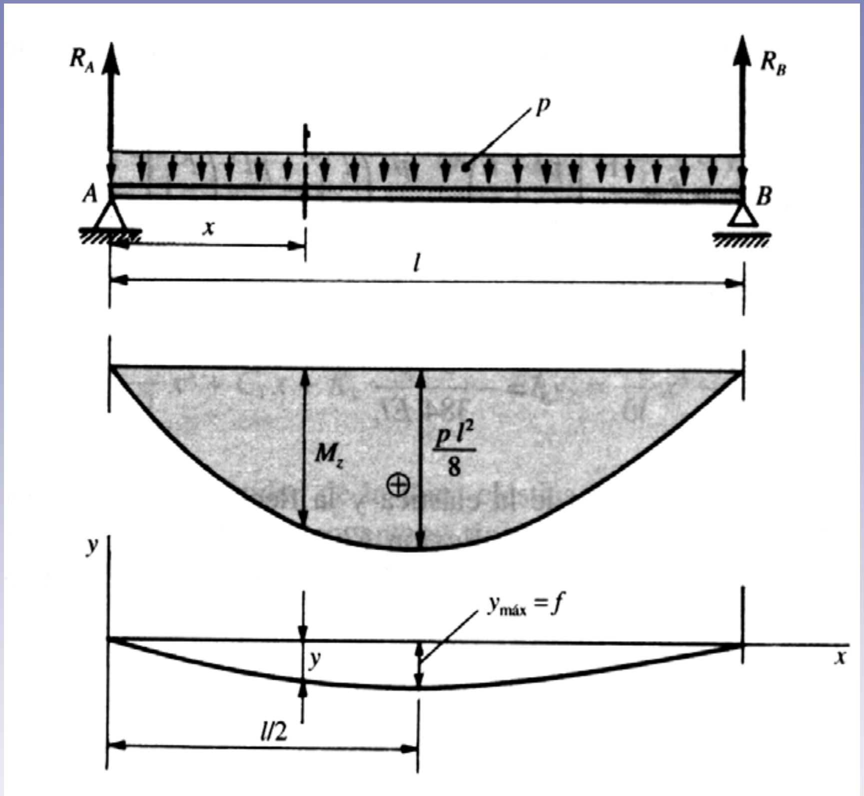
$$y(0)=0\Rightarrow K=0$$

$$y(l)=0\Rightarrow \frac{pl^4}{12}-\frac{pl^4}{24}+Cl=0\Rightarrow C=-\frac{pl^3}{24}$$

ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA:

$$y=\frac{1}{EI_z}\left(\frac{pl}{12}x^3-\frac{p}{24}x^4-\frac{pl^3}{24}x\right)$$

Representación gráfica:



$$y = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{pl}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 - \frac{pl^3}{24}x\right)$$