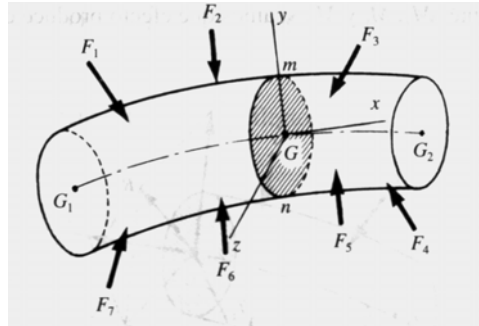


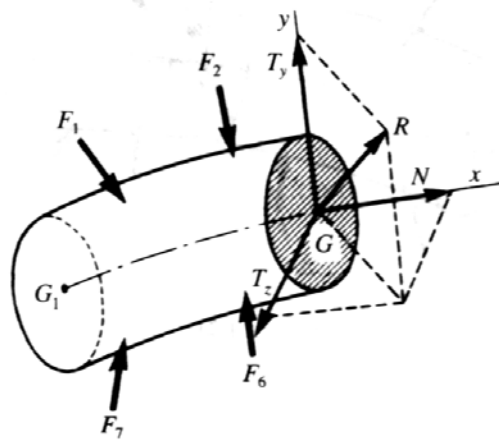
### 3.4. TRACCIÓN Y FLEXIÓN.

#### 3.4.1. Introducción

Consideremos un prisma mecánico que suponemos en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas. Imaginemos un corte en el prisma que determina una sección  $mn$  que por comodidad consideramos plana y contenida en un plano normal a la línea media del prisma.



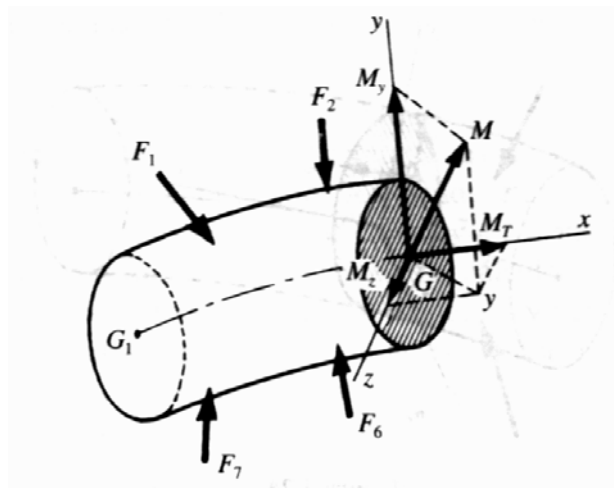
Si eliminamos la parte de la derecha, sobre la parte de la izquierda como sabemos se rompería el equilibrio a no ser por la existencia de una fuerza  $\vec{R}$  y un momento  $\vec{M}$  resultantes equivalente a la acción externa que ejerce la parte eliminada. La fuerza  $\vec{R}$  se puede descomponer en una componente normal a la sección considerada y otra que actúa tangencialmente a la misma.



Veamos el significado de cada una de sus componentes:  $N$ , el llamado esfuerzo normal, por serlo a la superficie de la sección considerada, tiende a empujar o separar a ambas partes del prisma dando lugar a esfuerzos de compresión o tracción, respectivamente.  $T_y$  y  $T_z$  están en el mismo plano de la sección y efectúan la misma clase de esfuerzo, por tanto podemos hablar de su resultante  $\vec{T} = T_y \vec{j} + T_z \vec{k}$  que es la expresión de un esfuerzo que actúan tangencialmente a la superficie de la sección como si se tratase de deslizar la sección respecto de una muy próxima, separándola o cortándola. Es por ello que esta componente de la resultante se denomina esfuerzo tangencial o cortante. Si el prisma se rompiera por la sección recta, el vector  $\vec{T}$  nos indicaría la dirección en que saldrían despedidos los dos trozos del prisma.

Análogamente podemos proceder a descomponer  $\vec{M}$  en la dirección perpendicular al plano de la sección y en otra componente contenida en dicho plano:

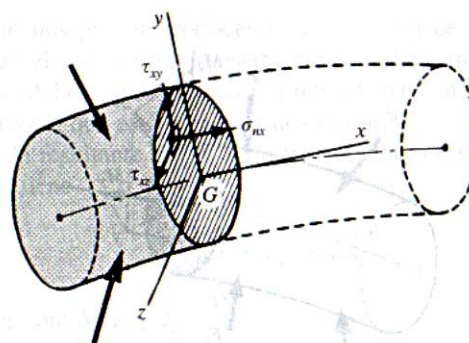
$$\vec{M} = M_T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$



El vector momento nos expresa una tendencia al giro.  $M_T$  actúa perpendicularmente al plano de la sección en la dirección de la línea media, por tanto, tiende a hacer girar el sólido sobre sí mismo, creando un efecto de torsión. Se llama por ello a  $M_T$  **momento torsor**.  $M_y$  y  $M_z$  a girar lateralmente curvándolo en los planos  $xz$  y  $xy$ , flexionándolo por lo que se denominan **momentos flectores**. Su resultante está contenida en el plano de la sección recta, es el **momento flector**:

$$\vec{M}_F = M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

Para encontrar las relaciones entre las componentes de  $\vec{R}$  y  $\vec{M}$  y las componentes de la matriz de tensiones, se debe tener en cuenta que las fuerzas engendradas por las tensiones en toda la sección recta forman un sistema cuya resultante y momento resultante respecto de G son precisamente  $\vec{R}$  y  $\vec{M}$  :



Los esfuerzos normal y tangencial en función de las componentes de la matriz de tensiones serán:

$$N = \iint_{\Omega} \sigma_x d\Omega \quad T_y = \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega \quad T_z = \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega$$

Identificando coeficientes, las expresiones de los momentos torsor y flector serán las siguientes:

$$\vec{M} = \iiint_{\Omega} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ \sigma_x d\Omega & \tau_{xy} d\Omega & \tau_{xz} d\Omega \end{vmatrix} = M_T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$M_T \vec{i} = \vec{i} \iiint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega \quad M_y \vec{j} = \vec{j} \iiint_{\Omega} \sigma_x z d\Omega \quad M_z \vec{k} = \vec{k} \left( - \iiint_{\Omega} \sigma_x y d\Omega \right)$$

Sobre un prisma mecánico actúan en general las fuerzas activas o directamente aplicadas que llamamos cargas y por las fuerzas de reacción o reacciones debidas a las ligaduras. Las cargas que actúan sobre el prisma mecánico están constituidas por fuerzas y momentos.

Una primera clasificación distingue entre **fuerzas de volumen y fuerzas de superficies**. Las primeras actúan sobre todos los puntos del sólido y son debidas a campos de fuerzas tales como el campo gravitatorio o el campo magnético. Las fuerzas de superficie son las que se aplican a la superficie exterior del prisma. Pueden ser **concentradas o distribuidas**. Ejemplos de este tipo de fuerzas son las debidas al viento sobre una pared, la acción ejercida sobre una compuerta de un depósito por el fluido que contiene, el empuje de tierras sobre un muro de contención, la reacción de un cuerpo.....

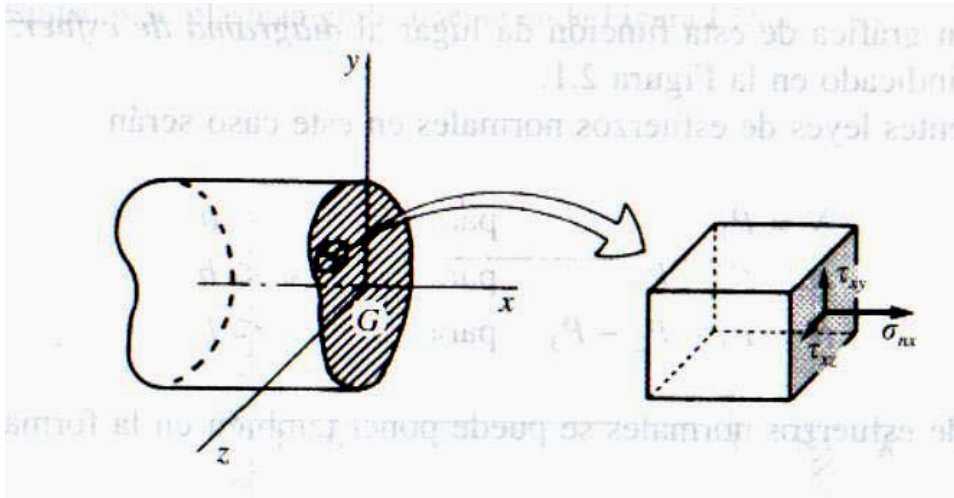
Si atendemos a la continuidad de presencia sobre la estructura, las cargas se pueden clasificar en **cargas permanentes** que existen siempre, manteniéndose constantes en magnitud y posición. Ejemplos de este tipo son el peso, los pavimentos, los materiales de cubrición de los techos....Y **cargas accidentales o soabrecargas**, que con mayor o menor probabilidad pueden afectar a la estructura y que se tendrán que tener en cuenta en el cálculo resistente de la pieza. Ejemplos de cargas accidentales son las personas, muebles, máquinas, vehículos....A este tipo de cargas pertenecen también las de explotación y uso de la estructura: las climáticas, tales como las acciones debidas al viento, a la nieve, a las variación térmicas y acciones sísmicas, empuje de tierras.....

Por otro lado las cargas se pueden clasificar en **cargas estáticas**, cuando el módulo, punto de aplicación o dirección apenas varían y **cargas dinámicas** que son las que varían con el tiempo. La acción de este tipo de fuerzas es acompañada con vibraciones de las estructuras. En la práctica se presentan con frecuencia las cargas dinámicas en forma de cargas repetidas de carácter periódico, es decir, la variación de su módulo respecto al tiempo presenta forma cíclica. Tal ocurre en bielas, balancines, resortes.....

### 3.4.2. Tracción

Diremos que un prisma mecánico está sometido a tracción o compresión monoaxial cuando al realizar un corte por cualquier sección recta las fuerzas que actúan sobre la parte eliminada se reduce en el centro de gravedad de la sección al esfuerzo normal  $N$ , es decir, en todas las secciones rectas del prisma se anulan el esfuerzo cortante y los momentos torsor y flector. En general, el esfuerzo normal en un prisma mecánico será función de la abscisa que determina la posición de la sección recta:  $N = N(x)$ .

Veamos ahora como se distribuyen las tensiones que se engendran en el prisma mecánico. Considerando un elemento cuya cara sombreada forma parte de una sección recta, las componentes de la matriz de tensión  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  sobre esta cara habrán de verificar las siguientes relaciones:



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sigma_x dydz &= N & \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz &= 0 & \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz &= 0 \\ \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dydz &= 0 & \iint_{\Omega} \sigma_x z dydz &= 0 & \iint_{\Omega} \sigma_x y dydz &= 0 \end{aligned}$$

Con estas seis ecuaciones no se pueden determinar las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  que el esfuerzo normal  $N$  origina en la sección: es necesario recurrir a hipótesis simplificativas. La hipótesis que nos resuelve la indeterminación del sistema de ecuaciones es la llamada hipótesis de Bernoulli o de conservación de las secciones planas. Las secciones transversales del prisma mecánico que eran planas y perpendiculares a su línea media antes de la deformación permanecen planas y normales a dicha línea media después de producida ésta. Esta hipótesis se puede comprobar experimentalmente sometiendo a tracción una barra prismática en la que se han dibujado sobre su superficie una retícula de líneas rectas, unas perpendiculares y otras paralelas al eje longitudinal. Después de producida la deformación se observa que cada recta de la retícula sigue siendo paralela a la misma recta antes de someter la barra a tracción.

Al ser constante la deformación longitudinal unitaria en todos los puntos de la sección transversal también será constante la tensión  $\sigma_x$ . Por tanto de la primera de las expresiones anteriores se deduce lo siguiente:

$$\iint_{\Omega} \sigma_x dydz = N \Rightarrow \sigma_x \iint_{\Omega} dydz = N \Rightarrow \sigma_x = \frac{N}{\Omega}$$

siendo  $\Omega$  el área de la sección recta que se considera. Por otra parte cualquier paralelepípedo elemental que se considere en la barra, se deformará según otro paralelepípedo cuyas caras son paralelas a las del primero, esto es, se conserva el paralelismo de sus aristas. Esto implica que no existen distorsiones angulares y por tanto no existen tensiones tangenciales:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

El hecho de que se anulen las secciones tangenciales indica que la dirección del eje del prisma y dos perpendiculares son direcciones principales, y las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \frac{N}{\Omega} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

y el tensor de tensiones:

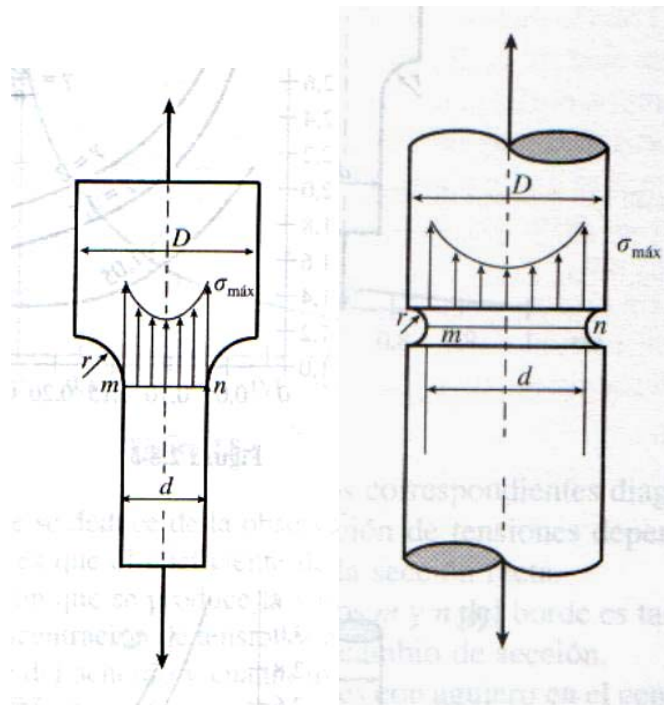
$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz de tensiones, la obtención de la matriz de deformación es inmediata aplicando las leyes de Hooke generalizadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

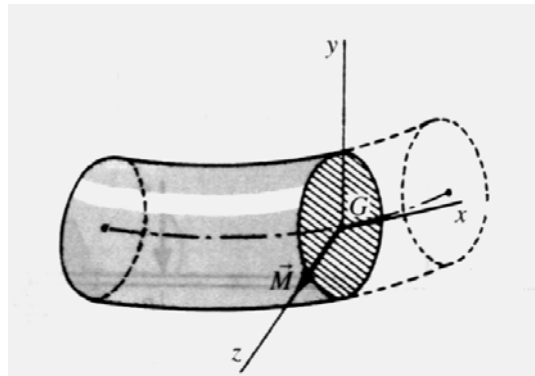
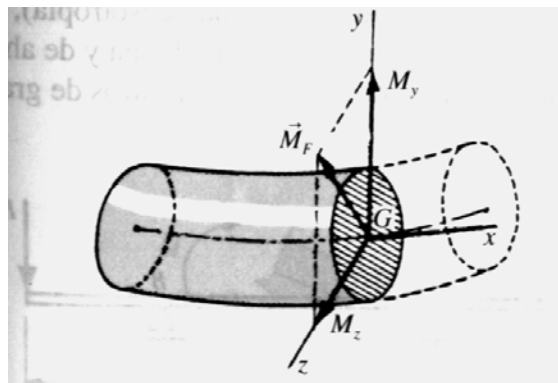
Todo lo expuesto no es aplicable a las secciones próximas a aquellas que presentan variaciones bruscas del área de la sección como ocurre en entallas, agujeros, piezas de máquinas de sección variable sometidas a tracción y compresión.... En estos casos la solución rigurosa solamente se puede obtener aplicando la teoría de la Elasticidad. Algunos ejemplos de cómo se distribuyen las tensiones en estos caso se muestran en las siguientes figuras:



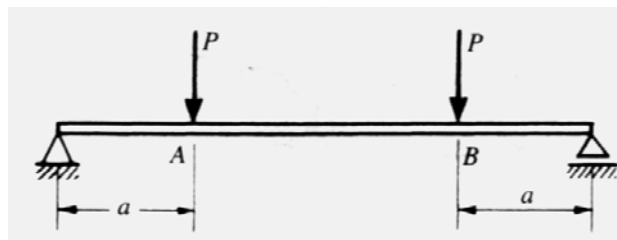
### 3.4.3. Flexión pura

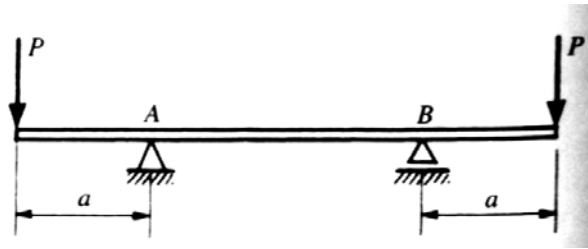
Hasta ahora hemos estudiado solamente tracción y compresión, casos en que todos los puntos de una sección del cuerpo objeto de estudio están sometidos al mismo estado de tensiones. Sin embargo, en muchas ocasiones distintos puntos de una sección del cuerpo están sometidos a distintos estados de tensiones y por tanto tienen distintas deformaciones. En estos casos, se dice que tenemos deformaciones inhomogéneas. El estudio general de las deformaciones inhomogéneas es habitualmente difícil, pero hay dos casos de deformaciones inhomogéneas simples de gran importancia, la flexión y la torsión.

Vamos a considerar el caso de **flexión pura**. Un prisma mecánico se dice que está sometido a una flexión pura cuando en toda sección recta del mismo la resultante de las fuerzas situadas a un lado de la misma es nula y el vector momento resultante está contenido en dicha sección. Esta es **flexión pura asimétrica** cuando el momento flector tiene componentes según los ejes principales de inercia de la sección y **flexión pura simétrica** si el vector momento que actúa en esa sección tiene componente según solo uno de los ejes principales de inercia.



Consideraremos en lo que sigue el caso de flexión pura simétrica como ocurre en los tramos AB de las vigas de las siguientes figuras:





Vamos a considerar la pieza de material elástico a estudiar como compuesta imaginariamente de una serie de fibras longitudinales. Cuando consideramos un prisma mecánico sometido a flexión pura varía la curvatura de su línea media. Aunque las distintas fibras se mueven solidariamente, algunas fibras se acortan y otras se alargan: las fibras que se encuentran hacia la concavidad están comprimidas, mientras las que se encuentran hacia la convexidad se encuentran traccionadas, y sólo las fibras que se encuentran a una determinada altura no se deforman y mantienen su longitud. A cada una de estas fibras se le denomina **fibra neutra** y no estará sometida a tensión alguna. Más adelante, demostraremos que esta fibra neutra contiene los centros de gravedad de las distintas secciones planas del prisma o viga.

Considerando la definición de flexión pura, tendríamos que trabajar con las siguientes relaciones:

$$\iint_{\Omega} \sigma_x dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz = 0$$

$$\iint_{\Omega} (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \sigma_x z dydz = M_y \quad \iint_{\Omega} \sigma_x y dydz = M_z$$

Si la flexión pura es además simétrica, uno de los dos términos  $M_y$  o  $M_z$  serían nulos. Esto es las ecuaciones se convertirían en:

$$\iint_{\Omega} \sigma_x dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz = 0$$

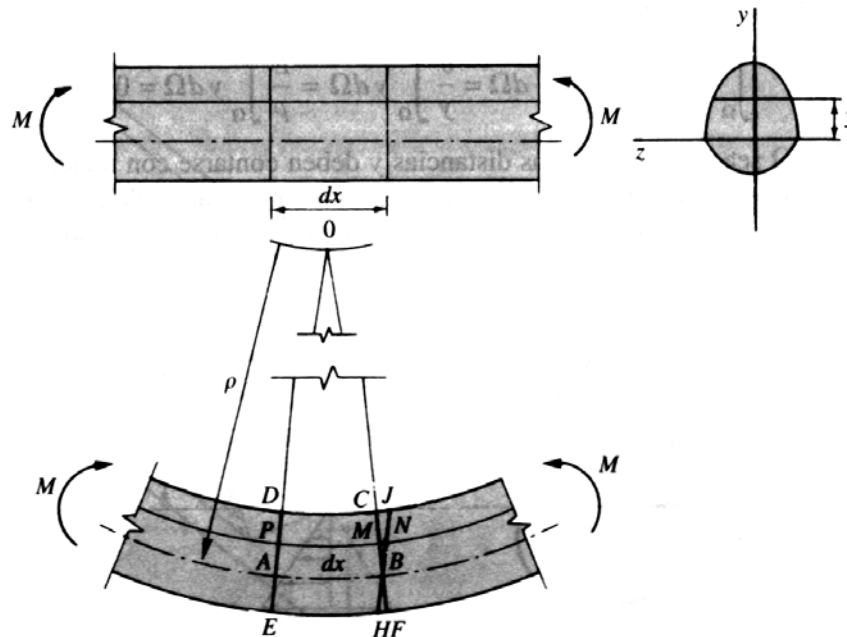
$$\iint_{\Omega} (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \sigma_x z dydz = 0 \quad \iint_{\Omega} \sigma_x y dydz = M_F$$

De nuevas estas ecuaciones por sí solas no nos permiten determinar los esfuerzos que el momento flector origina en cada una de las secciones transversales siendo necesario recurrir a hipótesis simplificadoras que han sido comprobadas experimentalmente. En el estudio de la flexión admitiremos las siguientes hipótesis:

1. El sólido en flexión se mantiene dentro de los límites de elasticidad proporcional
2. Las secciones planas antes de la deformación siguen siendo planas después de ella (hipótesis de Bernoulli)

Una consecuencia inmediata que se deduce de estas hipótesis es que en cada sección no existen tensiones tangenciales ya según la hipótesis 2 no son posibles las deformaciones angulares, por tanto, según la ley de Hooke  $\tau = G\gamma = 0$ . En cada sección recta existirán solamente tensiones normales.

Deduciremos a continuación la *ley de Navier* que nos expresa cuanto valen las tensiones a las que están sometidas las fibras y como varía esta tensión al pasar de una fibra a otra.



Supongamos un elemento longitudinal liberado de la viga sometida a flexión pura. La fibra  $AB$  es la fibra neutra que no sufre ni alargamiento ni acortamiento y determina el radio de curvatura  $\rho$  de la viga. Sean  $DE$  y  $CF$  dos secciones rectas muy próximas de la misma. La fibra situada por encima de la fibra neutra experimenta un acortamiento  $MN$  y la situada por debajo un alargamiento  $HF$ .

En la figura la línea  $JH$  está trazada paralela a la línea  $DE$ , y el origen del sistema de referencia elegido es el punto  $O$ . Se comprueba que los triángulos  $MNB$  y  $ABO$  son semejantes. Se puede comprobar que los tres ángulos son iguales en los tres triángulos y que por tanto, sus lados deben ser proporcionales.

El alargamiento (o acortamiento) unitario de una fibra situada a una distancia  $y$  de la fibra neutra viene dada por  $\epsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{-MN}{AB} = \frac{HF}{AB}$ . Considerando la relación de semejanza entre los triángulos  $MNB$  y  $ABO$  podemos escribir la siguiente relación:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MB}{AO}$$

Puesto que  $MB = y$  (distancia de la fibra longitudinal a la fibra neutra) y  $AO = \rho$ , se tiene:

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

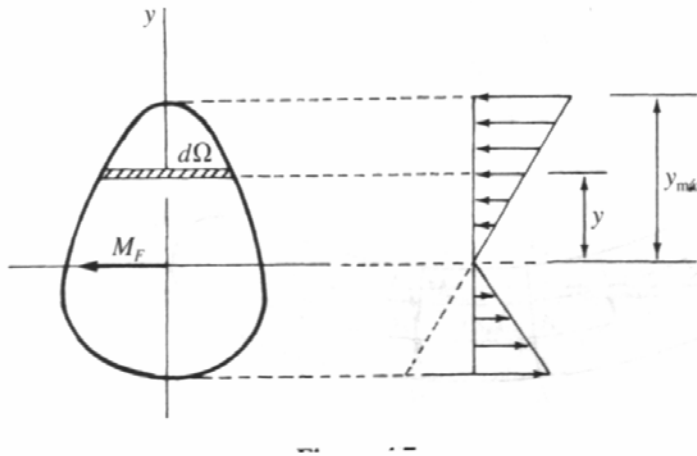
Ahora bien, en virtud de la ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \sigma = -\frac{E}{\rho} y$$

Recordemos que el signo negativo aparece porque la fibra para la que lo hemos calculado sufre un acortamiento y está sometida por tanto a una tensión de compresión. Para la otra fibra resultaría



$\varepsilon = \frac{E}{\rho}$  y ya que sufre un alargamiento y estará sometida a una tensión de tracción. Como el cociente  $\frac{E}{\rho}$  es constante en cada sección podemos enunciar la **ley de Navier**: “En una sección sometida a una flexión pura, los módulos de las tensiones que se ejercen sobre las distintas fibras son directamente proporcionales a sus distancias a la fibra neutra”. La representación gráfica de la ley se puede apreciar en la siguiente figura en la que las máximas tensiones de tracción y compresión corresponden a las fibras extremas:



Consideremos una sección de la viga, la fuerza ejercida sobre una superficie elemental  $dS$  contenida en una sección de viga es:

$$dF = \sigma d\Omega$$

Por tratarse de una flexión pura, la resultante de las fuerzas exteriores es nula, por lo que la resultante de las fuerzas interiores debe ser igual a cero. Por tanto, la siguiente integral debe ser cero, luego se demuestra que la fibra neutra contiene el centro de gravedad de todas las secciones:

$$F = \int \sigma d\Omega = \frac{E}{\rho} \int y d\Omega = 0 \Rightarrow \int y d\Omega = 0$$

Para garantizar el equilibrio, se tiene que verificar además que el momento resultante del sistema de fuerzas engendradas por las tensiones normales tiene que ser igual al momento flector en dicha sección. El momento debido a las tensiones normales respecto al eje horizontal que pasa por la fibra neutra en esa sección plana tiene un valor:

$$M_F = - \int y dF = - \int y \sigma d\Omega = \frac{E}{\rho} \int y^2 d\Omega = \frac{E}{\rho} I_z$$

siendo  $I_z$  el momento de inercia de la sección plana respecto al eje Z donde está situado el centro de gravedad de cada sección. Este momento de inercia depende de la forma y dimensiones de la sección de la barra. Este resultado nos permite expresar la constante de la ley de Navier en función del momento flector que actúa en la sección y las características geométricas de ésta:

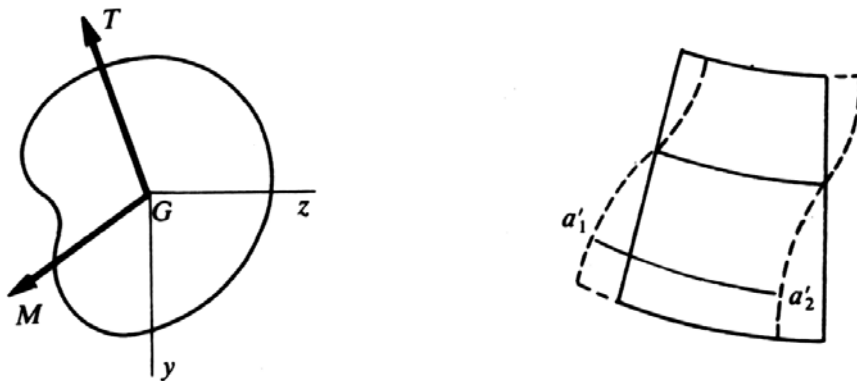
$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_F}{I_z} \Rightarrow \sigma = -\frac{M_F}{I_z} y$$

**3.4.4. Flexión simple**

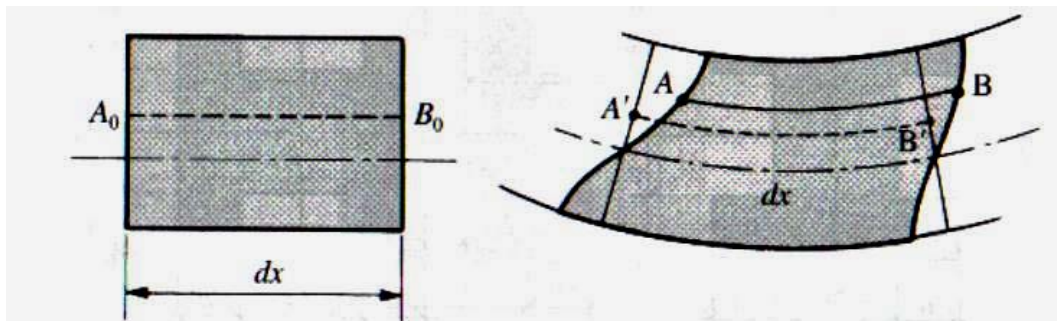
Si además del momento flector actúan tensiones tangenciales o cortantes sobre cada sección recta de la viga o prisma mecánico se dice que está sometido a *flexión simple*. En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sigma_x dydz = 0 & \quad \iint_{\Omega} \tau_{xy} dydz = T_y & \quad \iint_{\Omega} \tau_{xz} dydz = T_z \\ \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dydz = 0 & \quad \iint_{\Omega} \sigma_x z dydz = M_y & \quad \iint_{\Omega} \sigma_x y dydz = M_z \end{aligned}$$

De estas ecuaciones la primera y las tres últimas son las mismas que hemos tenido en cuenta al estudiar la flexión pura. Las dos restantes no son idénticamente nulas en flexión simple, ya que la existencia de la fuerza cortante T origina tensiones cortantes  $\tau$  que actúan en la sección transversal de la viga. Estas tensiones cortantes producen deformaciones angulares y si las tensiones cortantes no se distribuyen uniformemente en la sección lo mismo ocurrirá con las deformaciones angulares, lo que significa que en flexión simple las secciones transversales de la viga no permanecen planas, alabeándose. En la figura se representa el alabeo de las secciones transversales de una rebanada, producido por las deformaciones angulares:



La primera pregunta que nos hacemos es si podemos aplicar la ley de Navier al cálculo de la distribución de tensiones normales en sus secciones rectas:



Se admite que alabeo de las secciones debido al esfuerzo cortante y lo que se hace es despreciar el alabeo relativo de las dos secciones. Esto es admisible pues en general las deformaciones producidas por el esfuerzo cortante son pequeñas. Esto es, se considera la deformación en la viga debida a las tensiones cortantes, pero consideramos  $A'B' = AB$  siendo  $A'B'$  la longitud de la fibra  $A_0B_0$  si las secciones se hubieran mantenido planas y  $AB$  la longitud considerando alabeo. En particular, cuando la tensión cortante no varía a lo largo del eje de la viga, las expresiones determinadas para flexión pura dan resultados exactos en flexión simple. En efecto, al ser la tensión cortante constante, todas las secciones experimentan el mismo alabeo y en consecuencia, el alargamiento de una fibra cualquiera no está influido por dicho alabeo. Si la fuerza cortante varía a lo largo del eje de la viga, las expresiones que determinan las tensiones normales en flexión pura aplicadas en flexión simple dan un error que es despreciable cuando las dimensiones transversales de la viga son pequeñas respecto a su longitud, lo que ocurre en la mayoría de los casos.

Por tanto, si en la flexión simple las deformaciones son las mismas que en el caso de la flexión pura, las fórmulas deducidas para tales deformaciones serán válidas, aun cuando el momento flector vaya acompañado de esfuerzo cortante. La pregunta que nos habíamos hecho de si sería válido aplicar la ley de Navier para el cálculo de la distribución de tensiones normales en las secciones rectas de una viga sometida a flexión simple tiene, pues, contestación afirmativa.

Como hemos visto, dada una sección de la viga, las ecuaciones del equilibrio estático exigen que la resultante de las fuerzas así como del momento de las fuerzas situadas a la derecha de una sección tengan igual módulo, igual dirección y sentido contrario que la resultante o momento de las que se encuentran a su izquierda. Si la tensión cortante es constante, en un prisma sometido a flexión simple la resultante de las fuerzas situadas en una de las partes de la viga dividido por la sección es la tensión cortante.

Por ejemplo, en una viga apoyada en sus extremos A y B el momento en una sección  $mn$  a una distancia  $x$  de A, considerando las fuerzas situadas a su izquierda, será:

$$M_i(x) = R_A x - P(x - a)$$

Y la tensión cortante:

$$T_i(x) = R_A - P$$

Si consideramos las fuerzas situadas a la derecha de la sección, se tendría:

$$M_d(x) = R_A(a + b - x)$$

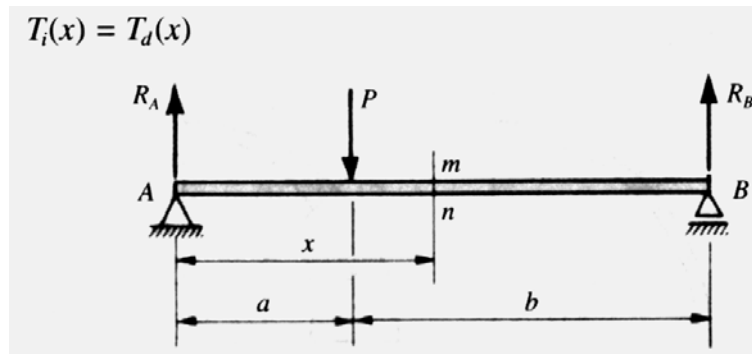
$$T_d(x) = -R_B$$

Evidentemente se habrá de cumplir:

$$M_i(x) = M_d(x)$$

$$T_i(x) = T_d(x)$$

La tensión cortante y el momento flector serán funciones de la abscisa  $x$  de la sección.



Para el esfuerzo cortante, si la resultante de las fuerzas verticales situadas a la izquierda de la sección dirigida hacia arriba, diremos que el esfuerzo cortante es positivo, siendo negativo en caso contrario. Para el momento flector, la regla se basa en el tipo de deformación producida: diremos que el momento flector es positivo cuando las fibras comprimidas estén situadas por encima de la neutra y negativo cuando por debajo.

Trataremos, a modo de ejemplo, el caso de una viga simplemente apoyada y una viga en voladizo. También es necesario adoptar un convenio para los signos de ambas magnitudes:

### Ejemplo 1: Viga simplemente apoyada con carga centrada y concentrada

Suma nula de componentes verticales:  $R_A + R_B - P = 0$

Momentos respecto del punto medio:  $R_A \frac{l}{2} - R_B \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = R_B = \frac{P}{2}$

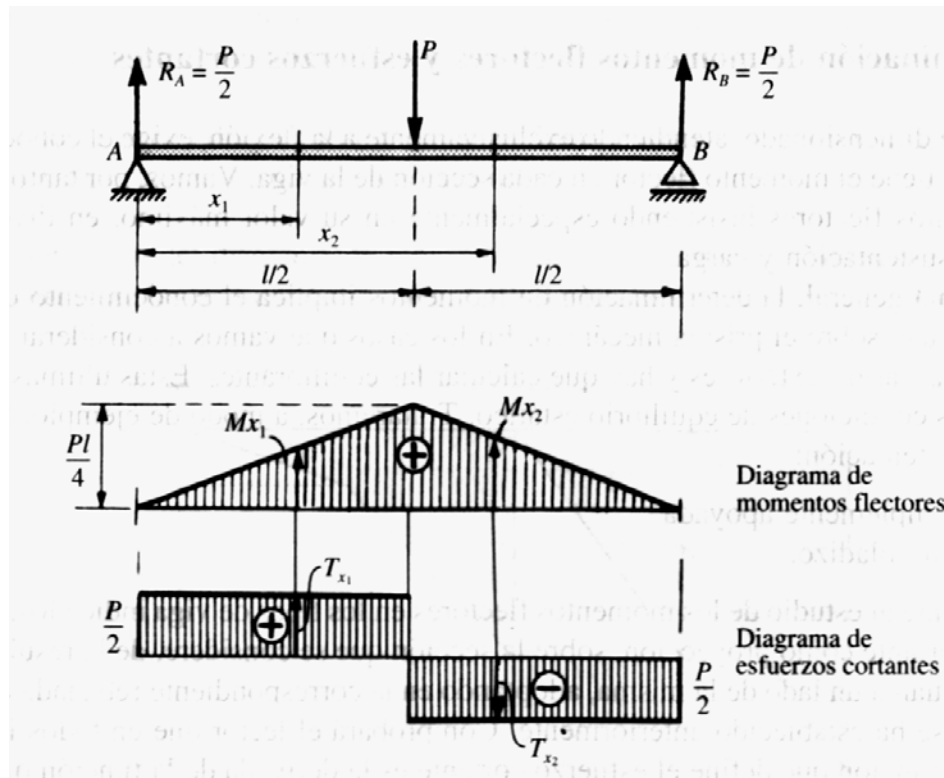
Leyes de los momentos flectores:  $M_{x1} = R_A x = \frac{P}{2} x$  para  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$M_{x2} = R_A x - P(x - \frac{l}{2}) = \frac{P}{2}(l - x) \text{ para } \frac{l}{2} \leq x \leq l$$

Para una sección  $mn$  el valor de la tensión cortante será la suma geométrica de las *fuerzas* (no tensiones cortantes) que actúan sobre la viga a uno de sus lados (consideraremos las fuerzas situadas a la izquierda). Así tendremos:

$$T_{x1} = R_A = \frac{P}{2} \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

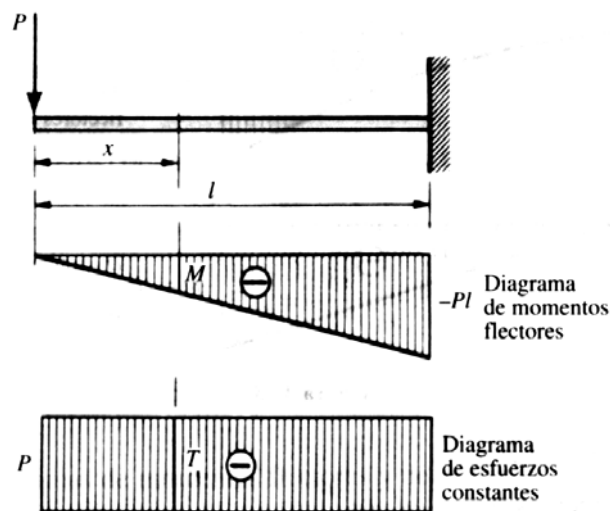
$$T_{x2} = R_A - P = -\frac{P}{2} = -R_B \text{ para } \frac{l}{2} \leq x \leq l$$



### Ejemplo 2: Viga en voladizo con carga concentrada en el extremo libre

La ecuación de momentos flectores para cada sección de la viga:  $M = -Px$

La fuerza cortante es constante en todas las secciones de la viga:  $T = -P$

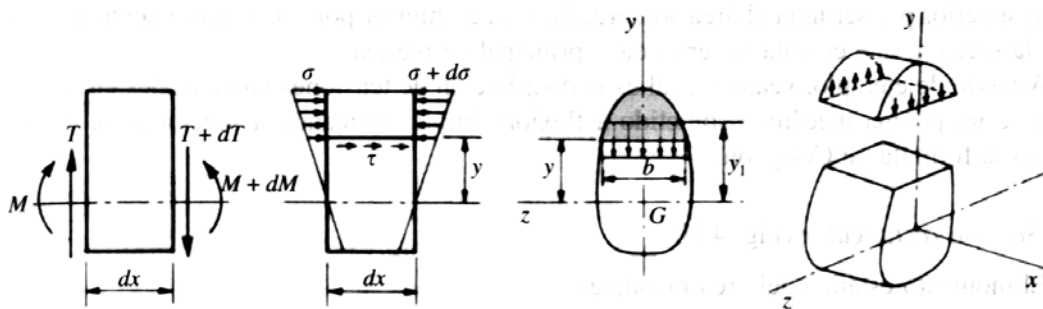


### Tensiones producidas en la flexión simple por la fuerza cortante:

En el caso de un prisma mecánico o viga trabaje a flexión simple hemos indicado que las secciones rectas de la viga, inicialmente planas, presentan después de la deformación cierto alabeo producido por la tensión cortante, esto es la dirección del eje de la viga ahora no es dirección principal (existen elementos no nulos fuera de la diagonal principal del tensor de tensiones). Para completar el estudio del estado tensional en flexión simple necesitamos, pues, conocer cómo se distribuye el esfuerzo a

lo largo y ancho de la superficie de sección recta. Estas tensiones tangenciales no van a ser constantes en todos los puntos de la sección de una viga, de manera que ésta no se calcula simplemente el cociente entre las fuerzas cortantes dadas por ecuaciones como las deducidas en los ejemplos anteriores y la sección de la viga.

Consideremos la porción elemental de prisma mecánico o de viga sometido a flexión simple comprendido entre dos secciones rectas indefinidamente próximas, separadas  $dx$  tal y como se indica en la figura. Sobre las secciones de abscisas  $x$  y  $x+dx$  los momentos flectores difieren en  $dM$ . Cortemos este elemento por un plano a una distancia  $y$  de la fibra neutra y consideremos el equilibrio de la parte superior: la resultante de las fuerzas normales tiene que ser equilibrada por las fuerzas engendradas por las tensiones  $\tau$  sobre la porción de fibra longitudinal.



La resultante de las fuerzas normales en la parte izquierda sobre el área sombreada es, usando la ley de Navier:

$$N = \int \sigma d\Omega = \frac{M_F}{I_z} \int y_1 d\Omega = \frac{M_F m}{I_z}$$

siendo  $m = \int y_1 d\Omega$  el momento estático respecto al eje Z del área de la sección situada por encima de la sección longitudinal (área sombreada).

En la sección de la derecha la resultante de las fuerzas normales será:

$$N + dN = \frac{(M + dM)m}{I_z}$$

La diferencia entre ambas:

$$dN = \frac{dMm}{I_z}$$

Diferencia que debe ser equilibrada por la resultante de las fuerzas debidas a las tensiones  $\tau$  en la sección longitudinal. Admitiendo que las tensiones tangenciales se reparten uniformemente a lo largo del segmento de longitud  $b$ , se tiene:

$$b\tau dx = \frac{dMm}{I_z} = \frac{Tdxm}{I_z} \Rightarrow \tau = \frac{Tm}{bI_z}$$

Expresión llamada **fórmula de Colignon** y que nos permite calcular la distribución de tensiones tangenciales en las secciones rectas. Al ser las tensiones tangenciales en las secciones longitudinales iguales a las correspondientes en las secciones rectas según el **teorema de Cauchy** esta fórmula es válida para el cálculo de ambas.

Una primera consecuencia que se deduce de la fórmula deducida es que las tensiones cortantes son nulas en los puntos superior e inferior de la sección, ya que para ambos se verifica que  $m = 0$ ; en el punto superior por ser nula el área sombreada y en el inferior por ser  $m$  el momento estático de toda la sección que es nula por ser el eje  $z$  principal de inercia.

A modo de ejemplo, veamos cuál es la distribución de tensiones tangenciales en la sección recta de una viga de diferentes tipos de secciones usando la fórmula de Colignon:

#### a) Sección rectangular

La expresión de la tensión tangencial:  $\tau = \frac{Tm}{bI_z}$

El momento estático del área rayada:

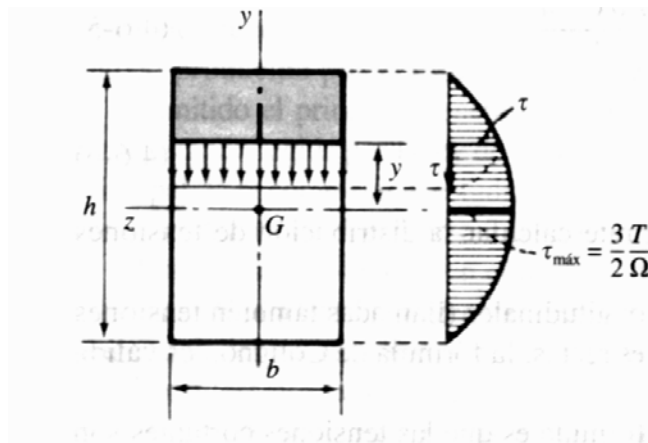
$$m = \int y_1 d\Omega = \int_y^{h/2} y b dy = \left[ \frac{by^2}{2} \right]_y^{h/2} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Y el momento de inercia:

$$I_z = \int y_1^2 d\Omega = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = 2 \left[ \frac{by^3}{3} \right]_0^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial se obtiene:

$$\tau = \frac{Tm}{bI_z} = \frac{T \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3 T (h^2 - 4y^2)}{2 bh^3} = \frac{3 T}{2 bh} \frac{(h^2 - 4y^2)}{h^2} = \frac{3 T}{2 \Omega} \frac{(h^2 - 4y^2)}{h^2}$$



#### b) Sección circular

El momento estático del área rayada:

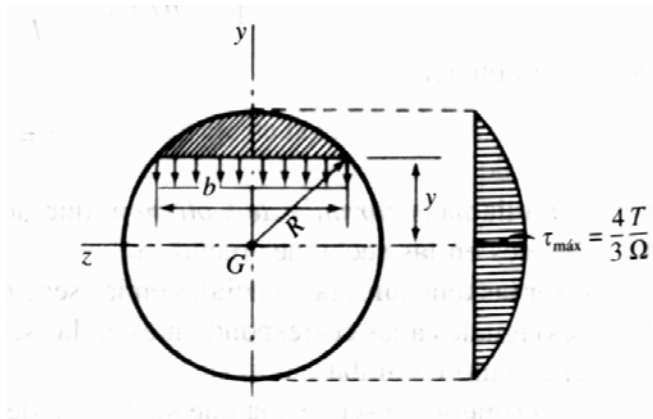
$$m = \int y_1 d\Omega = \int_y^R y b dy = \int_y^R y(2\sqrt{R^2 - y^2}) dy = -\frac{2}{3} \left[ (R^2 - y^2)^{3/2} \right]_y^R = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$$

Y el momento de inercia:

$$I_z = \int y_1^2 d\Omega = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{\pi R^4}{4}$$

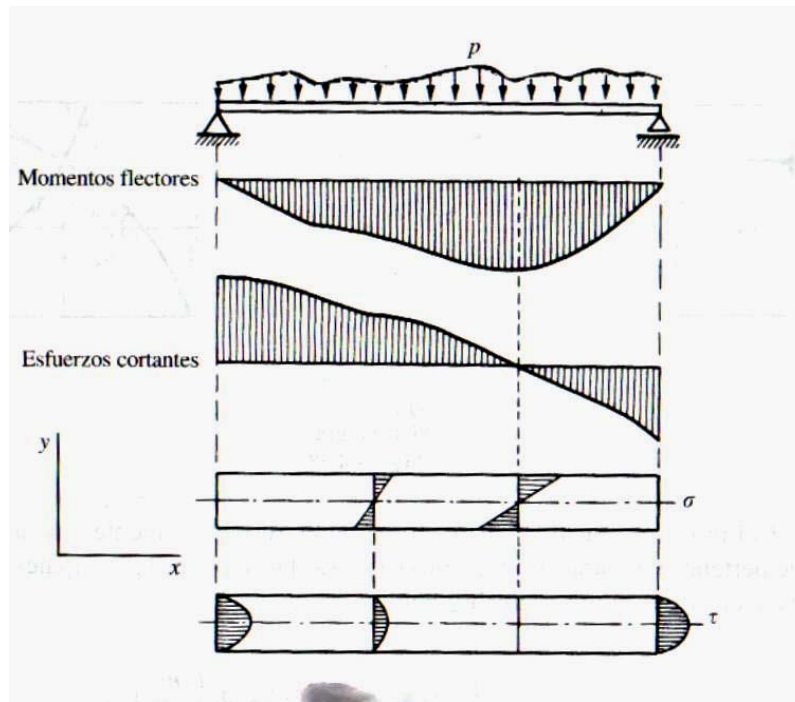
Sustituyendo en la fórmula de Colignon, se obtiene:

$$\tau = \frac{Tm}{bI_z} = \frac{T \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}}{2\sqrt{R^2 - y^2} \frac{\pi R^4}{4}} = \frac{4}{3} \frac{T}{\Omega} \frac{R^2 - y^2}{R^2}$$



En resumen, hemos visto cómo en las secciones rectas de una viga sometida a flexión simple existen tensiones normales, dadas por la ley de Navier, y tensiones tangenciales, que se calculan por la fórmula de Colignon. Si consideramos una viga simplemente apoyada, de sección constante y carga continua de los diagrama de momentos flectores y esfuerzos cortantes se deducen las variaciones relativas a las tensiones normales y tangenciales en los planos de las secciones rectas:





En una viga como la indicada en la figura las componentes de la matriz de tensiones en los puntos de la misma son:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tm}{bI_z} \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

### 3.4.5. Ecuación de la línea elástica de vigas rectas sometidas a flexión simple

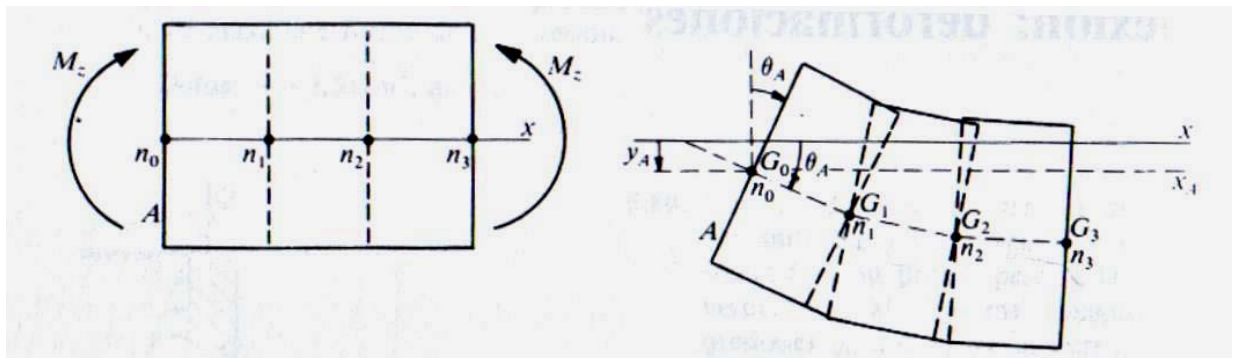
Hemos dedicado los apartados anteriores al estudio de la distribución de tensiones en una pieza prismática de línea media rectilínea, solicitada a flexión pura o a flexión simple, dedicaremos este apartado al análisis de las deformaciones que se producen en la pieza cuando se la somete a estos dos tipos de sollicitación.

En las normas de los diferentes países, tanto de construcciones de máquinas como de edificaciones, se fijan las deformaciones máximas o deformaciones admisibles que pueden presentarse en los elementos estructurales sometidos a flexión. Esto hace que, frecuentemente determinadas piezas de las estructuras se diseñen haciendo que las deformaciones máximas sean iguales a las deformaciones admisibles. En tales casos, se realiza la comprobación de que las tensiones no superen los valores admisibles.

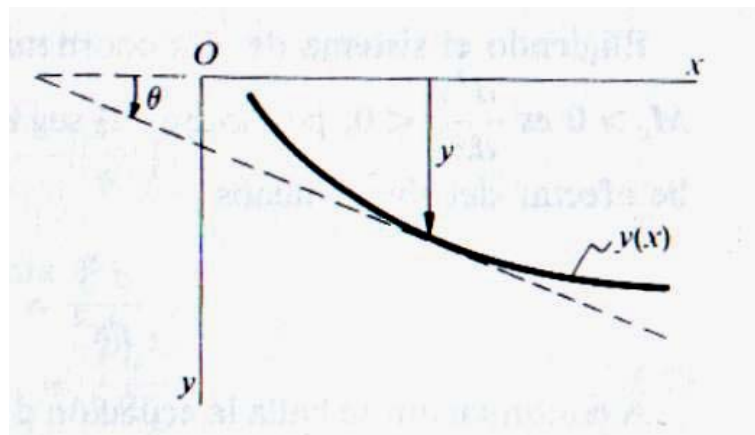
Existen varios métodos que nos permiten determinar la deformación de las vigas solicitadas a flexión. En primer lugar, obtendremos la deformada de la línea media de la viga por el método clásico de la **doble integración**.

En el caso de un prisma mecánico o viga trabaje a flexión simple hemos indicado que las secciones rectas de la viga, inicialmente planas, presentan después de la deformación cierto alabeo producido por la tensión cortante. El eje de la viga, inicialmente recto, se transforma en la elástica, o lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones transversales de la viga deformada.

Las componentes de los desplazamientos en la dirección del eje  $x$  son despreciables frente a las componentes perpendiculares al eje, por lo que se admite que los desplazamientos de las secciones transversales son perpendiculares al eje de la viga. Los centros de gravedad de las secciones transversales se desplazarán perpendicularmente al eje de la viga, y sus nuevas posiciones  $G_0, G_1, G_2, G_3$  como puede verse en la siguiente figura definen la elástica:



Para estudiar la deformación de la pieza considerada se estudia la ecuación de la línea elástica referida a un sistema de referencia cuyo eje  $X$  sea coincidente con la línea media del prisma mecánico antes de producirse la deformación, el eje  $Y$  el eje vertical ascendente y como origen de coordenadas el centro del extremo de la pieza. La elástica será una curva plana de ecuación  $y = y(x)$ :



Tras un desarrollo matemático resulta la siguiente ecuación diferencial no lineal que representa la **ecuación diferencial exacta de la línea elástica de la viga**:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}$$

siendo  $\rho$  la curvatura de una curva plana. Esta expresión sirve para flexión pura y es válida también para flexión simple siempre que la fuerza cortante  $T_y$  sea constante, ya que en ese caso  $T_y$  produce en la elástica una traslación constante que no afecta a su curvatura. En el caso de que la fuerza cortante  $T_y$  sea variable, su influencia es despreciable en aquellas vigas en que las dimensiones de sus secciones transversales sean pequeñas frente a su longitud, por lo que la expresión deducida será aplicable a la mayoría de las vigas solicitadas a flexión simple.

La integración de esta ecuación diferencial es generalmente bastante difícil. Sin embargo, en la mayoría de las vigas las deformaciones son pequeñas y cuando es posible admitir la hipótesis de pequeñez de las deformaciones, la ecuación se reduce a la **ecuación diferencial aproximada de la línea elástica** cuya integración no presenta ninguna dificultad:

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{M_z}{EI_z}$$

La integración de esta ecuación nos permitirá hallar la ecuación  $y = y(x)$  que nos indica para cada sección cuando ha bajado o subido del centro de gravedad de la sección a causa de la deformación flectora. Es muy interesante hallar en que sección se presenta y cuánto vale la máxima deformación vertical que se denomina **flecha**.

Al integrar las ecuaciones diferenciales de la línea elástica aparecerán, en cada ecuación integral, dos constantes arbitrarias que deberemos determinar imponiendo las condiciones de contorno. Las ecuaciones admiten, pues, infinitas soluciones desde un punto de vista matemático, pero físicamente cada problema tiene una solución que deberemos identificar.

A continuación se halla la ecuación de la elástica correspondiente a una viga simplemente apoyada:

**Ejemplo:** Calcular la ecuación de la elástica y la flecha que se produce en una viga simplemente apoyada, de longitud  $l$ , de módulo de rigidez a la flexión  $EI_z$ , sometida a una carga uniformemente repartida  $p$ .

Como para una viga de este tipo hemos visto que la ley de momentos flectores es:

$$M_z = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$$

válida en toda la viga, la ecuación diferencial de la elástica será:

$$M_z = EI_z \frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$$

Integrando dos veces esta ecuación se obtiene:

$$EI_z y = \frac{pl}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 + Cx + K$$

Para determinar las constantes de integración que nos definirán la única solución de la ecuación diferencial, imponemos las condiciones de contorno del problema físico en cuestión:

$$y(0) = 0 \quad y(l) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$y(0) = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{pl^4}{12} - \frac{pl^4}{24} + Cl = 0 \Rightarrow C = -\frac{pl^3}{24}$$

Por lo que la ecuación de la línea elástica es:

$$y = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 - \frac{pl^3}{24} x \right)$$

