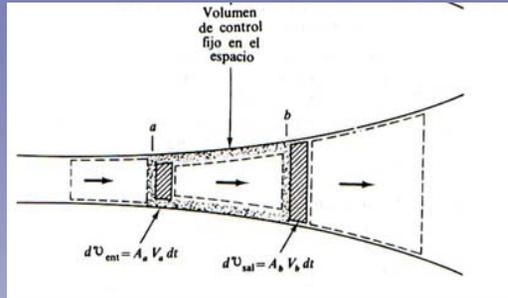


# TEMA 3 (Parte II)

## Dinámica de fluidos viscosos

### 3.3. Ecuación de Bernoulli modificada



$$B = E \quad \frac{dB}{dm} = \frac{dE}{dm} = e$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \frac{dB}{dm} (\rho dV) + \int_S \frac{dB}{dm} \rho (\vec{V} \cdot d\vec{S}) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e (\rho dV) + \int_S e (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$$

Primera ley de la Termodinámica:  $\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$

Energías específicas:

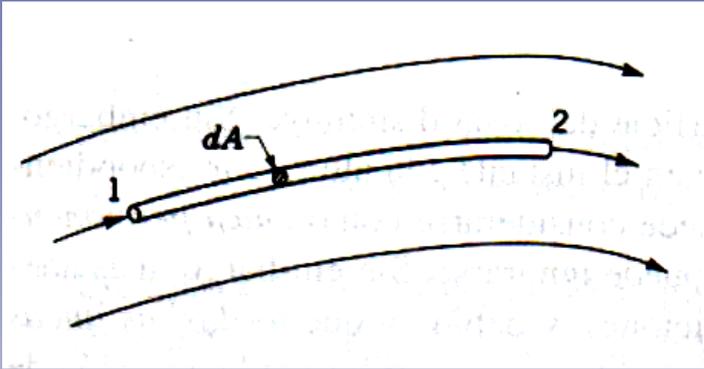
- Energía cinética  $e_C : dm \frac{V^2}{2} \Rightarrow \frac{V^2}{2}$
- Energía potencial  $e_P : gz$
- Energía interna :  $u$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left( \frac{V^2}{2} + gz + u \right) (\rho dV) + \int_S \left( \frac{V^2}{2} + gz + u \right) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$$

$$W = W_F + W_{otros}$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{otros}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left( \frac{V^2}{2} + gz + u \right) (\rho dV) + \int_S \left( \frac{V^2}{2} + gz + u + \frac{P}{\rho} \right) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$$

Flujo permanente, incompresible, PERFECTO:



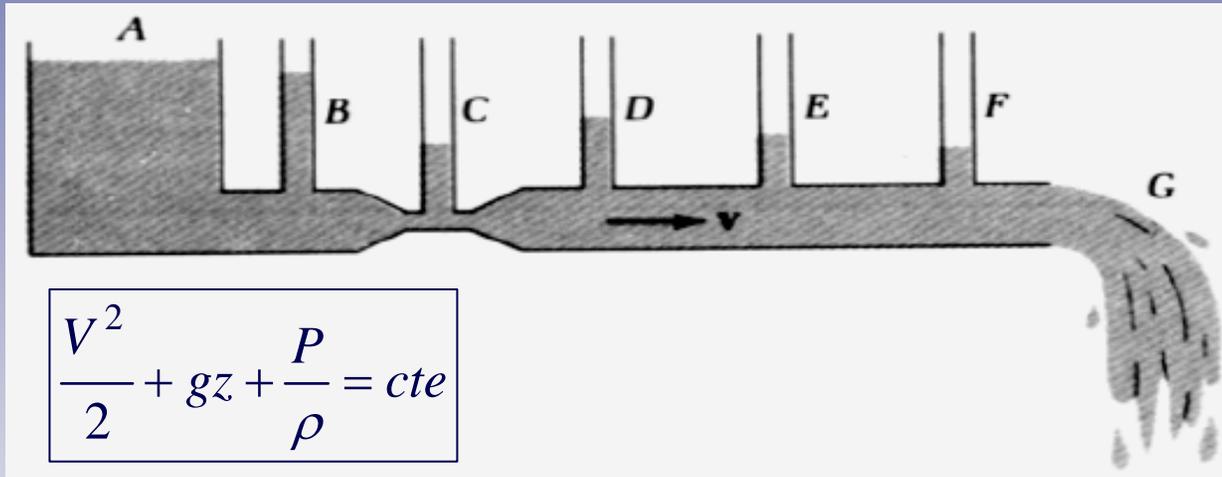
$$\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho} = \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = cte}$$

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = cte$$

**ECUACIÓN DE BERNOULLI**

Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería recta y horizontal:

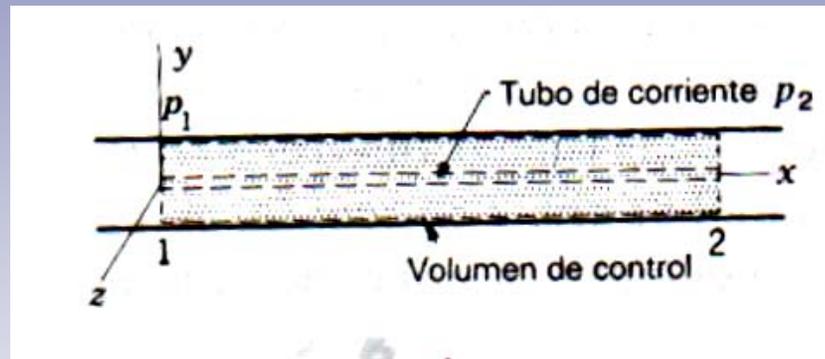


Descenso de la presión a medida que avanza el fluido: viscosidad, rozamiento interno

**VAMOS A CUANTIFICAR ESTAS PÉRDIDAS.....**

Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería recta y horizontal:

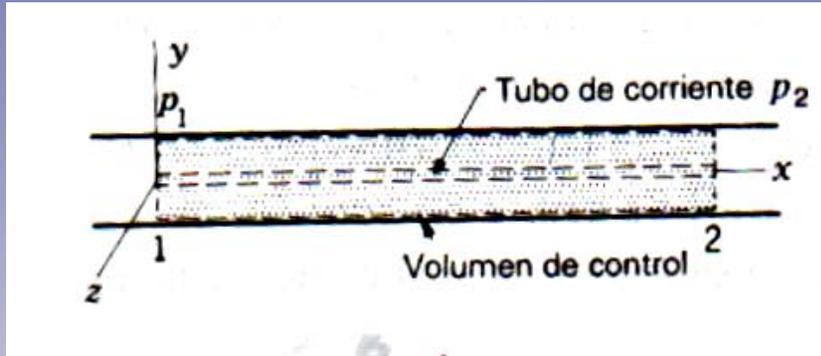
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left( \frac{V^2}{2} + gz + u \right) (\rho dV) + \int_S \left( \frac{V^2}{2} + gz + u + \frac{P}{\rho} \right) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$$



$$\frac{dQ}{dt} = \left[ \left( \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left( \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \int_S \rho V dS$$

$$\frac{dQ}{dt} = \left[ \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + (gz_2 - gz_1) + \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \int_S \rho V dS$$

Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería recta y horizontal:

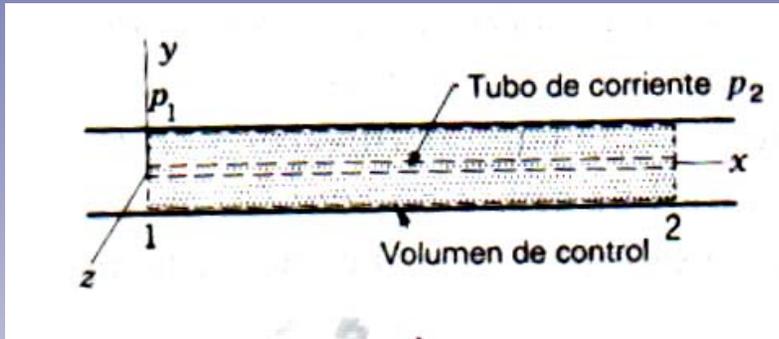


$$\frac{dQ}{dt} = \left[ \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right] \int_S \rho V dS$$

$$\frac{dQ}{dt} = \left[ \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right] \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = \left[ -\frac{dQ}{dm} \right]$$

$$dQ \leq 0$$

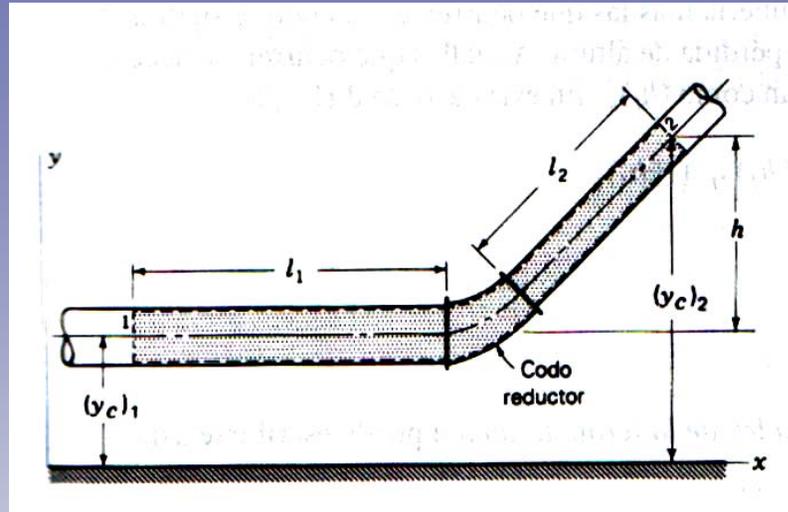
Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería recta y horizontal:



$$\frac{\Delta p}{\rho} = \left[ -\frac{dQ}{dm} \right] \Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta p}{g\rho}$$

- Pérdida de energía por unidad de masa del fluido debido a la fricción:  
transferencia de calor a los alrededores
- Pérdida de altura de carga  $\Delta h$ : pérdida de presión por unidad de peso

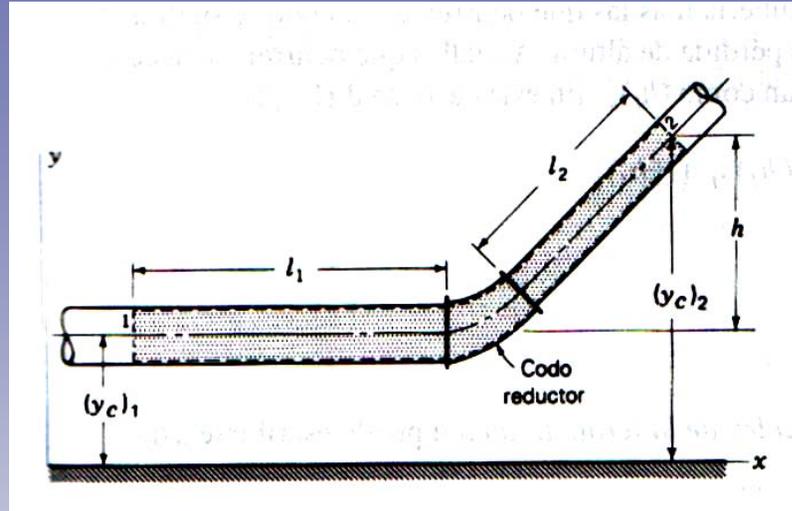
Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería inclinada y con cambio en la sección:



$$\frac{dQ}{dt} = \left[ \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + (gy_2 - gy_1) + \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dQ}{dm} = \left[ \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + (gy_2 - gy_1) + \left( \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) \right]$$

## Flujo permanente, incompresible, viscoso y laminar en tubería inclinada y con cambio en la sección:



$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = \left[ -\frac{dQ}{dm} \right] + \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + g(y_2 - y_1) \Rightarrow \Delta H = \frac{\Delta p}{g\rho}$$

$\Delta H$  : - pérdida de altura por cambio de configuración del flujo  
- pérdida de altura por fricción

Ecuación de Bernoulli modificada:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$\Delta H_{12}$  PÉRDIDA DE CARGA O PÉRDIDA DE ALTURA TOTAL:

- PÉRDIDAS DE ALTURA POR FRICCIÓN
- PÉRDIDAS DE CARGA MENORES: pérdida de altura por cambio de configuración del flujo y accesorios

## 16.3. Pérdidas de carga o de altura

### I. PÉRDIDAS DE CARGA DEBIDAS A LA FRICCIÓN:

Dependientes de:

- velocidad
- tipo de fluido
- geometría del sistema
- rugosidad de la superficie de la tubería

$$\Delta h = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

L : longitud de la tubería

d: diámetro

f: coeficiente de fricción ( Re, rugosidad, sección)

**RESULTADO GENERAL:** proporcional al cuadrado de la velocidad

## EXPRESIONES PARA EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN:

a) RÉGIMEN LAMINAR ( $Re < 2300$ ):

### TUBERÍAS CILÍNDRICAS

$$f = \frac{64}{Re}$$

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu}$$

### TUBERÍAS NO CILÍNDRICAS

$$f = \frac{K}{Re}$$

**K : factor geométrico**

**56,91 para un cuadrado**

**62,19 para un rectángulo (2 : 1)**

**76,28 para un rectángulo (5 : 1)**

## b) RÉGIMEN TURBULENTO ( $Re > 2300$ ):

### 1. Para tuberías lisas:

-  $Re$  (3000, 100.000):

$$f = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$

Fórmula de Blasius

-  $Re$  (100.000, 3.000.000):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8$$

Ecuación de Von Karman

## b) RÉGIMEN TURBULENTO ( $Re > 2300$ ):

### 2. Para tuberías rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{d}{2\varepsilon}\right) + 1,74$$

**d:** diámetro

**$\varepsilon$ :** coeficiente de rugosidad de la tubería

Tipo de revestimiento (nuevo)	Valores de $\varepsilon$ en cm
Latón	0.00015
Cobre	0.00015
Hormigón	0.03-0.3
Fundición revestida de cemento	0.00024
Hierro galvanizado	0.006-0.024
Hierro forjado	0.003-0.009
Acero comercial y soldado	0.003-0.009
Madera	0.018-0.09

## b) RÉGIMEN TURBULENTO ( $Re > 2300$ ):

3. Para todas las tuberías:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left[ \frac{\varepsilon}{d} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f}} \right]$$

Hydraulic Institute de Estados Unidos: ecuación de Colebrook

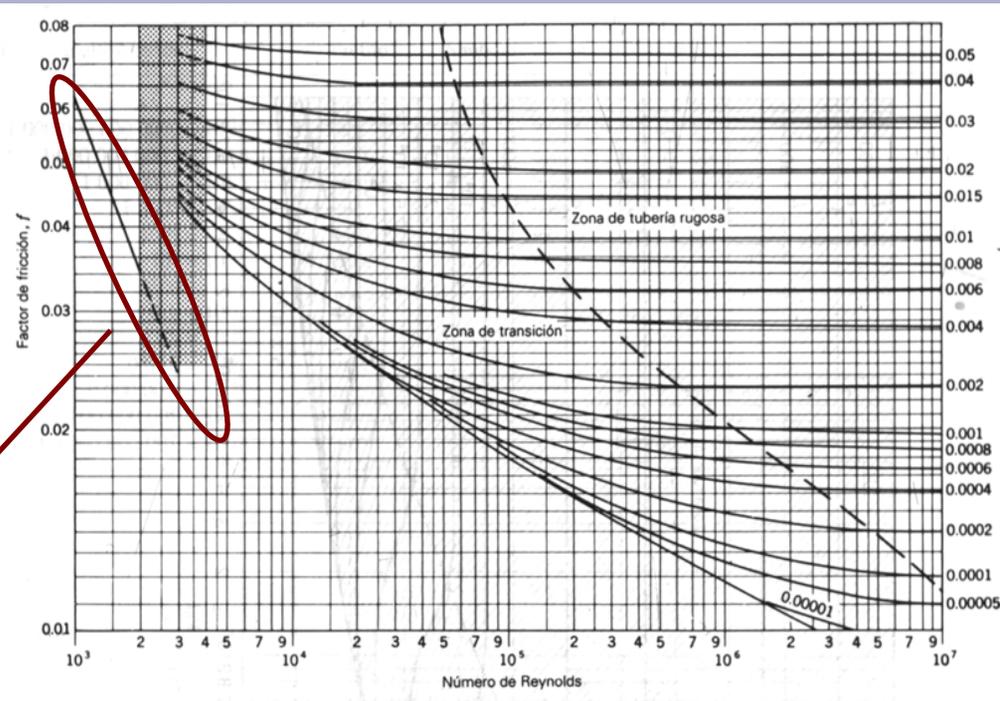
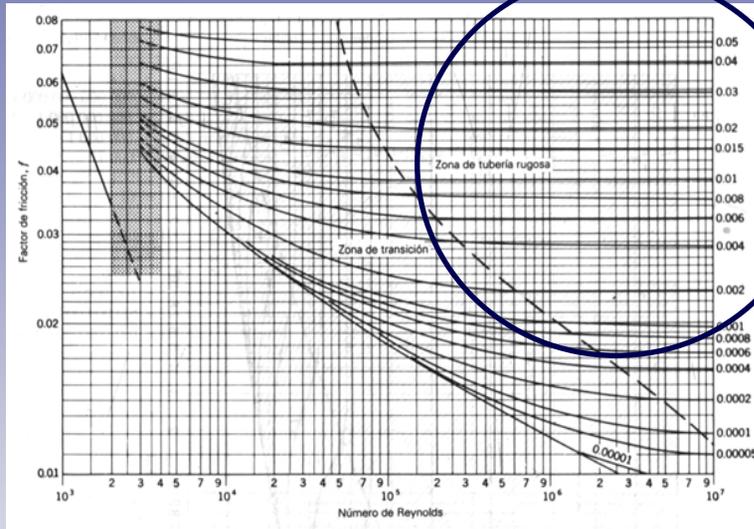


DIAGRAMA  
DE  
MODDY

Flujo laminar

## b) RÉGIMEN TURBULENTO ( $Re > 2300$ ):

### 3. Para todas las tuberías:



**Zona de tubería rugosa:  
f no depende de Re**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left[ \frac{\epsilon}{d} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f}} \right] \Rightarrow \frac{\epsilon}{d} \gg \frac{9,35}{Re \sqrt{f}}$$

$$f = \frac{1}{\left[ 1.14 - 2 \log \left( \frac{\epsilon}{d} \right) \right]^2}$$

## II. PÉRDIDAS DE CARGA MENORES:

### DEBIDAS O LOCALIZADAS EN:

- entrada o salida de tuberías
- ensanchamiento o contracción brusca
- curvas, codos, tes y otros accesorios
- válvulas abiertas o parcialmente cerrada
- ensanchamientos o contracciones graduales

- Teoría pobre
- Medida experimental
- Válvulas: diseño del fabricante

$$\Delta h = K \frac{v^2}{2g}$$

**K: condiciones de flujo, geometría del componente, Re, proximidad de otros elementos**

## PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada)	
— conexión a ras de la pared	$0,50 \frac{V_2^2}{2g}$
— tubería entrante	$1,00 \frac{V_2^2}{2g}$
— conexión abocinada	$0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas*	$K \frac{V^2}{2g}$
Algunos valores corrientes de $K$ son:	
45°, codo . . . . .	0,35 a 0,45
90°, codo . . . . .	0,50 a 0,75
Tes . . . . .	1,50 a 2,00
Válvulas de compuerta (abierta) . . .	aprox. 0,25
Válvulas de control (abierta) . . . . .	aprox. 3,0

\* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.

**V:** velocidad media

**V<sub>1</sub>:** velocidad aguas arriba

**V<sub>2</sub>:** velocidad aguas abajo

## VALORES DE $K$ Contracciones y ensanchamientos

Contracción brusca		Ensanchamiento gradual para un ángulo total del cono						
$d_1/d_2$	$K_c$	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

Fuente: Valores tomados de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, 1954.

### III. PÉRDIDAS DE CARGA DEBIDAS A UNA MÁQUINA

- **BOMBAS:** aportan energía al flujo
- **TURBINAS:** extraen energía del flujo

$$\Delta h_{bomba} = \frac{P_{bomba}}{gQ}$$

$$\Delta h_{turbina} = \frac{P_{turbina}}{gQ}$$

- energía por unidad de peso al fluido que atraviesa la bomba o turbina
- deben incluirse con su signo correspondiente

### III. PÉRDIDAS DE CARGA DEBIDAS A UNA MÁQUINA

- **BOMBAS:** aportan energía al flujo
- **TURBINAS:** extraen energía del flujo

$$\Delta h_{bomba} = \frac{P_{bomba}}{gQ}$$

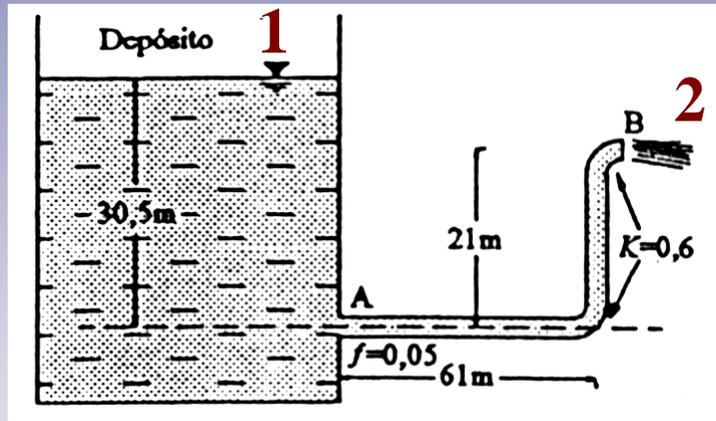
$$\Delta h_{turbina} = \frac{P_{turbina}}{gQ}$$

- energía por unidad de peso al fluido que atraviesa la bomba o turbina
- deben incluirse con su signo correspondiente

## EJEMPLO:

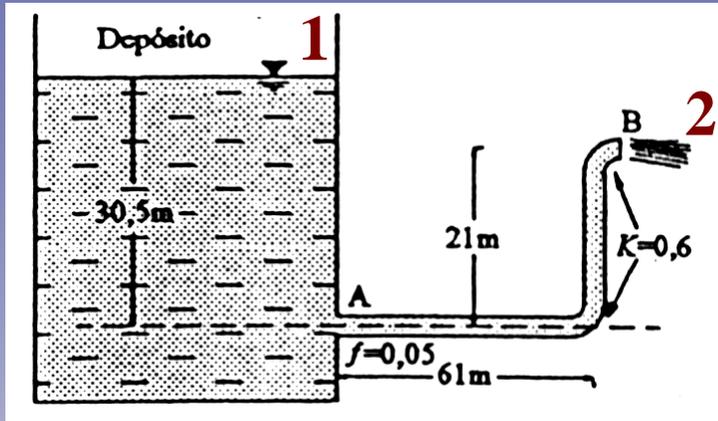
Un sistema de tuberías transporta agua desde un depósito y al descarga en forma de un chorro libre como muestra la figura.

¿Qué caudal ha de esperarse a través de una tubería de acero comercial de 203 mm con los accesorios indicados?



$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$



$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\Delta H_{12} = \Delta h_{salida} + \Delta h_{fricción} + 2\Delta h_{codo}$$

$$\Delta h_{fricción} = f \frac{L}{d} \frac{V_2^2}{2g}$$

#### PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada)	0,50 $\frac{V_2^2}{2g}$
— conexión a ras de la pared	
— tubería entrante	1,00 $\frac{V_2^2}{2g}$
— conexión abocinada	0,05 $\frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	1,00 $\frac{V_2^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas*	$K \frac{V^2}{2g}$
Algunos valores corrientes de K son:	
45°, codo	0,35 a 0,45
90°, codo	0,50 a 0,75
Tes	1,50 a 2,00
Válvulas de compuerta (abierta)	aprox. 0,25
Válvulas de control (abierta)	aprox. 3,0

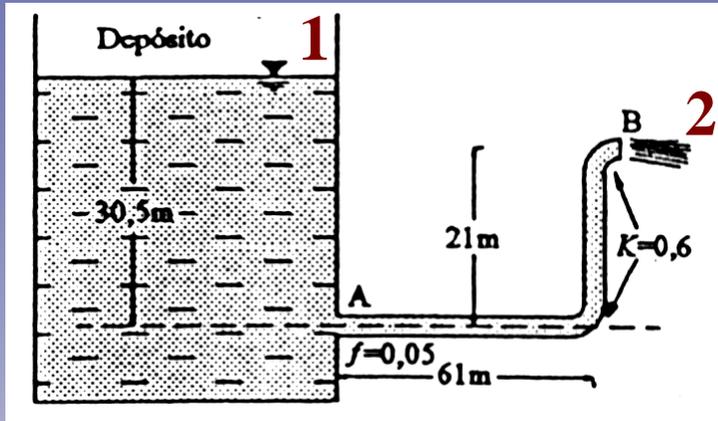
\* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.

## PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada)	— conexión a ras de la pared $0,50 \frac{V_2^2}{2g}$
	— tubería entrante $1,00 \frac{V_2^2}{2g}$
	— conexión abocinada $0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas*	$K \frac{V^2}{2g}$
Algunos valores corrientes de $K$ son: 45°, codo ..... 0,35 a 0,45 90°, codo ..... 0,50 a 0,75 Tes ..... 1,50 a 2,00 Válvulas de compuerta (abierta) ... aprox. 0,25 Válvulas de control (abierta) ..... aprox. 3,0	

\* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.



$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

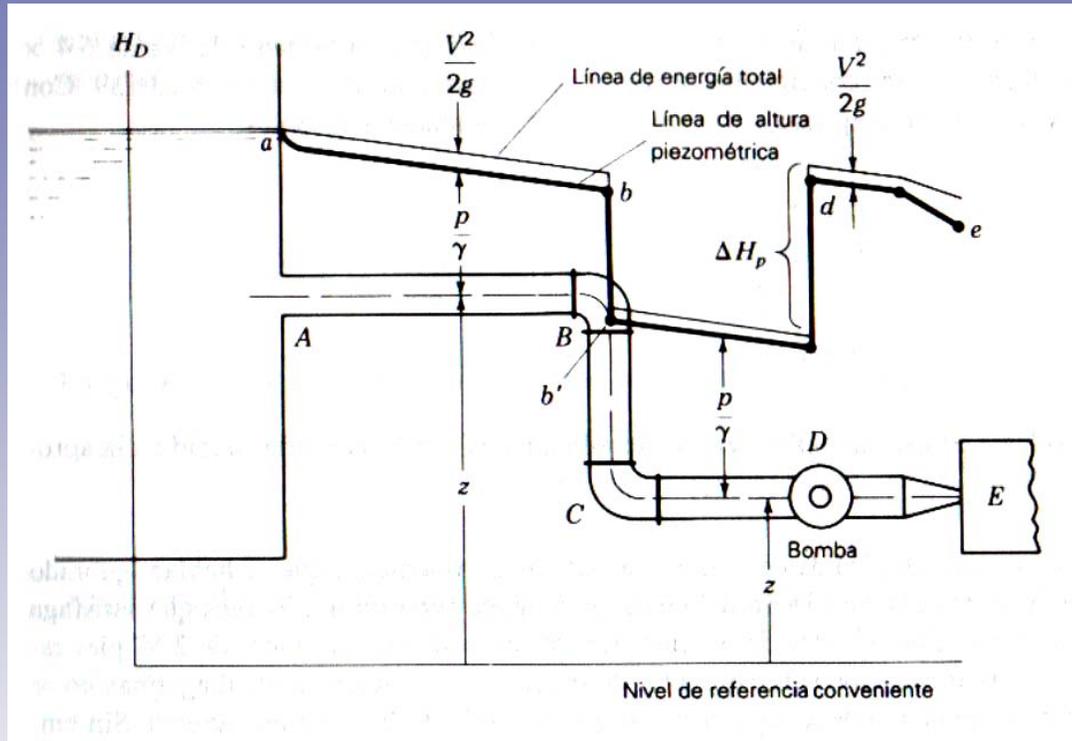
$$\Delta H_{12} = \Delta h_{salida} + \Delta h_{fricción} + 2\Delta h_{codo}$$

$$\Delta h_{salida} = 0,5 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Delta h_{codo} = 0,6 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Delta h_{fricción} = f \frac{L}{d} \frac{V_2^2}{2g}$$

## IV. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS PÉRDIDAS DE CARGA



$$h = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z - \Delta h_{p\acute{e}rdidas} + \Delta h_{ganancias} \quad \text{Altura total}$$

$$h' = \frac{P}{\rho g} + z \quad \text{Altura piezométrica}$$