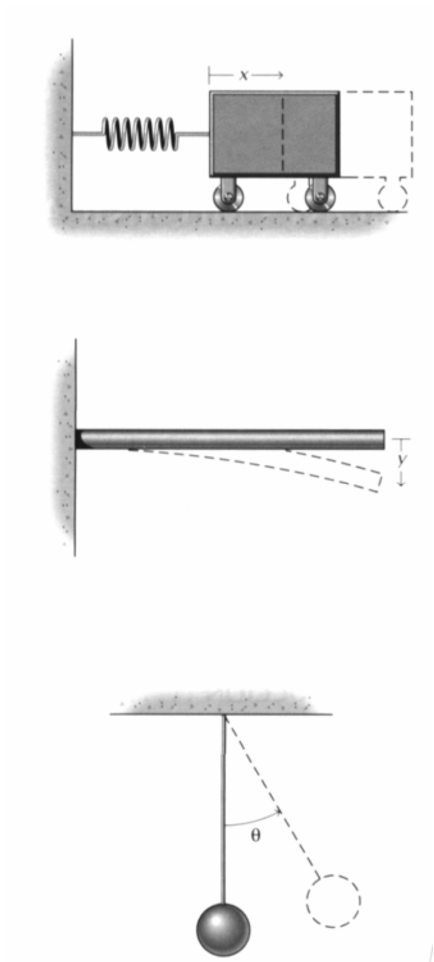
C) VIBRACIONES Y ONDAS

1. VIBRACIONES MECÁNICAS

1. 1. INTRODUCCIÓN

Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a una posición de equilibrio. En muchos dispositivos conviene que haya movimientos vibratorios como el péndulo utilizado para regular un reloj o la cuerda pulsada de una guitarra. Sin embargo, las vibraciones que se producen en las estructuras a causa de terremotos, del viento o de la circulación de vehículos próximos pueden dañarlas e incluso destruirlas

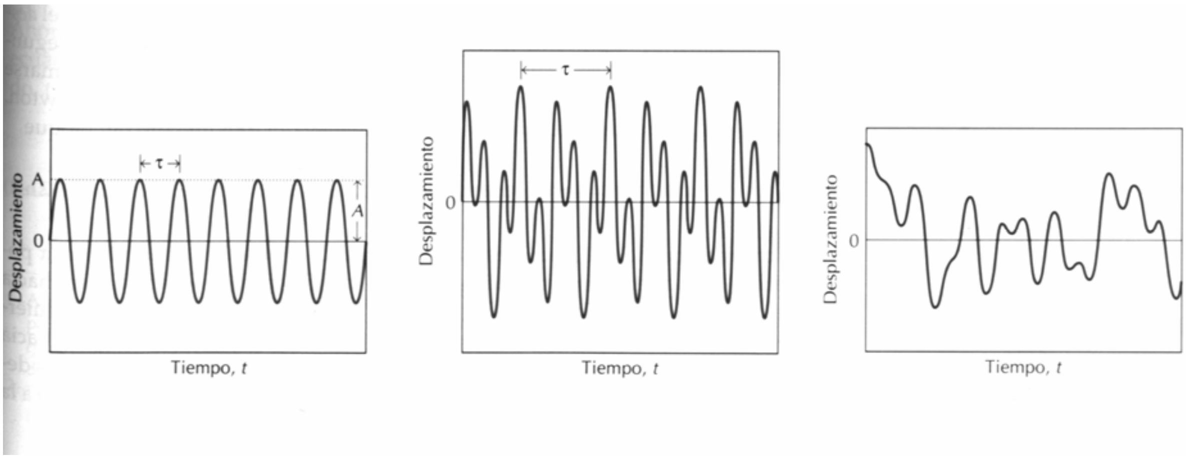
La vibración mecánica aparece cuando aplicando una fuerza adicional se desplaza un punto material o un cuerpo rígido que estaba en equilibrio estable. Además sobre el cuerpo se ejercen fuerzas recuperadoras que le hacen volver a su posición de equilibrio. No obstante cuando el cuerpo alcanza su posición de equilibrio tiene velocidad no nula y sobrepasa dicha posición. En muchos casos, la posición o el movimiento del cuerpo se pueden especificar por completo con una coordenada. Se dice que estos cuerpos tienen un ***grado de libertad.***



En general si son necesarias n variables para especificar completamente la posición de un sistema mecánico decimos que el sistema tiene n grados de libertad. Así por ejemplo, un disco que se moviera en el plano sin restricciones tendría tres grados de libertad, por una parte los desplazamientos x e *y* de su centro de gravedad y por otro parte el ángulo de rotación alrededor del centro de gravedad. Un sólido rígido que se mueve libremente tiene seis grados de libertad, tres de traslación que dan la posición en el espacio de su centro de masas en cada instante y tres de rotación. Por lo tanto son necesarias seis coordenadas para expresar su posición en el espacio.

No necesariamente un sistema de un grado de libertad es un sistema simple. Por ejemplo, un motor de automóvil, con toda su complejidad mecánica, si está montado rígidamente tiene la posición de todos sus elementos en cada instante de tiempo descrita por una única variable, que puede ser el ángulo de giro del cigüeñal. El valor de ese ángulo determina la posición de todos los elementos móviles del motor y por tanto el sistema tiene un único grado de libertad.

Las oscilaciones que se repiten uniformemente reciben el nombre de ***periódicas***, las no se repiten uniformemente se denominan ***aperiódicas o aleatorias***.



Características importante de una oscilación periódica son:

- **Periodo (T):** tiempo que ha de transcurrir para que se repita el movimiento.
- **Frecuencia (f):** la inversa del periodo o número de vibraciones u oscilaciones por segundo.
- **Amplitud (A):** desplazamiento máximo que sufre el cuerpo respecto a su posición de equilibrio.

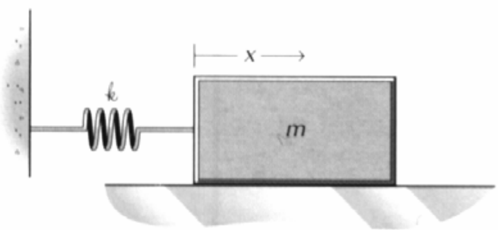
Las vibraciones mecánicas se clasifican en vibraciones libres también llamadas ***vibraciones naturales no amortiguadas y vibraciones amortiguadas.*** Las vibraciones libres las originan y mantienen fuerzas tales como las fuerzas gravitatorias o fuerzas elásticas. Cuando fuerzas como rozamiento, resistencia del aire, viscosidad... sean despreciables se dice que la vibración es no amortiguada. Cuando no sean despreciables dichas fuerzas resistivas, se dice que la vibración es amortiguada. Las vibraciones libres no amortiguadas se repiten a sí mismas indefinidamente, las vibraciones libres amortiguadas llegarían a desaparecer. Esa claro que todo sistema real contiene fuerzas de rozamiento que llegarían a detener las vibraciones libres. Sin embargo, en muchos sistemas la pérdida de energía debida a la resistencia del aire y otras fuerzas resistivas en tan pequeña que el análisis basado en un amortiguamiento despreciable da, a menudo, resultados técnicamente satisfactorios. Si el oscilador es amortiguado la pérdida de energía es posible compensarla aplicando una fuerza externa que transfiera energía al sistema, en ese caso tenemos ***vibraciones forzadas***. Las vibraciones forzadas las originan y las mantienen fuerzas periódicas aplicadas exteriormente.

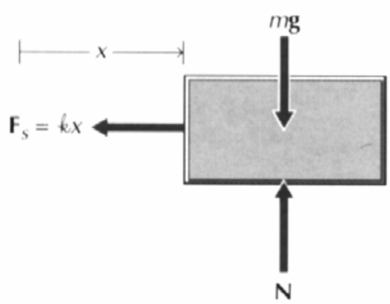
Cada edificación es un oscilador con un conjunto de frecuencias naturales, frecuencias en las que vibran con mayor facilidad, que dependen de su rigidez, de su masa y de los detalles de su construcción. La fuerza periódica externa la puede proporcionar por ejemplo las sacudidas del terreno en un terremoto. Cuando la frecuencia de las ondas sísmicas coincide con la frecuencia natural de un edificio, éste comienza a vibrar con mayor fuerza y puede terminar por destruirse. A esta situación se la conoce como ***resonancia***. Veremos que la resonancia es un fenómeno digno de tomarse en cuenta en el diseño y construcción tanto de puentes como de edificios.

1.2. VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Cuando la fuerza recuperadora que actúa sobre una partícula es proporcional al desplazamiento de la partícula respecto a su posición de equilibrio y dicha fuerza está siempre dirigida hacia dicha posición de equilibrio se produce una clase especial de vibración o movimiento periódico llamado ***movimiento armónico simple***. La mayoría de las vibraciones que aparecen en las aplicaciones técnicas se pueden representar o aproximar mucho a un movimiento armónico simple. Al servir como modelo de análisis de una gran cantidad de problemas relacionados con las vibraciones conviene estudiar en detalle la ecuación de este movimiento.

Un modelo útil para este estudio es el formado por un objeto de masa m conectado a un muelle horizontal sin rozamientos. Si el muelle no está estirado o contraído, el objeto (lo trataremos como partícula eliminando los efectos de tamaño del objeto) está en reposo en su posición de equilibrio. Desplazando el bloque una distancia x_0 y soltándolo con una velocidad v_0 se induce una vibración. La fuerza recuperadora elástica que ejerce el resorte es $F = -kx$ según la ley de Hooke y esta dirigida siempre hacia la posición de equilibrio.





Aplicando al bloque la segunda ley de Newton, tenemos la ecuación diferencial del movimiento del bloque:

$$F_X = ma_X = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y está dirigido hacia ella. Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple. La ecuación deducida describe el movimiento armónico simple y suele escribirse en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

siendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la frecuencia natural de oscilación del sistema. Esta ecuación constituye un tipo conocido de ecuación diferencial lineal, homogénea de segundo orden cuya solución general puede escribirse en la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

o bien en la forma:

$$x(t) = Asen(\omega_0 t - \alpha)$$

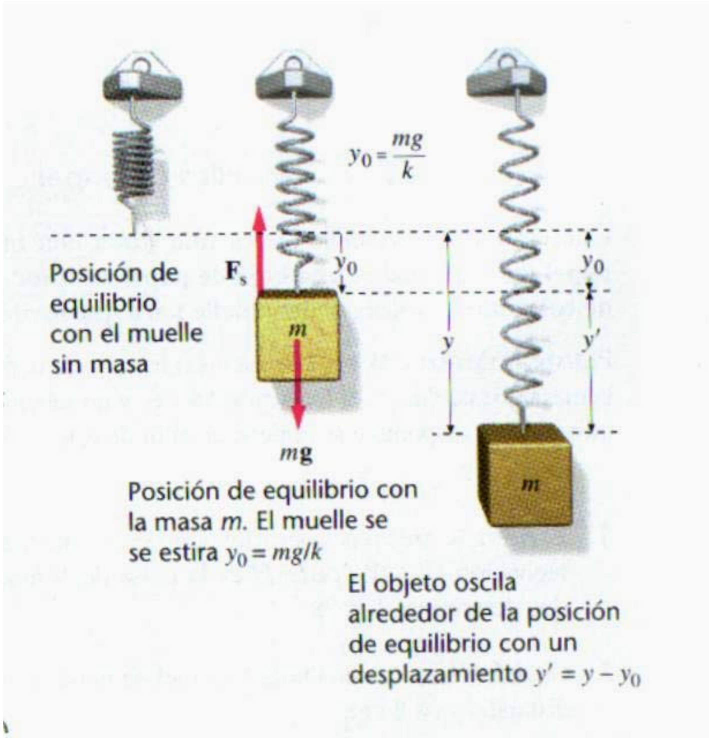
o como una superposición de éstas. En dichas ecuaciones A y α son constantes de integración que hay que determinar a partir de las condiciones iniciales del problema . La constante A es la amplitud o desplazamiento máximo con respecto a la posición de equilibrio y la constante α se le llama ***ángulo de fase o constante de fase***. Esta constante de fase corresponde a la fase cuando t =0. El periodo de oscilación viene dado por $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y la frecuencia de la oscilación, $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$. La primera derivada de cualquiera de las expresiones nos da la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega_0 t - \alpha)$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega_0 t - \alpha) = -\omega^2 x$$

Conviene recordar que los resultados obtenidos no se limitan a la vibración de un punto material sobre una superficie horizontal. Pueden utilizarse para analizar el movimiento vibratorio de un cuerpo siempre que las ecuación del movimiento se reduzca a la obtenida. Por ejemplo cuando un objeto cuelga de un muelle vertical además de la fuerza del muelle hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso según la siguiente figura:



Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje y, la fuerza del muelle sobre el objeto es $-ky$. La fuerza neta sobre el objeto es:

$$\sum F_y = -k(y + y_0) + mg$$

siendo y_0 la longitud que se alarga el muelle cuando el objeto está en equilibrio, por tanto $ky_0 = mg$ por lo que :

$$\sum F_y = -ky$$

y la segunda ley de Newton $\sum F_y = ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$ nos lleva a:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

que es la ecuación del movimiento armónico simple en donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Entonces, el objeto oscila respecto a la posición de equilibrio con la misma frecuencia con la que se movería un objeto atado a un muelle horizontal.

1.3. ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En cualquier instante la energía potencial del oscilador libre es:

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t - \alpha)$$

que no es una constante sino que fluctúa con el movimiento armónico sin hacer nunca negativa, es nula cuando pasa por la posición de equilibrio y máxima en el punto de máxima amplitud. Por otra parte, la energía cinética es de la forma:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 sen^2(\omega_0 t - \alpha)$$

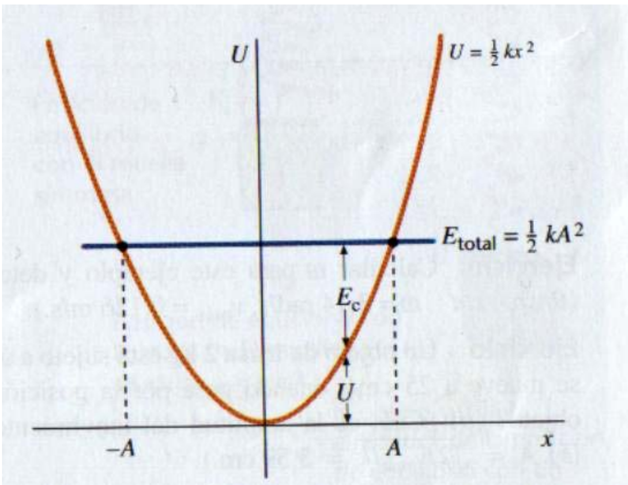
La energía cinética es nula cuando la amplitud alcanza su valor máximo ya que en esa posición la velocidad es nula, mientras que es máxima cuando pasa por la posición de equilibrio, ya que ahí su velocidad es máxima. La energía total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_P + E_C = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \alpha) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 sen^2(\omega_0 t - \alpha) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Esta energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento y cuando un objeto oscila con movimiento armónico simple las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma la energía total se mantiene constante durante el movimiento.

Para un objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando atraviesa la posición de equilibrio, la velocidad del objeto es máxima, la energía potencial del sistema es cero y la energía total es igual a la energía cinética.

Cuando el objeto sobrepasa el punto de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la energía potencial del sistema crece hasta que el objeto de nuevo se detiene momentáneamente en su desplazamiento máximo. En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante. La siguiente figura muestra los gráficos de la energía cinética y potencial en función del tiempo:



En la figura se ha representado la energía potencial en función de *x*. La energía total es constante y está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de la energía potencial en $x = A$ y $x = -A$. Éstos son los puntos en los que los objetos, en su oscilación, cambian el sentido de la velocidad y vuelven hacia la posición de equilibrio. Dado que $U \leq E_{total}$ el movimiento está restringido a $A \leq x \leq A$.

1.4. MÉTODOS ENERGÉTICOS

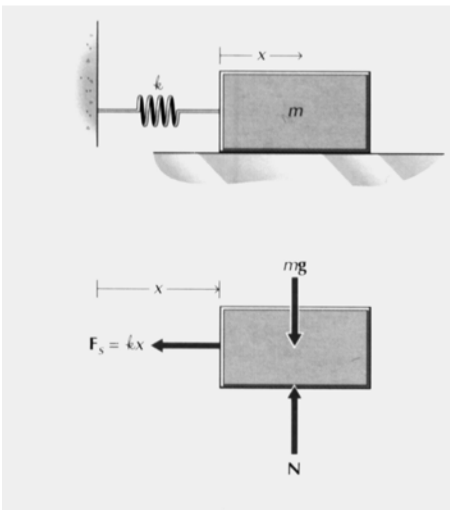
El método seguido en el apartado anterior ha consistido en obtener la ecuación diferencial del movimiento mediante la aplicación de la segunda ley de Newton. Dicha ecuación integrada nos da la frecuencia, período y amplitud de la vibración. No obstante, si sobre el sistema no se ejercen fuerzas de rozamiento o de amortiguamiento el teorema de conservación de la energía o de las fuerzas vivas también es válido para deducir la ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia propia de vibración.

Aún cuando todos los sistemas reales pierden energía en los rozamientos, en muchos casos el amortiguamiento es muy débil y al considerar estos sistemas exentos de amortiguamiento, los errores que se comenten al determinar la frecuencia propia de vibración resultan se muy pequeños.

El método del trabajo y la energía resulta especialmente adecuado para los problemas en que intervienen puntos materiales conectados rígidamente y sistemas de cuerpos rígidos conectados entre sí. Para ello se obtiene en un instante dado la energía mecánica del sistema, la derivada temporal de la energía calculada debe ser cero si ésta se conserva:

$$E_T = E_C + E_P = cte \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = \frac{d(E_C + E_P)}{dt} = 0$$

Si consideramos de nuevo el bloque que se desliza por una superficie horizontal, cuando se desplaza el bloque una distancia x en el sentido positivo de las abscisas, su energía cinética es $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{dx}{dt}\right]^2$ y la energía potencial de la fuerza elástica que ejerce el resorte es $E_P = \frac{1}{2}kx^2$.



Entonces derivando respecto al tiempo la energía mecánica tenemos:´

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d(E_C + E_P)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right] = (kx + m\ddot{x})\dot{x} = 0$$

Pero como la velocidad $\dot{x}$ no es nula en todo momento, la ecuación nos da la ecuación diferencial del movimiento:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que coincide con la ecuación anteriormente deducida.

La frecuencia y el periodo propios se pueden determinar también utilizando el principio de conservación de la energía sin deducir antes la ecuación diferencial del movimiento. En apartados anteriores vimos que cuando un sistema vibra con movimiento armónico simple en torno a su posición de equilibrio la posición y la velocidad del sistema se pueden escribir en la forma:

$$x(t) = Asen(\omega_0 t - \alpha)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

En estas expresiones observamos que la posición máxima se obtiene cuando la velocidad es nula. Es decir, la energía potencial es máxima cuando la energía cinética es nula. Por tanto, la energía mecánica total del sistema es:

$$E_C + E_P = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

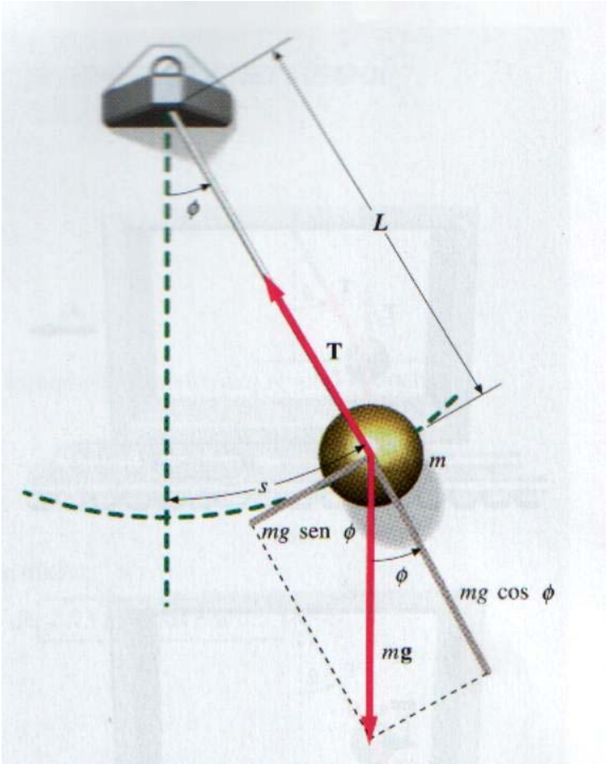
1.5. OTROS EJEMPLOS DE MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Si las ecuaciones del movimiento no se reducen a la forma de la ecuación:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

el movimiento no será armónico simple. Sin embargo existen muchos movimientos que se aproximan bastante mediante dicha ecuación mientras la amplitud del movimiento es pequeña. Tales movimientos pueden aproximarse a movimientos armónicos simples y sus resultados son aplicables directamente. Tal es el caso por ejemplo **el péndulo simple**:

Denominamos péndulo simple a un sistema compuesto por una masa *m* supuestamente puntual suspendida de un punto *O* mediante una cuerda de longitud *L* y masa despreciable. Veremos que este péndulo simple describe un movimiento armónico simple cuando se tienen pequeñas oscilaciones de la masa *m*:



Las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso mg y la tensión T de la cuerda. Cuando la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, para la componente tangencial del peso la segunda ley de Newton nos da:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow -mgsen\phi = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

en donde la longitud del arco s está relacionado con el ángulo mediante la expresión $s = L\phi$. Derivando dos veces con respecto al tiempo ambos lados de dicha expresión se tiene:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\phi$$

Para valores pequeños de ϕ, $sen\phi \approx \phi$ y por tanto:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\phi$$

Esta ecuación es de la misma forma que la obtenida para un objeto ligado a un muelle. El movimiento de un péndulo es por lo tanto, aproximadamente armónico simple para pequeños desplazamientos angulares. En este caso $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ es la frecuencia angular del movimiento del péndulo. En consecuencia, el periodo del péndulo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La solución de la ecuación es:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

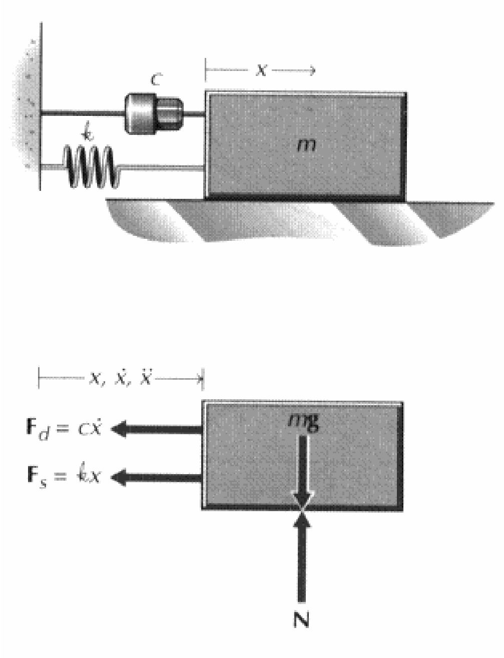
en donde ϕ_0 es el desplazamiento angular máximo. De acuerdo con la expresión del periodo cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, lo cual está de acuerdo con lo observado experimentalmente. Obsérvese también que la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación, para amplitudes pequeñas, lo cual es una característica general del movimiento armónico simple.

Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico deja de ser armónico simple.

1.6. VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

El análisis de las vibraciones libres no amortiguadas es una idealización de los sistemas reales, ya que no tienen en cuenta la pérdida de energía en los rozamientos, son sistemas que oscilan indefinidamente bajo la acción de una fuerza de recuperación lineal. Sin embargo, los sistemas reales pierden energía en los rozamientos y se dice que el movimiento se amortigua y llegan a pararse. Cuando la energía que pierda el sistema sea pequeña los resultados obtenidos en el apartado anterior están a menudo de acuerdo con los sistemas reales, al menos durante intervalos de tiempo cortos. Para intervalos de tiempo más prolongados y cuando las pérdidas de energía no sean pequeñas habrá que incluir los efectos de las fuerzas de rozamiento.

Existen varios tipos de fuerzas de rozamiento que pueden robar energía mecánica de un sistema de vibración. Un tipo muy habitual de fuerza resistiva es proporcional a la velocidad y actúa en dirección opuesta a la misma. Este tipo de fuerza se observa a menudo por ejemplo cuando un objeto oscila lentamente en un fluido, por ejemplo, el aire o el agua y en este curso de vibraciones es el único que vamos a considerar. Esta fuerza puede expresarse como $F_r = -\lambda v$ donde λ es la constante de amortiguamiento y v la velocidad en cada instante (en problemas físicos reales pueden aparecer otros tipos de fuerzas de rozamiento con distintas dependencias con la velocidad). Para ilustrar la vibración libre con amortiguamiento se puede añadir al sistema bloque – resorte un amortiguador en la forma que se indica en la figura:



Aplicando la segunda ley de Newton al bloque tenemos la ecuación diferencial de su movimiento:

$$F_X = ma_X = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -kx - \lambda v = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

que suele escribirse:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

siendo $2\gamma = \frac{\lambda}{m}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del oscilador o frecuencia angular sin amortiguamiento. Esta ecuación diferencial difiere de la del oscilador armónico libre en el término adicional $2\gamma\frac{dx}{dt}$ debido al amortiguamiento. La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que la solución de toda ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes tiene siempre la forma:

$$x(t) = De^{\lambda t}$$

donde las constantes D y λ deben satisfacer la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Aplicando la solución en la ecuación diferencial tenemos la ecuación:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

que tiene por raíces:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega$$

siendo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{\lambda^2}{4m^2}}$. El desplazamiento del bloque vendrá entonces dado por:

$$x(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde las constantes D_1 y D_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t})$$

donde según la fórmula de Euler $e^{i\omega} = \cos\omega + isen\omega$. Esta solución tiene tres tipos de comportamiento según que la constante de amortiguamiento γ sea igual o mayor que ω_0. A continuación vamos a analizar por separados las distintas posibilidades:

a) Sistemas subamortiguados ($\omega_0 \succ \gamma$):

Si $\omega_0 \succ \gamma$, ω es real y la solución que se acaba de obtener puede escribir de la siguiente manera:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t})$$

$$D_1 = Ae^{-i\alpha} \qquad D_2 = Ae^{i\alpha}$$

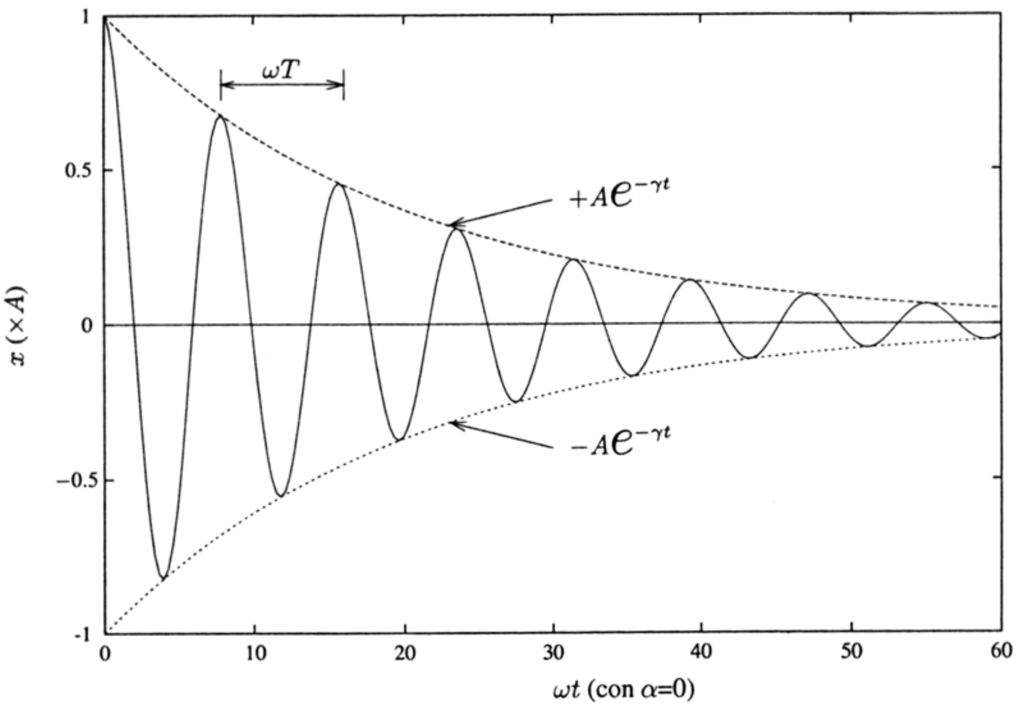
$$x(t) = e^{-\gamma t}(D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t}(Ae^{-i\alpha} e^{i\omega t} + Ae^{i\alpha} e^{-i\omega t})$$

O en la forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \alpha)$$

Como ya hemos indicado, las constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

La solución del oscilador libre subamortiguado es similar a la solución del oscilador libre con la nueva característica de que la amplitud depende del tiempo $Ae^{-\gamma t}$. Por otro lado la frecuencia de la oscilación amortiguada no es la frecuencia de la oscilación libre $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ sino que depende del amortiguamiento, es decir, al frenarse el movimiento aumenta el período y disminuye la frecuencia de las oscilaciones. En la figura se representa gráficamente la posición en función del tiempo de este tipo de oscilación libre subamortiguada:



Cuando la fuerza resistiva es relativamente pequeña el carácter oscilatorio del movimiento se conserva, pero la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo y el movimiento en último término cesa. La envolvente de la curva de oscilación representan el factor exponencial que aparece en la ecuación.

Como la amplitud de la oscilación amortiguada disminuye monótamente con el tiempo no se repetirá nunca a sí misma. Por tanto, la oscilación amortiguada no tendrá período en el sentido que se definió para las vibraciones libres no amortiguadas. Sin embargo por semejanza de la ecuación obtenida con la del movimiento armónico simple ω es la frecuencia angular amortiguada y a partir de ella se puede definir el período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y la frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ amortiguados. Es interesante observar que estas magnitudes son constantes aunque no lo sea la amplitud.

b) Sistema críticamente amortiguado ($\omega_0 = \gamma$):

A medida que la intensidad de la fuerza resistiva aumenta las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez. Cuando $\omega_0 = \gamma$ el sistema no oscila y se dice que está ***críticamente amortiguado***. En este caso la solución general de la ecuación diferencial es una función de la forma:

$$x(t) = (B + Ct)e^{-\gamma t}$$

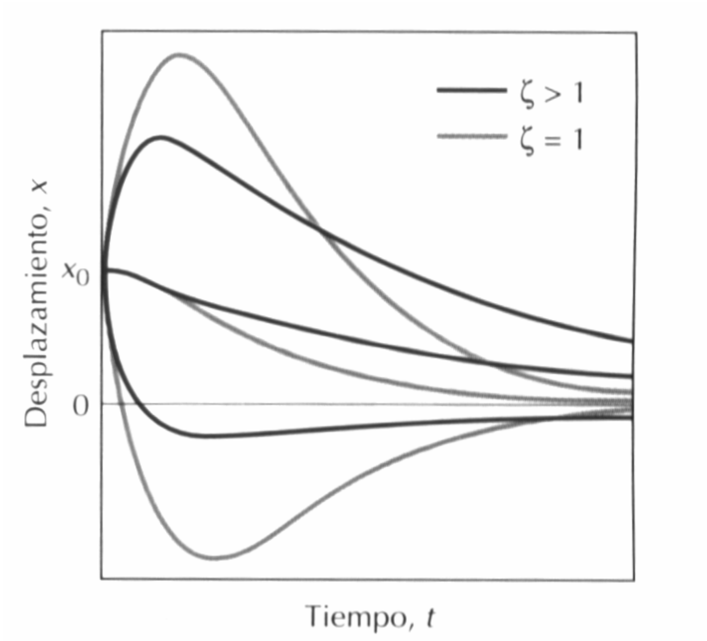
donde *B* y *C* con constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad. En este caso, el sistema vuelve a su posición de equilibrio siguiendo una curva exponencial en el tiempo. Es decir, el amortiguamiento crítico es la menor cantidad de amortiguamiento para que el sistema no oscile. Un sistema con amortiguamiento crítico pasará al estado de reposo en menos tiempo que cualquier otro sistema que parta de las mismas condiciones iniciales. Hay ocasiones en la que este tipo de amortiguamiento es muy interesante. Por ejemplo, en los amortiguadores de los coches se intenta que trabajen en condiciones próximas al amortiguamiento crítico para evitar oscilaciones de excesiva duración.

c) Sistema sobreamortiguado ($\omega_0 \prec \gamma$):

Si el medio es altamente viscoso, y los parámetros cumplen la condición $\omega_0 \prec \gamma$, en este caso se define $s = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ y la solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = (Ae^{-st} + Be^{st})e^{-\gamma t}$$

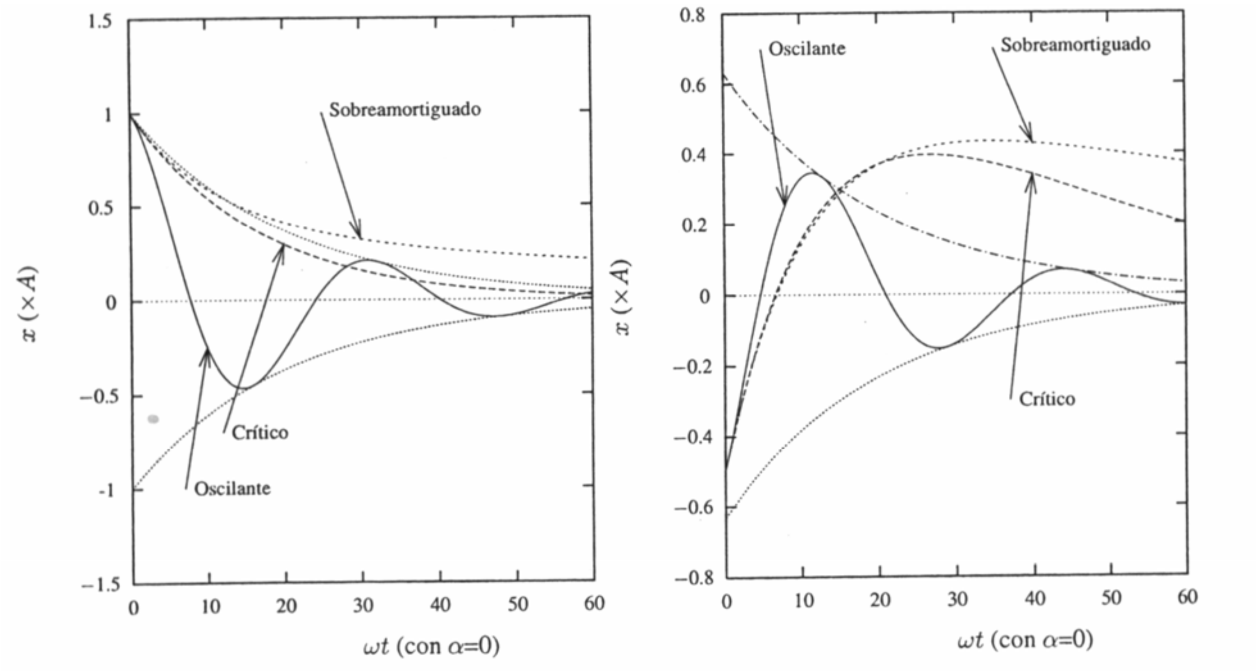
donde *A* y *B* con constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad y se dice que el sistema está ***sobreamortiguado***. De nuevo, en este caso, al desplazar el sistema, éste no oscila, sino que retorna simplemente a la posición de equilibrio. En la siguiente figura podemos ver curvas que representan el desplazamiento de un sistema en los casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento partiendo del mismo desplazamiento y velocidad inicial:



$$\xi = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

En estos dos casos como el sistema no oscila no es posible redefinir un período o frecuencia asociados a estos movimientos.

Como ejemplos de movimientos oscilatorio o subamortiguado, con amortiguamiento crítico y sobreamortiguado se presentan las siguientes figuras para un valor determinado de la constante de amortiguamiento y a unas determinadas condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad:



1.7. VIBRACIONES FORZADAS

La energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye con el tiempo como resultado de la fuerza resistiva. Por tanto si se quiere tener un sistema que oscile de forma continua sin amortiguamiento aparente es necesario comunicarle la energía perdida a causa de la acción de las fuerzas de rozamiento. Es posible compensar esta pérdida de energía aplicando una fuerza externa que transfiera energía al sistema actuando en el sentido del movimiento del oscilador. Por ejemplo, se puede mantener a un niño balanceándose en un columpio dándole oportunos empujones en los momentos adecuados. La amplitud del movimiento permanece constante si la energía que se aporta en cada ciclo de movimiento es exactamente igual a la pérdida de energía mecánica en cada ciclo debida a las fuerzas resistivas.

Un ejemplo habitual de oscilador forzado es un oscilador amortiguado al que se le aplica una fuerza externa periódica armónica como $F_{ext} = F_o sen\omega t$ ò $F_{ext} = F_o \cos\omega t$ donde ω es la frecuencia angular y F_0 la amplitud de la fuerza externa. En general, la frecuencia ω de la fuerza externa es diferente de la frecuencia natural del oscilador ω_0. Este caso nos permite estudiar multitud de casos, ya que una fuerza periódica del tiempo no armónica se puede expresar mediante una serie de Fourier o suma de funciones armónicas simples.

La segunda ley de Newton en esta situación nos conduce a:

$$F_X = ma_X = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_o\cos\omega t = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_o\cos\omega t$$

que puede también escribirse en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

La solución general de esta ecuación diferencial se escribe como suma de dos partes**:**

$$x(t) = x_C(t) + x_P(t)$$

la solución complementaria y la solución particular. La parte complementaria es la solución que hemos estudiado para el oscilador amortiguado (al calcular las constantes que aparecen en la solución complementaria debe incluirse también la solución particular). La solución complementaria irá disminuyendo con el transcurso del tiempo. Como esta solución sólo será apreciable durante cierto tiempo generalmente corto a partir del inicio del movimiento, recibe el nombre de ***solución transitoria***. Tras un período suficientemente largo, el aporte de energía que realiza la fuerza externa es igual a la energía perdida por el sistema, se alcanza una situación estacionaria en el que las oscilaciones se producen con una amplitud constante. La solución de la ecuación cuando la parte transitoria de la solución ya ha desaparecido es la solución particular, llamada también solución permanente:

$$x = A_f \cos(\omega_f t - \alpha)$$

donde las constante A y α habrá que calcularlas de manera que se satisfaga la ecuación inicial. Para obtener los valores de A y α resulta más cómodo escribir la ecuación en forma exponencial compleja que forma que la solución escrita sería la parte de la siguiente expresión:

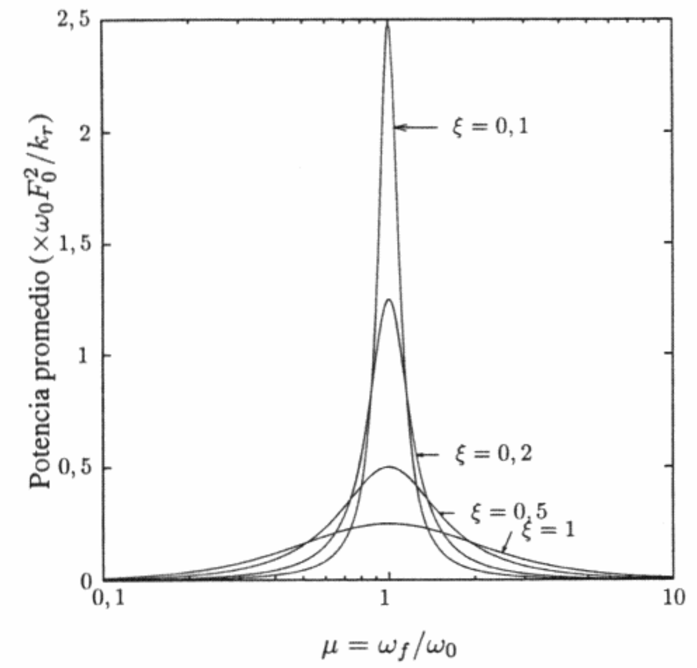
$$x = A_f e^{i(\omega_f - \alpha)}$$

Si sustituimos esta ecuación en la ecuación diferencial se obtiene:

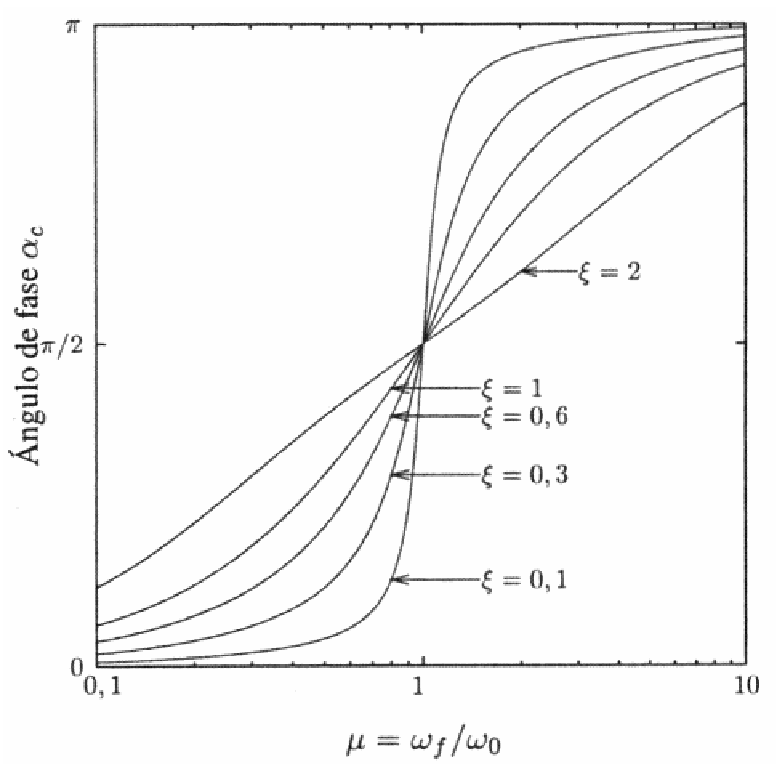
$$A_f = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \qquad \tan\alpha = \frac{2\gamma\omega_f^2}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

Estas expresiones muestran que la amplitud y la fase inicial del oscilador forzado son constantes para una fuerza externa dada caracterizada por los valores F_0 y ω_f. La amplitud tiene un máximo cuando la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a la frecuencia natural de la oscilación $\omega \approx \omega_0$. Al incremento de la amplitud cerca de la frecuencia natural se le denomina ***resonancia***, y a la frecuencia natural ω_0 se le denomina también ***frecuencia de resonancia*** del sistema.

La siguiente figura muestra una gráfica de la amplitud en función de la frecuencia para distintos valores de las fuerzas resistivas ($\xi = \frac{\gamma}{\omega_0}$). Cuando se aplica la fuerza externa a una frecuencia próxima a la frecuencia propia del sistema y el amortiguamiento es débil la amplitud de la vibración se amplifica de manera sustancial. Ya hemos dicho que esta condición recibe el nombre de resonancia . La figura también nos sugiere que la amplitud de la oscilación se puede controlar evitando la condición de resonancia o aumentando el amortiguamiento.



Vamos a explicar más en profundidad el origen de la enorme amplificación de las oscilaciones en condiciones resonantes para sistemas débilmente amortiguados. En la siguiente figura se representa el ángulo de fase frente a la razón de frecuencias.



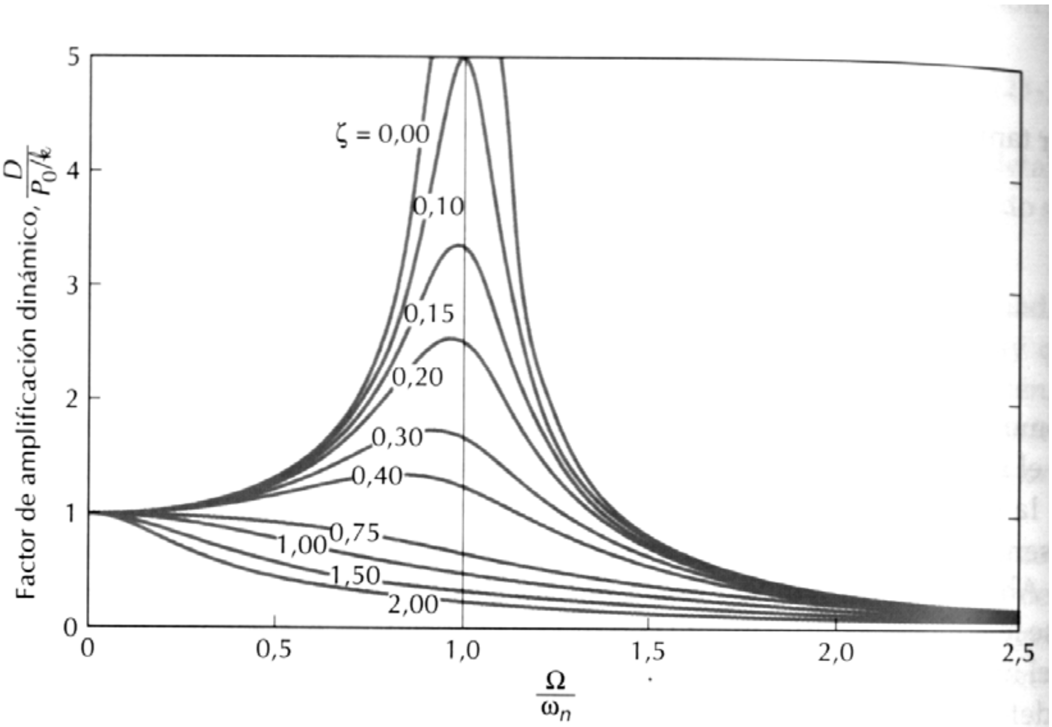
Consideremos algunos límites interesantes:

Excitación de baja frecuencia ($\omega_f \prec\prec \omega_0$): en estas condiciones la frecuencia de la fuerza excitadora es pequeña. Según la gráfica para una excitación de baja frecuencia la respuesta del sistema está en fase con la excitación. El sistema tiene el tiempo suficiente para adaptarse en cada momento a las condiciones de la excitación.

Excitación de alta frecuencia ($\omega_f \succ\succ \omega_0$): es el caos en que la frecuencia de la fuerza excitadora es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema. Cuando la fuerza externa se aplica a frecuencias elevadas la respuesta permanente está en su mayor parte en oposición de fase con la fuerza perturbadora, frenándose el movimiento por ello la amplitud de las oscilaciones es prácticamente nula e independiente del valor de ξ.

Es decir, para una excitación de alta frecuencia, la respuesta del sistema está en oposición de fase con la fuerza excitadora. Como la frecuencia de la pulsación excitadora es tan grande, el sistema apenas puede responder a ella oscilando y por tanto la amplitud de la oscilación es muy pequeña .

Resonancia en amplitud ($\omega_f \approx \omega_0$): cuando la frecuencia de la fuerza externa se hace similar a la frecuencia natural del sistema, el ángulo de desfase es de 90º para valores relativamente altos de ξ por lo que hay una parte del movimiento en que este se frena. Por ello la amplitud de las oscilaciones no crece mucho cuando la resonancia tiene lugar en sistemas muy amortiguados. Sin embargo si el amortiguamiento es muy débil, la fase cambia bruscamente de 90º a 0º, esto es pasa de concordancia de fasa a oposición de fase con solo aumentar un poco la frecuencia de la fuerza excitadora. Es decir, en la resonancia para amortiguamientos débiles ambas fases coinciden de forma que la fuerza actúa siempre en el sentido del movimiento, favoreciéndolo siempre. De hecho, puede observarse en las gráficas que el máximo no se alcanza exactamente para $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$.



$$\xi = \frac{\gamma}{\omega_0} \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

El conocimiento del fenómeno de la resonancia es de gran importancia tanto si interesa utilizarlo para ampliar las oscilaciones como si lo que interesa es minimizar su efecto. Por ejemplo, cada edificio es un oscilador con un conjunto de frecuencias naturales que dependen de su rigidez, masa y de los detalles de su construcción. Una fuerza periódica externa puede ser la proporcionada por las sacudidas del terreno en un terremoto. Se puede producir un resultado desastroso cuando la frecuencia natural de un edificio coincide con una de las frecuencias contenidas en los movimientos del terreno. Las vibraciones de resonancia del edificio pueden acumularse hasta alcanzar un valor de amplitud lo suficientemente grande como para dañar o destruir el edificio. Esto se pude evitar de dos formas:

- diseñar las estructuras de modo que las frecuencias naturales del edificio estén fuera del rango de frecuencias de los terremotos (entre 0 y 15 Hz) por ejemplo, variando el tamaño o la masa de la estructura del edificio

- incorporar una suficiente amortiguación al edificio. Esto no cambia la frecuencia natural pero disminuye la respuesta a la resonancia, la amplitud de la vibración sera relativamente pequeña para cualquier frecuencia dada.

Describiremos ahora dos ejemplos de situaciones que inducen vibraciones de resonancia en las estructuras de los puentes:

1) A lo soldados se les da la orden de romper filas cuando marchan a través de un puente. Esta orden se debe a la existencia de la resonancia ya que, si la frecuencia de marcha de los soldados coincide con la del puente, el puente podría entrar en oscilación por resonancia. Si la amplitud de la oscilación llega a ser lo suficientemente grande, el puente podría derrumbarse. Esta situación se produjo el 14 de abril de 1831 cuando el puente de Broughton en Inglaterra se vino abajo en el mismo instante en que había unas tropas marchando sobre él. La investigación realizada después del accidente demostró que el puente estaba a punto de fallar y que la vibración de resonancia inducida por los soldados que los atravesaban provocó simplemente que cayera antes de lo previsto.

2) En 1940 el puente de Tacoma Narrows en el estado de Washington fue destruido por las vibraciones de resonancia. Los vientos no eran muy fuertes pero las turbulencias generadas se produjeron a una frecuencia que coincidió con la frecuencia natural de oscilación del puente. La agitación producida por el puente proporcionó la fuerza periódica externa que hizo que le puente cayera sobre el río (más información en www.fmc.uam.es/fii/tacoma/tacoma.html).

Supongamos que un edificio está lejos del epicentro de un terremoto, de modo que las sacudidas del terreno son pequeñas. Si la frecuencia de la sacudida coincide con la frecuencia natural del edificio , se produce un acoplamiento de energía muy efectivo entre el terreno y el edificio. Por lo tanto, incluso aunque el temblor sea relativamente pequeño, el terreno, por resonancia puede transmitir energía al edificio de forma lo bastante eficaz como para provocar el fallo de la estructura. En este sentido, los edificios de la Ciudad de Méjico resultaron dañados en 1985 a pesar de que estaban a 400 km del epicentro del terremoto.