c) VIBRACIONES Y ONDAS

2. ONDAS MECÁNICAS

2.1. INTRODUCCIÓN

Se denomina ***onda*** a la transferencia de una perturbación a través del espacio sin que vaya acompañada de transferencia de material. Las ondas están presentes en multitud de fenómenos de la vida cotidiana. Podemos, en una cuerda tensa retorcer un extremo o dar un tirón, o producir una variación brusca de presión en un punto de un gas y esta perturbación se propagará a lo largo del sistema. Por ejemplo, el sonido de la voz humana no es más que una perturbación de las condiciones de equilibrio producida en las cuerdas vocales que se propaga por el espacio y es detectada en el oído de otra persona.

En ningún caso hemos visto que la materia viaja, sin solo su estado de movimiento, hay transporte de energía y momento en el espacio, pero no de materia. En este sentido si la propagación de perturbaciones representa también una transferencia de energía, podemos considerar a las ondas como una forma de transferencia de energía.

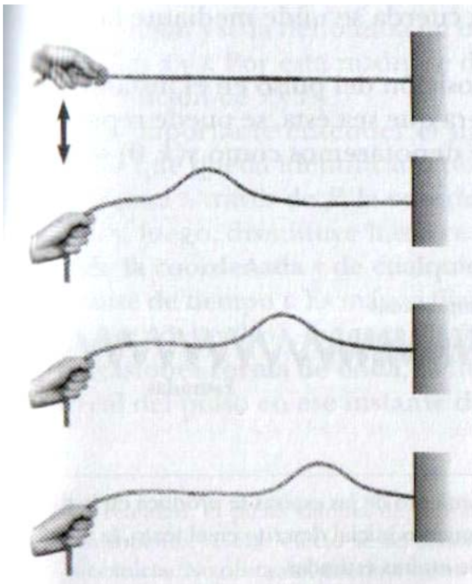
La mayoría de las ondas se pueden clasificar en ***ondas mecánicas***, que son ondas que se propagan a través de algún medio (oleaje en el agua a causa de una piedra, ondas sonoras...), necesitan alguna fuente de perturbación y un medio que pueda ser perturbado y ***ondas electromagnéticas*** que no necesitan de un medio para propagarse.

Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, ondas de radio, rayos X, microondas... Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren solo en su longitud de onda y frecuencia y todas viajan a través del vacío con la velocidad de la luz. Las ondas electromagnéticas se producen cuando las cargas eléctricas libres aceleran o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas realizan transiciones a estados energéticos inferiores. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas.

En esta lección nos vamos a centrar en las ondas mecánicas r ya que este tema sirve como introducción al estudio de la acústica, y toda onda mecánica necesita de:

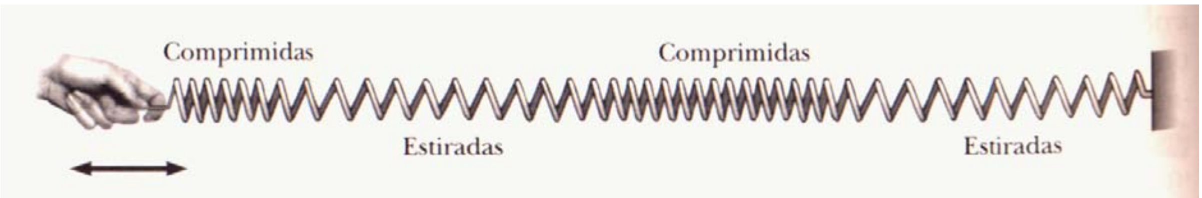
1) alguna fuente de perturbación
2) un medio que pueda ser perturbado
3) algún mecanismo físico pro el cual las partículas del medio puedan influir las unas sobre las otras

Una forma de demostrara el movimiento ondulatorio consiste en agitar el extremo libre de una cuerda larga que esté soportando una tensión y que tenga su otro extremo fijo, como en la siguiente figura. De esta manera se forma un pulso individual que viaja con una velocidad definida. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso.



A medida que el pulso viaja, cada segmento de la cuerda que se ve perturbado se mueve en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. A una perturbación de este tipo, en la que las partículas del medio perturbado se mueven de forma perpendicular a la dirección de propagación, s ela denomina ***onda transversal.***

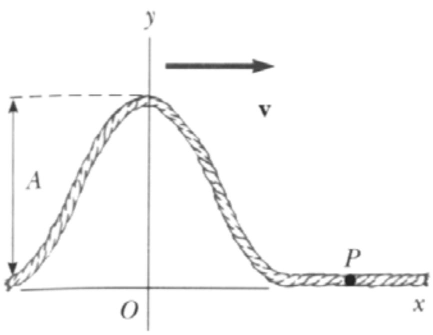
En otra clase de ondas, denominadas ondas longitudinales, las partículas del medio experimentan desplazamientos paralelos a la dirección de propagación. Las ondas del sonido en el aire, por ejemplo son longitudinales. Su perturbación se materializa en una serie de regiones de altas y bajas presiones que pueden viajar a través del aire, o de cualquier medio material, a una cierta velocidad. Se puede producir un pulso longitudinal de forma muy sencilla en un muelle estirado como el de la figura. Si se empuja un grupo de espiras del extremo libre hacia delante y luego se estira hacia atrás, esta acción produce un pulso en la forma de una región de espiras comprimida que viaja a lo largo del muelle, de forma paralela a la dirección de propagación.



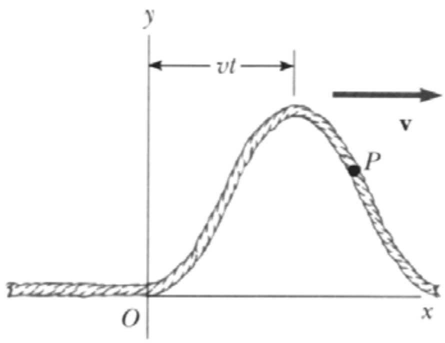
Se denomina ***frente de onda*** al lugar geométrico de los puntos del espacio sometidos al mismo estado de perturbación. La dirección de propagación siempre es perpendicular al frente de onda. Se denomina a la ***onda plana*** cuando el frente de onda es plano. Dependiendo de la forma del frente de onda las ondas puede ser también esféricas, cilíndricas....

2.2. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LA PROPAGACIÓN DE UNA ONDA PLANA

Hasta ahora hemos proporcionado representaciones gráficas del desplazamiento de los pulsos. Ahora necesitamos una representación matemática apropiada para describir la perturbación que se propaga: la figura representa la forma y posición del punto en el instante $t = 0$. En ese instante, la forma del pulso de puede representar mediante alguna función matemática que denotaremos por $y(x,0) = f(x)$. Esta función describe la posición vertical y del elemento de la cuerda situado en cada valor de x en el instante $t = 0$.



Pulso en $t = 0$



Pulso en el instante t

Dado que la velocidad del pulso es c, el pulso se habrá desplazado hacia la derecha una distancia ct en el instante t. Adoptamos un modelo simplificado en el que el pulso no cambia de forma con el tiempo (en realidad el pulso cambia de forma y se va alargando y aplanando gradualmente durante el movimiento, a este efecto se le conoce como dispersión y es común en la mayoría de las ondas mecánicas). Por tanto, en el instante t, la forma básica del pulso es la misma que tenía en el instante $t = 0$. Por consiguiente un elemento del pulso en x tienen la mima posición y que tenía un elemento situado en $x - ct$ en el instante $t = 0$:

$$y(x,t) = y(x - ct, 0)$$

En general, podemos representar el desplazamiento y para todas las posiciones e instantes de tiempo, medido dentro de un sistema de referencia con origen en O como:

$$y(x,t) = f(x - ct)$$

Y utilizaremos para representar el desplazamiento una función $y(x,t) = f(x + ct)$ si el pulso se mueve hacia la izquierda. A la función $y(x,t)$ se le denomina ***función de onda*** y representa el valor de la coordenada *y* de cualquier punto *P* situado en la posición x en cualquier instante de tiempo *t.* A las ondas que se propagan se les denomina ***ondas progresivas*** en contraposición a las ***ondas estacionarias.***

Ya sabemos la forma general que debe tener una onda que se propaga en una dimensión. Sin embargo a la hora de saber cómo se propaga una perturbación y concretamente con qué velocidad, la expresión anterior no es práctica ya que es difícil de obtener a partir de las características físicas del proceso. Sin embargo es fácil obtener una relación que debe cumplir la solución que hemos obtenido y que está más relacionada con las características físicas del medio:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

conocida como ecuación de ondas unidimensional o ecuación de D´Alembert que debe cumplir toda onda plana que se propaga con velocidad *c* y sin deformación en una dimensión y cuyas soluciones deben ser de la forma $y(x,t) = f(x \pm ct)$. Aunque hemos obtenido la ecuación de D´Alembert a partir de la función $y(x,t) = f(x - ct)$ se obtendría el mismo resultado para la función $y(x,t) = f(x + ct)$.

En este sentido, si analizamos un problema y descubrimos esta clase de relación entre las derivadas de la función que describe el problema, entonces es que se está produciendo un movimiento ondulatorio. Las soluciones de esta ecuación describen ondas mecánicas que no cambian su forma y que se propagan en la dirección *x* con una velocidad c. La ecuación de onda describe de manera apropiada el comportamiento de ondas en cuerdas, ondas sonoras y también ondas electromagnéticas. La ecuación general de onda en tres dimensiones en coordenadas rectangulares es:

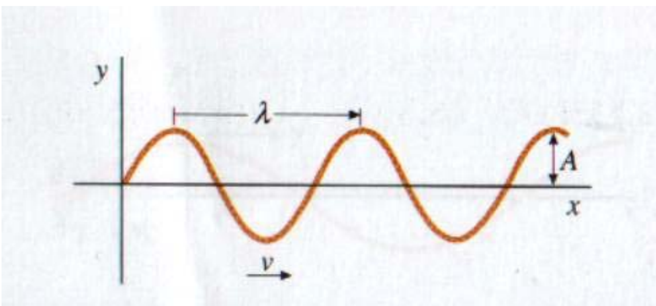
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

En los apartados sucesivos veremos la gran utilidad de esta expresión obteniendo las velocidades de propagación de distintas perturbaciones en distintos medios.

2. 3. ONDAS ARMÓNICAS

La forma de onda más sencilla es aquella cuyo perfil es una curva tipo seno o coseno, son las ondas armónicas. Las ondas armónicas constituyen la clase más básica de las ondas periódicas. Este es un caso de especial importancia ya que Fourier demostró que las ondas periódicas de formas complejas pueden representarse como suma de una serie de ondas armónicas. Es decir cualquier movimiento periódico puede analizarse como una superposición de ondas armónicas:

$$y(x,t) = Asen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ct) + \alpha\right]$$



En la expresión A es la amplitud de la onda, al argumento completo de la función seno se le llama *fase de la onda* y α es la fase inicial que depende de la elección del origen en $x = 0$. La distancia mínima recorrida en el espacio hasta que la función de ondas se repita, la distancia entre crestas, por ejemplo es la longitud de onda λ.El cociente $\frac{2\pi}{\lambda}$ representa el número de longitudes de onda en la distancia 2π se le denomina número de onda y se le representa con la letra *k*.

Dado que el periodo T es el intervalo de tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia correspondiente a una longitud de onda, la velocidad de propagación o velocidad de fase, la longitud de onda y el periodo están relacionados mediante la ecuación:

$$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow c = \lambda \cdot f$$

Teniendo en cuenta estas relaciones la expresión de la onda armónica puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\psi(x,t) = y(x,t) = Asen\left[2\pi(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{ct}{\lambda}) + \alpha\right] = Asen[kx - \omega t + \alpha]$$

Cuando una onda armónica se propaga, por ejemplo por una cuerda, cada punto de la misma se mueve hacia arriba y hacia abajo, perpendicularmente a la dirección de propagación realizando un movimiento armónico simple de frecuencia. En este sentido, una onda armónica que se propaga tiene una doble periodicidad, espacial y temporal. En un instante de tiempo dado, como si hubiéramos hecho una fotografía instantánea de la perturbación, hay una periodicidad espacial en la onda ya que se repite cada longitud de onda. Igualmente, en un punto fijo del espacio afectado por la perturbación se ve que hay una periodicidad temporal ya que realiza un movimiento armónico simple. Para ver esto basta fija *x* o fijar *t* en la expresión matemática de la onda armónica.

Las ondas armónicas descritas tienen una longitud infinita, esto es para cualquier valor fijo de t, x varía de $-\infty$ a $+\infty$. Cada onda tiene una sola frecuencia y se dice que es monocromática o monoenergética. Las ondas en la práctica no son nunca monocromáticas. Las perturbaciones ondulatorias tienen una duración finita y son anarmónicas, sin embargo las ondas armónicas simples tienen especial relevancia por lo que ya se ha comentado del análisis de Fourier.

Es importante distinguir entre la velocidad de fase de la onda c y la velocidad de las partículas del medio v. La expresión de $\psi(x,t)$ se puede utilizar para describir el movimiento de cualquier punto del medio. Un punto *P* se mueve solamente en vertical de modo que su coordenada *x* permanece constante. La velocidad transversal del punto P y su aceleración transversal son por lo tanto:

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \alpha) \ .$$

$$a_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 Asen(kx - \omega t + \alpha)$$

Comprobemos que las ondas armónicas verifican la ecuación de ondas, calculemos primero las derivadas de la función de onda con respecto a la posición en un instante de tiempo fijo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 Asen(kx - \omega t + \alpha)$$

Comparando las expresiones correspondientes a $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ se comprueba que:

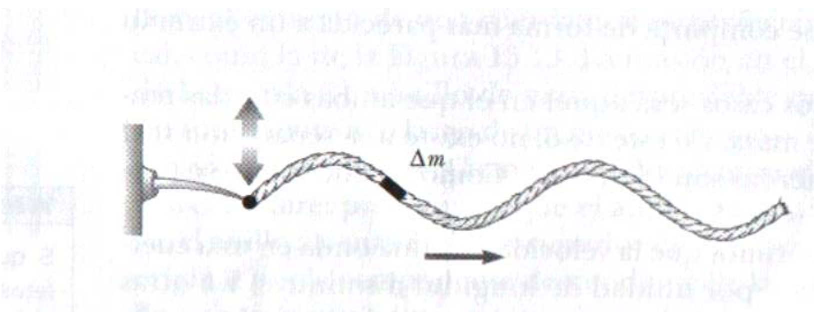
$$Asen(kx - \omega t + \alpha) = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

de donde se deduce la velocidad de de fase de la onda armónica $c = \lambda \cdot f = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$

2.4. PROPAGACIÓN DE LA ENERGÍA

Como ya hemos indicado anteriormente en el movimiento ondulatorio no se propaga la materia en sí sino su estado de movimiento, lo que implica que lo que se está propagando con la onda es cantidad de movimiento y energía.

Si consideramos una onda sinusoidal que se mueve por una cuerda, la fuente de energía la constituye algún agente externo situado en su extremo que está realizando un cierto trabajo al producir las oscilaciones. Consideremos un elemento de longitud dx y masa dm en la cuerda:



Cada uno de estos elementos se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, podemos considerar cada elemento de la cuerda como un oscilador armónico simple que oscila en la dirección *y*. Todos los elementos oscilan con la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud *A*. Según esto, la energía cinética asociada a un elemento de longitud dx es:

$$dE_C = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$$

Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, entonces un elemento de longitud dx tiene una masa μdx. Por tanto, la energía cinética se puede escribir:

$$dE_C = \frac{1}{2}(udx)v_y^2$$

Si sustituimos el valor de la velocidad por $v_y = -\omega A\cos(kx - \omega t + \alpha)$ obtenemos:

$$dE_C = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t + \alpha)dx$$

Si tomamos una instantánea de la onda en el instante $t = 0$, entonces la energía cinética de un elemento dado es:

$$dE_C = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \cos^2(kx + \alpha)dx$$

Integrando esta expresión a lo largo de todos los elementos de la cuerda incluidos dentro de una longitud de onda, obtendremos la energía cinética en una longitud de onda:

$$E_C = \int_0^\lambda \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \cos^2(kx + \alpha)dx = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx + \alpha)dx = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k}sen(kx + \alpha)\right]_0^\lambda$$

$$E_C = \frac{1}{4}u\omega^2 A^2 \lambda$$

Además de esta energía cinética cada elemento de la cuerda poseerá una energía potencial, que está asociada con el desplazamiento con relación a su posición de equilibrio. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total en una longitud de onda nos da el mismo resultado. La energía total en una longitud de onda es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_\lambda = \frac{1}{4}u\omega^2 A^2 \lambda + \frac{1}{4}u\omega^2 A^2 \lambda = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \lambda$$

También se puede definir la energía por unidad de longitud:

$$\frac{E_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2$$

Y la potencia o ritmo de transferencia de energía asociada con la onda es:

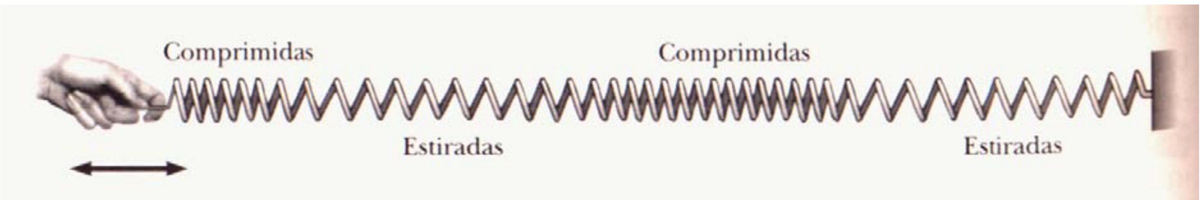
$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}u\omega^2 A^2 c$$

Esto muestra que el ritmo de transferencia de energía de una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia angular, (b) el cuadrado de la amplitud y (c) a la velocidad de la onda. De hecho, todas las ondas sinusoidales comparten la siguiente propiedad general: el ritmo de transferencia de energía en una onda sinusoidal s proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.

2.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS EN FLUIDOS

Vamos a desplazar nuestra atención de las ondas mecánicas transversales a las ondas longitudinales. Como ya se ha indicado, en las ondas longitudinales, las partículas del medio se desplazan de forma paralela a la dirección del movimiento de la onda. Las ondas sonoras en el aire constituyen el ejemplo más importante de ondas longitudinales. No obstante, las ondas sonoras pueden moverse a través de cualquier medio material y su velocidad depende de las propiedades de dicho medio. Los desplazamientos que acompañan a una onda sonora en el aire son desplazamientos longitudinales de pequeños elementos de fluido respecto a sus posiciones de equilibrio. En ciertas condiciones estas perturbaciones impresionan el sentido del oído, en cuyo caso nos encontraremos ante un sonido o un ruido. Al sonido no deseado o desagradable se le denomina ruido, la sensación de ruido generalmente está asociada a una variación aleatoria de la presión, por ejemplo, la circulación de automóviles, aviones... El rango de frecuencias audibles está entre 20 Hz y 20 KHz. La Acústica es la ciencia que trata de los métodos de producción, transmisión y recepción del sonido.

Es complicado dibujar una representación visual de las ondas longitudinales porque los desplazamientos de los elementos del medio se producen en la misma dirección de propagación de la onda:



En este desplazamiento no se produce un transporte neto de materia, aunque se transportará energía y cantidad de movimiento al igual que en cuerda. En los fluidos solo pueden propagarse ondas longitudinales ya que los fluidos no tiene resistencia elástica.

Cuando estudiamos la propagación de ondas de presión en un fluido hay que tener en cuenta que el fluido sin perturbar ya estará sometido a una cierta presión P_0 en el equilibrio. Así, la presión total en un punto del fluido será la suma de la presión en el equilibrio y el cambio de presión p producido por la perturbación:

$$P = P_0 + p$$

El cambio de presión p producido por la perturbación verifica también la ecuación de ondas:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

siendo $c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$ la velocidad de propagación de las ondas en el fluido siendo B el módulo de comprensibilidad.

La ecuación deducida nos va a servir para obtener **la velocidad del sonido en los fluidos:**

Empezaremos por relacionar la presión con otras propiedades de los gases. La ecuación de estado de un gas real, a bajas presiones o altas temperaturas, y en general lejos de las zonas en las que se produce licuefacción puede expresarse en una buena aproximación mediante la ecuación de estado de los gases ideales. En función de esta la densidad puede escribirse como:

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho_0 = \frac{Mp}{RT}$$

siendo M la masa molecular, R la constante de los gases, p la presión y T la temperatura absoluta. La temperatura del gas tenderá a subir en aquellas zonas que se comprimen al paso de la onda y a bajar en aquellas que se expanden.

Sin embargo, el movimiento ondulatorio asociado a la propagación del sonido en los gases da lugar a perturbaciones locales que son lo suficientemente rápidas para que el intercambio de calor que tiene lugar puede considerarse nulo, a esto se une que el aire es un mal conductor del calor. Por tanto, es buena aproximación considerara que el proceso es básicamente adiabático. Asimismo, aunque el proceso es rápido y por tanto, irreversible se considera en una primera aproximación como reversible y se utiliza la siguiente expresión para escribir el módulo de compresibilidad:

$$pV^{\gamma} = cte \Rightarrow p = cteV^{-\gamma} \Rightarrow B = -V\frac{\partial p}{\partial V} = -V(-\gamma cteV^{-\gamma-1}) = p\gamma$$

De este modo la velocidad del sonido en el aire:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = cte\sqrt{T}$$

considerando $\gamma = 1.4$ y $M = 29 kg/mol$ la velocidad de propagación del sonido en el aire. Aire se puede escribir como $c = 20.05\sqrt{T} m/s$ expresión muy próxima a los valores experimentales. En realidad siempre hay un pequeño intercambia de calor, relacionado con una disipación de energía de la onda y por tanto, con una atenuación de la misma. Como en la práctica el sonido puede viajar grandes distancias con una pequeña atenuación, el flujo de calor es pequeño y por tanto la aproximación adiabática es correcta.

Salvo en el límite de bajas presiones y/o altas temperaturas los gases reales siguen ecuaciones de estado más complejas que la ecuación de estado del gas perfecto. Esto hace que el índice adiabático γ sea en general función de presión y temperatura y que las expresiones anteriores sean más complejas.

La velocidad del sonido en los líquidos depende del módulo de compresibilidad y de la densidad al igual que en los gases. Sin embargo no es posible hacer un tratamiento simplificado como el que se ha hecho en los gases. En su lugar se utilizan diversas relaciones empíricas.

Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos gases

Gas	c (ms^{-1})	ρ (kg/m^{-3})	$\rho_0 c$ (kg m^{-2} s^{-1})	γ
Hidrógeno (H_2)	1270	0,090	114	1,41
Nitrógeno (N_2)	337	1,25	421	1,40
Aire	331	1,29	428	1,40
Oxígeno (O_2)	317	1,43	453	1,40
Anhídrido carbónico (CO_2)	258	1,96	508	1,30

Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos líquidos

Líquido	c (ms^{-1})	ρ (kg/m^{-3})	$\rho_0 c$ 10^6(kg m^{-2} s^{-1})
Agua (4°C)	1418	1000	1,42
Agua (25°C)	1493	997,1	1,49
Mercurio	1450	13600	19,70
Etanol	1210	790	0,96
Metanol	1130	790	0,89

a) Ondas planas longitudinales:

Consideremos una columna de gas a lo largo de la cual se propaga una perturbación. En este caso la propagación es unidimensional en la dirección x, el frente de onda es plano y la ecuación de ondas pasa a ser:

$$c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

con una velocidad de propagación $c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$, y el desplazamiento satisface una ecuación similar:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Las ondas acústicas más sencillas son las ondas armónicas, solución de esta ecuación con amplitud, frecuencia y longitud de onda definidas y constituyen los sonidos puros. Raramente se encuentran en la práctica pero de nuevo, según el Teorema de Fourier cualquier perturbación periódica puede descomponerse en suma de funciones armónicas:

$$u(x,t) = u_0 sen(kx - \omega t)$$

siendo u_0 el máximo desplazamiento respecto de la posición de equilibrio de una partícula fluida. Teniendo en cuenta que para el caso unidimensional la relación entre p y u se escribe de la siguiente manera:

$$p = -B\frac{\partial u}{\partial x}$$

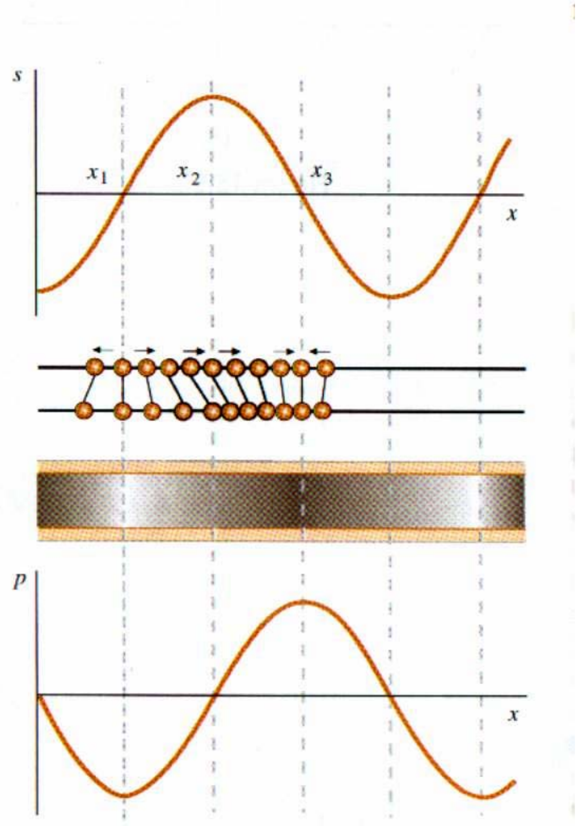
La solución de la ecuación de onda de presión resultar ser la siguiente:

$$p(x,t) = -B\frac{\partial u}{\partial x} = -Bku_0 \cos(kx - \omega t) = p_0 \cos(kx - \omega t)$$

teniendo en cuenta que $c = \sqrt{\dfrac{B}{\rho_0}} \Rightarrow B = \rho_0 c^2$ la amplitud de la onda de presión se puede escribir de la siguiente manera:

$$p_0 = Bku_0 = \rho_0 c^2 ku_0$$

Debemos tener en cuenta que p representa el cambio de presión respecto a la presión de equilibrio. La onda de desplazamiento está desfasada 90º respecto a la onda de presión. Es decir, en un punto donde la elongación es máxima o mínima, la presión sonora es nula, y cuando la elongación es nula la presión sonora es máxima. La siguiente figura muestra el desplazamiento de las moléculas de aire y los cambios de densidad originados por una dona sonora en un momento determinado. Como la presión del gas es proporcional a su densidad, el cambio de presión es máximo cuando la variación de densidad es máxima:



Los dos primeros gráficos representan el desplazamiento respecto al equilibrio de las moléculas de aire en una onda sonora armónica en función de la posición en un cierto instante. Las flechas indican el sentido de las velocidades en ese momento. El tercer gráfico representa la densidad del aire en ese momento y el último gráfico representa el cambio de presión que es proporcional al cambio de densidad, en función de la posición.

La energía media de una onda sonora armónica viene dada por la ecuación deducida para la cuerda vibrante reemplazando $u\lambda$ por $\rho_0 V$:

$$E_\lambda = \frac{1}{2} u\omega^2 A^2 \lambda \Rightarrow E = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_0^2 V$$

Y se define la densidad de energía media como:

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_0^2$$

Teniendo en cuenta que $p_0 = \rho_0 c\omega u_0$ la densidad de energía se puede escribir también como:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c^2} = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 c^2}$$

siendo $p_{ef} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$ la llama presión efectiva para ondas armónicas planas. Cuando se trabaja con ondas sonoras se habla de ***intensidad acústica*** que es la energía acústica transmitida por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda en la unidad de tiempo: Durante un intervalo de tiempo igual a un periodo *T*, la onda en su movimiento recorre una distancia cT y la energía del medio se ve incrementada en la energía contenida en un volumen TcA entonces la expresión de la intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon V}{TA} = \frac{\varepsilon TcA}{TA} = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 c}$$

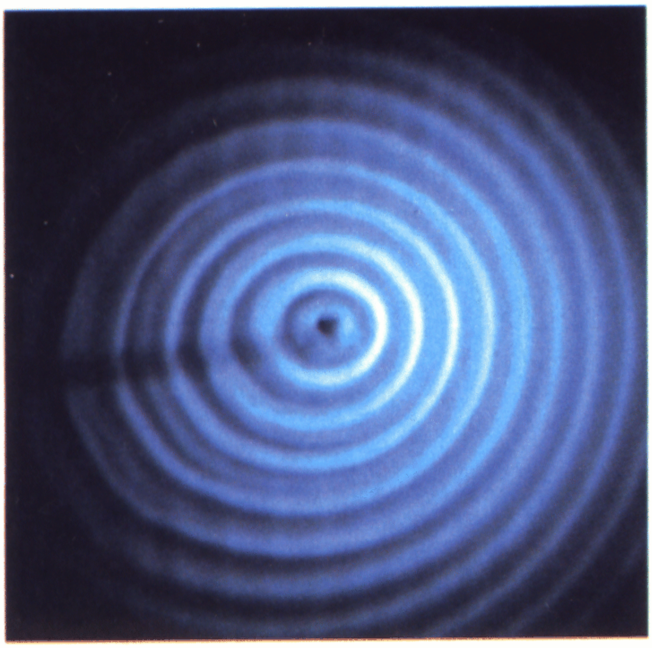
En realidad siempre hay una disipación de energía en esta propagación, produciéndose calor, y la intensidad de la onda disminuye durante la propagación de forma aproximadamente exponencial:

$$I(x) = I(x_0) e^{-2\alpha(x-x_0)}$$

donde x_0 es un punto de referencia, $I(x_0)$ la intensidad en dicho punto y α la constante de atenuación del medio.

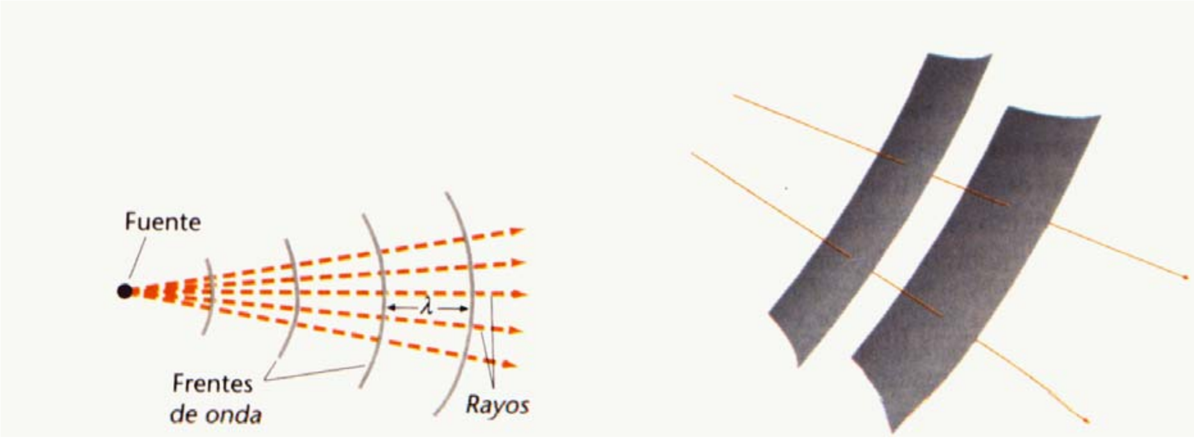
b) Ondas esféricas:

En la siguiente figura se ven ondas circulares bidimensionales sobre la superficie del agua de una cubeta de ondas. Estas ondas se generan mediante una fuente puntual que se mueve hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. En este caso, la longitud de onda es la distancia entre crestas de ondas sucesivas que son circunferencias concéntricas, los frente de ondas.



En el caso de un foco o fuente puntual de sonido las ondas se emiten en tres dimensiones, se mueven alejándose del foco en todas direcciones y los frentes de onda son ahora superficies esféricas concéntricas de radio r, siendo r la distancia a la fuente puntual:

El movimiento de un conjunto cualquiera de frentes de onda puede indicarse mediante rayos, que son líneas dirigidas perpendicularmente a los frentes de onda. Para ondas circulares o esféricas, los rayos son líneas radiales. En un medio homogéneo, como el aire a densidad constante, una onda se mueve en línea recta en la dirección de los rayos, como si se tratara de un haz de partículas. A una distancia grande de un foco puntual, una parte pequeña del frente de onda puede sustituirse aproximadamente por un frente de onda plano.



Para obtener la expresión de una onda esférica se trabaja con la ecuación de ondas en tres dimensiones en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Al tener únicamente dependencia radial, si se realiza el cambo de variable $p(r,t)=\frac{\phi(r,t)}{r}$ la ecuación anterior queda en una forma más sencilla:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

que tiene el mismo aspecto que la ecuación de ondas correspondiente a una onda plana que se propaga sin deformación en una dimensión con velocidad *c*. La expresión resultante para la onda de presión tiene la forma:

$$p(r,t)=\frac{\phi_0}{r}\cos(kr\pm\omega t)=p_0(r)\cos(kr\pm\omega t)$$

donde ϕ_0 es una constante arbitraria que puede ser real o compleja y $p_0(r)=\frac{\phi_0}{r}$ es la amplitud de la onda de presión que disminuye con la distancia a la fuente.

La onda de desplazamiento consta de una parte real y una parte imaginaria, a grandes distancias de la fuente, la **parte real** de la onda de desplazamiento es de la forma:

$$u(r,t)=u_0(r)sen(kr\pm\omega t)$$

donde la expresión para $u_0(r)$ es de la forma:

$$u_0(r) = \frac{\phi_0 k}{\rho_0 \omega^2 r} = \frac{p_0(r)}{\rho_0 \omega c}$$

Tanto para la onda de presión como para la onda de desplazamiento hemos obtenidos expresiones similares a las que obtuvimos para las ondas planas pero con u_0 y p_0 dependientes de r. No obstante, hay que insistir en que estas expresiones son válidas únicamente a grandes distancias de la fuente.