

## d) AMPLIACIÓN DE TERMODINÁMICA Y TRANSFERENCIA DE CALOR

### 3. TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN Y CONVECCIÓN

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En la ciencia de la termodinámica, que estudia la energía en su diversas formas, así como su transformación de una en otra, se definen dos formas transitorias especialmente importantes: el trabajo y el calor. Designamos estas energías con el nombre de transitorias ya que, por definición, existen solamente cuando hay un intercambio de energía entre dos sistemas o entre un sistema y su entorno. Cuando tiene lugar un intercambio como éste sin transmisión de masa del sistema y sin que medie una diferencia de temperatura, se dice que la energía se ha transmitido mediante la realización de un trabajo, si por otra parte, el intercambio se debe a una diferencia de temperatura, se dice, entonces, que la energía se ha transmitido por un flujo de calor.

Por otro lado, calor y trabajo, no son funciones de estado, ninguna de estas dos magnitudes son algo contenido en el sistema. Son magnitudes que caracterizan la transformación y dependen por tanto de la forma en que ésta se realizó. El calor es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro a causa de una diferencia de temperatura. El trabajo es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro porque debido a la acción de una fuerza. *Por lo tanto, es correcto decir que un sistema tiene una gran cantidad de energía interna pero no es correcto afirmar que un sistema tiene una gran cantidad de calor o de trabajo.*

En este apartado vamos a estudiar el calor y las leyes básicas que gobiernan su intercambio. Para iniciar este estudio conviene tener en cuenta tres premisas importantes:

- la existencia de una diferencia de temperaturas es una características peculiar de la forma de energía conocida como calor
- cuando tienen lugar estos intercambios de energía interna o calor, la primer ley de la termodinámica exige que el calor desprendido por un cuerpo debe ser igual al absorbido por el otro
- la segunda ley de a termodinámica exige que la transmisión de calor desde el sistema más caliente hacia el más frío

Desde el punto de vista práctico conocer las formas de transmisión del calor es interesante para reducir el consumo energético de una instalación con un adecuado aislamiento térmico. Las condiciones térmicas del aire que circula por el interior de las instalaciones son diferentes a las del aire exterior, lo que supone una transferencia de calor entre ambas masas de aire. Si esta transferencia es elevada pueden producirse corrientes de aire no adecuadas, que afectarán a las condiciones de los locales y a una pérdida de eficiencia de la instalación junto con el coste energético que representa.

#### 3.2. MODALIDADES BÁSICAS DE LA TRANSMISIÓN DEL CALOR

Suele ser costumbre clasificar los distintos procesos de transmisión calorífica en tres tipos. Si bien encontramos habitualmente con problemas prácticos que implican la presencia simultánea de al menos dos, y algunas veces las tres modalidades. No obstante, aunque estos mecanismos de transmisión

el calor casi siempre intervienen a la vez, según los casos uno de los tres es preponderante sobre los otros que pueden despreciarse. Las tres modalidades de transmisión son conducción, convección y radiación.

**a) Conducción calorífica** es el término que se aplica al mecanismo del intercambio de energía interna de un cuerpo a otro o de una parte de este cuerpo a otra mediante el intercambio de la energía cinética del movimiento de las moléculas por comunicación directa o por el flujo de electrones libres cuando se trata de la conducción calorífica en los metales. Este flujo de energía o de calor se dirige desde las moléculas de energía más elevadas a las que tienen una cantidad menor. Si calentamos el extremo de una barra metálica, al cabo de algún tiempo se habrá calentado también el otro extremo. Es el ejemplo más sencillo de la conducción. Por tanto, es necesario un soporte material pero no hay transferencia de materia.

Los materiales que tienen electrones libres son buenos conductores del calor. Por el contrario los materiales que retardan la transferencia de calor son los aislantes como es el caso de la madera. Generalmente los líquidos y los gases son buenos aislantes. Así el aire conduce muy mal el calor. Los materiales porosos son también aislantes, pues presentan pequeñas cavidades llenas de aire.

**b) Convección** es el mecanismo de transmisión calorífica que se produce en un fluido cuando una parte de éste se mezcla con otra, a causa de los movimientos de la masa del mismo, existe por tanto simultáneamente transporte de energía y de cantidad de movimiento. Esto, es el proceso real de la transmisión de energía de una partícula o molécula del fluido a otra, sigue siendo un proceso de conducción pero la energía puede transportarse de un punto a otro del espacio por el desplazamiento del mismo fluido.

En este caso, puede producirse el movimiento del fluido por causas mecánicas externas, una bomba o ventilador, en cuyo caso al proceso se le llama **convección forzada**. Si el movimiento del fluido se produce por diferencias de la temperatura que existen en la masa de aquel, al proceso se le denomina **convección libre o convección natural**. Tenemos un ejemplo de convección libre en la circulación del agua en un recipiente calentado al fuego.

Es imposible observar la conducción de calor pura en un fluido porque tan pronto como exista una diferencia de temperatura en éste, se producirán corrientes de convección naturales.

Mientras las leyes que gobiernan la conducción térmica pueden tratarse analíticamente en términos matemáticos concisos, el proceso de la convección es mucho más complejo, pues hay que acoplar las leyes de la conducción con las del movimiento del fluido.

**c) Radiación térmica:** históricamente se concebía la radiación como un flujo de energía emitida por los cuerpos en virtud de su temperatura. Esta energía es de naturaleza electromagnética. Por tanto, radiación térmica es el término que se emplea para describir la radiación electromagnética emitida por la superficie de un cuerpo excitado térmicamente. Esta radiación electromagnética se emite en todas las direcciones y, cuando sobre otro cuerpo, una parte de la misma puede ser reflejada, otra transmitida y otra absorbida. La radiación absorbida produce el mismo efecto que hubiera producido un flujo de calor por conducción o convección. La radiación térmica no exige medio de transporte alguno.

En resumen, esto significa que un cuerpo caliente que se coloca en presencia de otros más fríos pero que no está en contacto físico con ellos, se observa que pierde energía. El calor del sol es el ejemplo más obvio de radiación térmica.

Estos mecanismos básicos actuarán de forma combinada, no sólo para dar la temperatura final del recinto que estamos estudiando, sino en combinación con otros elementos como la humedad del aire, para dar el grado de comodidad del ser humano en el espacio considerado. Así, mayores o menores grados de humedad darán lugar a una sensación de comodidad mayor o menor para una misma temperatura. Por otra parte, para una misma temperatura en un lugar, el hecho de que esté soleado puede hacer más agradable la estancia en el mismo en invierno, no sólo por la luz sino por la radiación térmica que incide sobre la persona.

### 3.3. TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

#### 3.3.1. Campo de temperaturas y gradiente de temperaturas

En la transmisión del calor por conducción, éste se propaga por contacto directo entre las partículas de un cuerpo y las de otro cuerpo que se encuentra a distinta temperatura. En la teoría analítica de la conducción de calor, no se tiene en cuenta la estructura molecular de la sustancia, ni como es el mecanismo de transmisión, sino que se considera la materia como un medio continuo.

Sólo puede haber transmisión del calor por conducción cuando hay cuerpos a distintas temperaturas y al igual sucede con las otras formas de transmisión del calor. En general, hay variaciones de temperatura con el tiempo y espacio, por lo que se tiene una distribución espacio temporal de la temperatura que se conoce como campo de temperaturas:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Si el campo es estacionario, no hay variación temporal de la temperatura, esto es:

$$T = f(x, y, z)$$

Si además el proceso es unidimensional, el campo de temperaturas solo depende de una coordenada espacial:

$$T = f(x)$$

Se denomina isoterma al lugar geométrico de los puntos del cuerpo que están a la misma temperatura. Y recordando la definición de gradiente la mayor variación de temperatura tiene lugar en la dirección normal a las superficies isotermas:

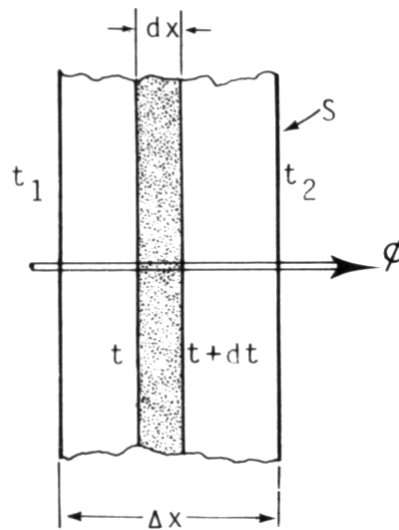
$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

### 3.3.2. Leyes fundamentales de la conducción

#### a) Medios isótropos

Si tenemos una placa de superficie  $S$  y espesor  $\Delta x$  con temperaturas  $t_1$  y  $t_2$  entre sus extremos, el flujo térmico o cantidad que calor que fluye por unidad de tiempo (perpendicularmente) a través de sus paredes viene dado por la fórmula de Fourier basada en la observación empírica de la conducción térmica estacionaria y unidimensional.

La experiencia ha demostrado que este flujo es proporcional a la diferencia de temperaturas y es inversamente proporcional al espesor:



$$\Phi = kS \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kS \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

en donde  $k$  es la constante de proporcionalidad llamada *conductividad térmica*, que es una magnitud positiva que depende solo de la composición de éste y no de su configuración geométrica. Se mide en

$W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ . A veces se utiliza el concepto de *conductancia térmica*  $C = \frac{k}{\Delta x}$ , en cuyo caso:

$$\Phi = CS(T_1 - T_2)$$

A la cantidad de calor transmitida en la dirección del flujo por unidad de área se le denomina **densidad de flujo térmico** y viene dada por:

$$q = \frac{\Phi}{S} = -k \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

Si la superficie de la placa no es constante a lo largo de todo el recorrido, la ecuación debe escribirse en forma diferencial de la siguiente manera:

$$\Phi = -kS(x) \frac{dT}{dx}$$

en donde  $\frac{dT}{dx}$  es el gradiente de temperatura ya que estamos trabajando con un sistema unidimensional.

En este ejemplo, las superficies isotermas del campo de temperaturas de la placa coinciden con sus superficies, entonces a partir de dicha expresión también se deduce que el flujo de calor tiene lugar en la dirección perpendicular a las isotermas o dirección del gradiente. Luego el flujo térmico es una magnitud vectorial cuya dirección coincide con la del gradiente del campo de temperaturas y tiene sentido opuesto, el signo menos aparece porque el flujo de calor se produce en el sentido en el que las temperaturas disminuyen:

$$\vec{\Phi} = -kS(x) \frac{dT}{dx} \vec{i}$$

En el caso más general en que la temperatura cambie de un punto a otro de la superficie y estemos en un sistema tridimensional, la ley de Fourier para medios isótropos se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{\Phi} = -kdS \left( \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) = -kdS \text{grad}T = -kdS \nabla T$$

que es la forma vectorial de la ley de Fourier en medios continuos e isótropos. En la expresión  $dS$  representa el área del elemento de superficie de la isoterma a través del cual estamos estudiado el flujo. Esta ecuación de Fourier es de la misma forma que la ecuación de Darcy deducida para la velocidad de un fluido en un medio permeable. Y para la densidad de flujo térmico o flujo calorífico se tiene:

$$\vec{q} = -k \nabla T$$

que expresa la ley básica de la conducción del calor, la densidad de flujo calorífico es proporcional al gradiente de temperaturas.

### b) Medios anisótropos

Si el medio es anisótropo, existe una variación direccional de la conductividad como ocurre en los cristales, madera y sustancias laminadas la conductividad térmica viene representada por un tensor:

$$\vec{q} = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \nabla T$$

Al ser un tensor simétrico existen tres direcciones principales de la conductividad térmica en la que la matriz que representa la conductividad térmica es diagonal:

$$\vec{q} = - \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \nabla T$$

siendo  $k_1, k_2$  y  $k_3$  las conductividades principales del medio.

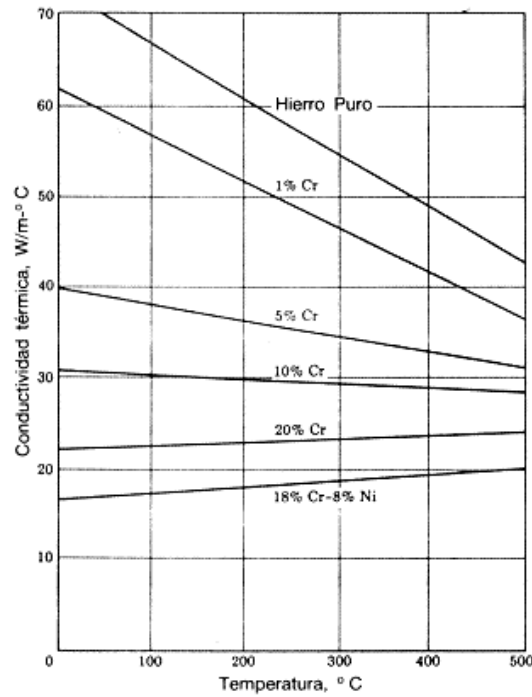
### c) Conductividad Térmica

La conductividad térmica es la propiedad física que nos indica la facilidad con que una sustancia puede realizar esta transmisión. Se comprueba que la conductividad térmica de un material depende de la composición química de la sustancia o sustancias que lo componen, de la fase en que se encuentra, de su estructura cristalina si se trata de un sólido, de la temperatura y presión a que está sometido y de si es, o no, un material homogéneo. Como puede observarse en la tabla una extensa gama de valores posibles de conductividad térmica.

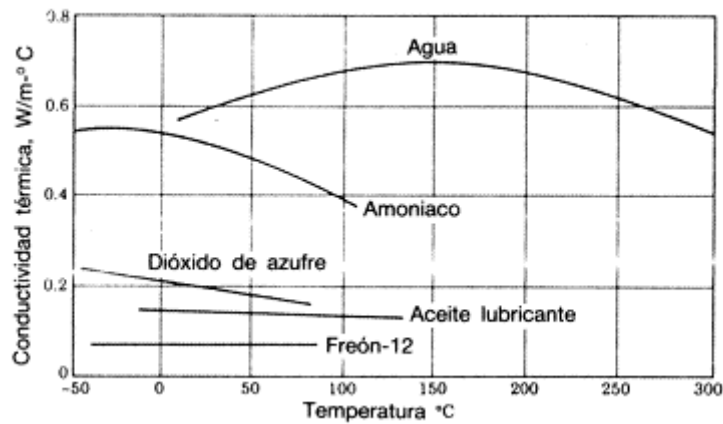
También puede observarse que, en términos generales, los líquidos son mejores conductores que los gases, y los sólidos mejores que los líquidos. Estas diferencias pueden explicarse, en parte, por el hecho de que en el estado gaseoso las moléculas de una sustancia están relativamente distantes entre sí y su movimiento es aleatorio. Esto significa que la transmisión de energía por choque moleculares es mucho más lenta que en el caso de un líquido. Por otro lado, un sólido de estructura cristalina, como el cuarzo tiene una conductividad térmica mayor que una sustancia sólida amorfa, como el vidrio. En el caso de los sólidos amorfos su conductividad térmica es del mismo orden de magnitud que la observada en los líquidos. La conductividad térmica de los metales tiende a disminuir a medida que aumenta la temperatura. Es posible representar la dependencia de la conductividad térmica con la temperatura mediante una relación lineal de la forma  $k = k_0(1 + bT)$  en la que  $k_0$  es la conductividad térmica a  $0^\circ\text{C}$  y  $b$  es una constante.

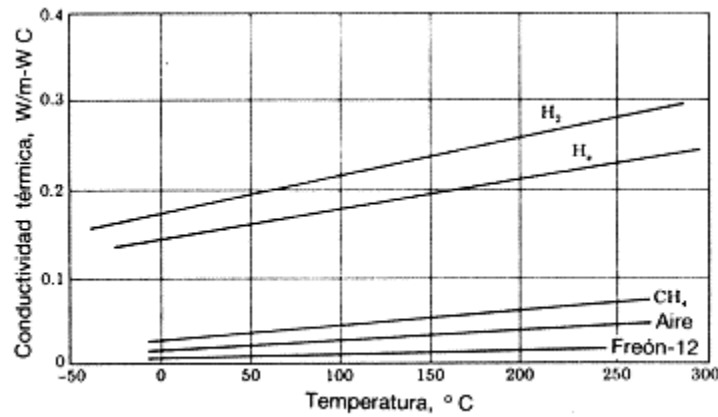
**Conductividad Térmica de Varias Sustancias\***

Sustancias	Conductividad térmica W/m-° C
Gases:	
Freón-12 (° C, 1 atm)	0.0083
Aire (° C, 1 atm)	0.0241
Líquidos:	
Anhídrido carbónico (liq. sat., 0° C)	0.105
Glicerina, pura (° C)	0.282
Agua (liq. sat., 0° C)	0.562
Sólidos:	
Vidrio, placa (20° C)	0.76
Hielo (0° C)	2.22
Ladrillo de magnesia (204° C)	3.81
Cuarzo (20° C)	7.6
Acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) (0° C)	16.3
Hierro, puro (0° C)	73
Cinc, puro (0° C)	112
Aluminio, puro (0° C)	202
Cobre, puro (0° C)	386
Plata, pura (0° C)	417



En la mayoría de los líquidos la conductividad térmica disminuye con la temperatura aunque el agua es una notable excepción. En los gases la conductividad térmica aumenta a medida que lo hace la temperatura y es relativamente independiente de la presión si esta se aproxima a la atmosférica.





### 3.3.3. Ecuación general de conducción del calor en un sólido isótropo

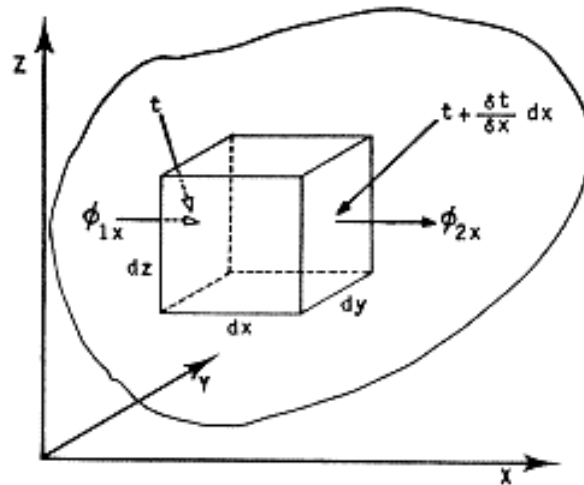
Según la ley básica de la conducción del calor  $\vec{q} = -k\nabla T$  o  $\vec{\Phi} = -kdS\nabla T$ , para determinar como es el flujo térmico hay que llegar a resolver como es el campo de temperaturas en una determinada región sometida a una serie de condiciones límite. Esta situación es similar al que se encuentra en el estudio del medio permeable hay que determinar la distribución del potencial hidráulico para determinar como va a ser el flujo hidráulico.

Para desarrollar la ecuación diferencial que resuelve este problema consideremos sólidos con las siguientes características:

- homogéneos de densidad  $\rho$  e isótropos
- los parámetros físicos como el calor específico a volumen constante  $c_v$  y la conductividad térmica  $k$  son magnitudes uniformes en el medio y constantes en el intervalo de temperaturas considerado
- las variaciones de volumen producidas por los cambios de temperatura son pequeñas comparadas con el volumen del cuerpo.
- las fuentes internas de calor están distribuidas uniformemente

Supongamos una distribución de temperatura  $t_0(x, y, z, 0)$ . Supondremos que en el sólido existen fuentes internas de generación de calor debido por ejemplo a reacciones químicas o nucleares, paso de corrientes eléctricas... Seleccionemos tres ejes perpendiculares  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Consideremos un paralelepípedo de dimensiones elementales  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  y hagamos el balance de energía correspondiente al calor conducido (entrada y salida) a través de sus seis caras y el calor engendrado dentro del sólido.





Consideremos en primer lugar la conducción del calor según la dirección  $x$ . Sea  $T$  la temperatura en la cara izquierda del paralelepípedo y  $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$  la temperatura en la cara derecha. Según la ley de Fourier:

$$\text{Flujo de entrada a través de la cara izquierda: } \Phi_{1x} = k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Flujo de salida a través de la cara derecha: } \Phi_{2x} = k dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} + k dy dz \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

$$\text{Diferencia entre el flujo saliente y entrante: } \Phi_{2x} - \Phi_{1x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz$$

$$\text{Ecuaciones análogas para las componentes } y, z: \Phi_{2y} - \Phi_{1y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz ; \Phi_{2z} - \Phi_{1z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz$$

Flujo absorbido (entrante-saliente), que se obtiene sumando las ecuaciones de cada una de las componentes:

$$\Phi = k \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

Consideremos ahora la parte debida a las fuentes internas de calor en el elemento de volumen. Si denominamos  $q_v$  a la energía suministrada por unidad de volumen y de tiempo por las fuentes internas de calor en el elemento de volumen considerado tendremos que la energía engendrada dentro del elemento por unidad de tiempo es:

$$\Phi' = q_v dx dy dz$$

**Balance de energía:** la suma de  $\Phi + \Phi'$  se invertirá en modificar la energía interna del elemento de volumen  $dV$  considerado, es decir estamos aplicando la primera ley de la Termodinámica pero por unidad de tiempo:

$$du = \delta Q - \delta W \Rightarrow du = \delta Q \Rightarrow dmc_v dT = \delta Q \Rightarrow dmc_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \rho c_v dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi + \Phi'$$

Es decir:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz + q_v dx dy dz = \rho c_p dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dividiendo la ecuación por  $k dx dy dz$  obtenemos:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{k} = \frac{\rho c_v}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde la magnitud  $\frac{k}{\rho c_v}$  se representa con la letra  $\alpha$  y se denomina **difusividad térmica** del material y

depende sólo de la naturaleza del sólido. Introducida en la ecuación resulta:

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ecuación general de Fourier de la conducción térmica en un sólido isótropo.

La resolución de la ecuación diferencial anterior permite determinar el campo de temperaturas en cada instante. Para ello hay que establecer para cada caso particular:

1. Las condiciones geométricas, características de la forma y tamaño del cuerpo en el que tiene lugar el proceso de conducción.
2. Las propiedades físicas del sistemas, es decir el conocimiento de las magnitudes  $\rho$ ,  $c_v$  y  $k$ .
3. La distribución inicial de temperatura
4. Las condiciones de contorno que describen las interacciones del sistema con el medio. Como la ecuación diferencial es de segundo orden, son necesarias dos condiciones de contorno que permitan determinar las dos constantes de integración.

Algunos casos particulares de la ecuación deducida para medios isótropos son los siguientes:

**CASO 1:** se engendra energía en el interior del elemento, pero el régimen es estacionario, entonces se obtiene  $\nabla^2 T + \frac{q_v}{k} = 0$  que es la llamada ecuación de Poisson.

**CASO 2:** Si no se engendra energía en el interior  $q_v = 0$  y el régimen es estacionario  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , la

ecuación se reduce a  $\nabla^2 T = 0$  que es la ecuación de Laplace, análoga a la deducida en Mecánica del Medio Permeable. Si además el flujo es unidimensional, la ecuación que determina la distribución de

temperaturas dentro del sólo en régimen estacionario se reduce a  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ .

### 3.3.4. Aplicación de la ley de Fourier a casos sencillos de conducción térmica en régimen permanente

Hemos visto que la expresión “unidimensional” se aplica a aquellos problemas de conducción del calor que solo precisan de una coordenada espacial para describir la distribución de temperaturas dentro del cuerpo. Esta situación se produce raramente en los problemas reales, pero un gran número de problemas de interés práctico para la ingeniería, puede resolverse bastante bien suponiendo la existencia de conducción unidimensional.

Para el caso de la conducción del calor unidimensional y en régimen permanente, la ecuación general de la conducción, se reduce a  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ . La solución de los problemas del régimen permanente unidimensional implican la integración de esta ecuación y la evaluación de las constantes de integración resultantes empleados las condiciones de contorno impuestas. La condición de contorno más sencilla es la que se refiere a las temperaturas de contorno o de primera especie. Otros tipos de condiciones de contorno que se conocen para la resolución de problemas son las siguientes:

- **Condición de contorno de primera especie:** se da la distribución de temperaturas en la superficie del sólido en cada instante. Condición de contorno que se utilizará en el estudio de un muro simple.

- **Condición de contorno de segunda especie:** se da la densidad del flujo calorífico para cada punto de la superficie en cada instante. Por ejemplo, en el caso de dos superficies juntas, a través de las cuales fluye calor, la densidad de calor es la misma para las dos.

- **Condición de contorno de tercera especie:** se da la temperatura exterior y la ley que gobierna la transferencia de calor entre la superficie del cuerpo y sus alrededores. En este caso es donde aparece la convección como mecanismo de transmisión el calor. Este proceso de transferencia de calor entre la superficie de un cuerpo y el exterior obedece a la ley de enfriamiento de Newton y las estudiaremos en detalle en el siguiente apartado.

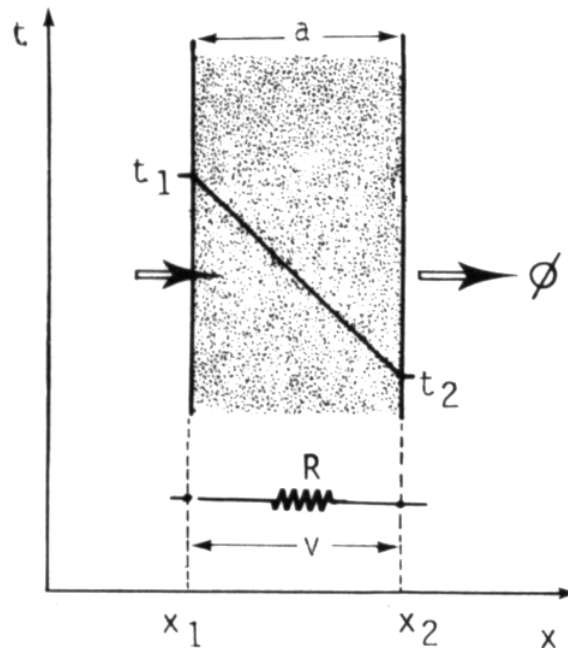
- **Condición de contorno de cuarta especie:** los cuerpos están en contacto perfecto y se igualan las potencias caloríficas transmitidas entre ellos. Este es el tipo de condición de contorno que se utiliza en el estudio de la transmisión de calor a través de la superficie de separación de dos paredes planas o cilíndricas que están en contacto perfecto.

A continuación estudiaremos algunos casos sin generación de calor en el interior:

#### a) Pared plana con temperaturas de contorno conocidas: condición de contorno de primera especie

Un problema elemental de conducción del calor es el de una pared plana de espesor finito manteniendo cada una de sus caras a temperatura uniforme y con conductividad constante.

La figura representa una pared plana de espesor  $a$  y constituida por un material de conductividad térmica constante  $k$  :



En régimen estacionario y sin fuentes internas de energía, el flujo unidimensional de calor cumple la ecuación :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C \Rightarrow T = Cx + C'$$

en donde  $C$  y  $C'$  son dos constantes cuyos valores pueden deducirse sabiendo que para  $x=0$ ,  $T=T_1$  y que para  $x=a$ ,  $T=T_2$ , así resulta:

$$C' = T_1 \quad \text{y} \quad C = \frac{(T_2 - T_1)}{a}$$

Por tanto:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{a} x$$

ecuación de una recta cuya pendiente  $\frac{T_1 - T_2}{a}$  crece con la diferencia de temperaturas que existe entre las superficies extremas del muro.

El flujo de energía térmica en un muro puede calcularse a partir de la ecuación de Fourier:

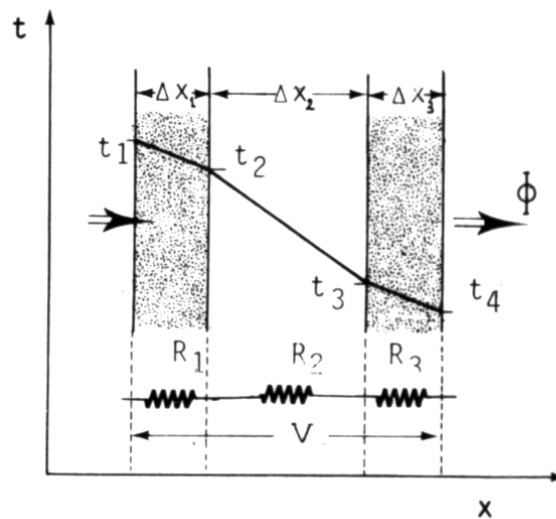
$$\Phi_x = -kS \frac{dT}{dx} = kS \frac{T_1 - T_2}{a} = \frac{T_1 - T_2}{(a/kS)} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{térmica}}}$$

que recuerda la ley de Ohm de los conductores eléctricos, la diferencia de temperatura recuerda la diferencia de potencial entre los extremos del conductor (ver figura) y el denominador la resistencia

eléctrica. Por ello la fórmula se denomina *ley de Ohm de la conductividad térmica* y  $R = \frac{a}{kS}$  es la *resistencia térmica* del muro.

**b) Pared de capas múltiples con temperatura de contorno conocidas: condición de contorno de primera y segunda especie**

Supongamos un muro compuesto de tres materiales distintos de espesores  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  y  $\Delta x_3$  y diferentes conductividades  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  (puede considerarse cualquier número de éstas). Las temperaturas en las superficies extremas son  $T_1$  y  $T_4$ :



Al establecerse el régimen permanente, el flujo a través de las distintas porciones del muro será el mismo y lo mismo sucede con la densidad de flujo térmico. Por tanto, llamando  $T_2$  y  $T_3$  a las temperaturas correspondientes a las superficies interiores entre los muros resulta:

$$\Phi = k_1 S \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} = k_2 S \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2} = k_3 S \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_3}$$

Despejando cada una de las diferencias de temperatura:

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{S} \frac{\Delta x_1}{k_1}$$

$$T_2 - T_3 = \frac{\Phi}{S} \frac{\Delta x_2}{k_2}$$

$$T_3 - T_4 = \frac{\Phi}{S} \frac{\Delta x_3}{k_3}$$

Al sumar estas ecuaciones se eliminan las temperaturas desconocidas y obtenemos la siguiente expresión para el flujo de calor a través de la pared en función de la diferencia total de temperatura:

$$\Phi = \frac{S(T_1 - T_4)}{\left(\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3}\right)} = \frac{(T_1 - T_4)}{\left(\frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{\Delta x_2}{k_2 S} + \frac{\Delta x_3}{k_3 S}\right)} = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

en donde puede verse que las resistencias térmicas de los cuerpos en serie son aditivas, lo mismo que ocurre con las resistencias eléctricas.

Una vez conocido el flujo calorífico podemos determinar las temperaturas  $t_2$  y  $t_3$  sustituyendo la expresión de  $\Phi$  en las ecuaciones iniciales. Entonces conocemos la distribución de temperaturas al ser lineal entre los valores conocidos (ver figura).

**c) Cilindro de capa única con temperaturas de contorno conocidas: condición de contorno de primera especie**

Una configuración geométrica muy sencilla desde el punto de vista matemático y que tiene gran importancia en ingeniería (tuberías, sistemas de calefacción, sistemas de aire acondicionado...) es el cilindro hueco. La superficie interior de radio  $r_1$  y la exterior de radio  $r_2$  se mantienen a las temperaturas uniformes  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. Se supone que el cilindro tiene una longitud  $L$  lo suficientemente grande como para despreciar las pérdidas por las bases. Como hay simetría cilíndrica:

$$T = T(r) \text{ y } S = S(r) = 2\pi rL$$

Entonces:

$$\Phi = -S(r)k \frac{dT}{dr} = -2\pi rLk \frac{dT}{dr} \Rightarrow \Phi \frac{dr}{r} = -2\pi kLdT$$

Como el régimen es permanente, entonces  $\Phi = cte$ , integrando la ecuación obtenemos:

$$\Phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi kL \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \Phi = 2\pi kL \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

La temperatura  $t$  para cualquier superficie cilíndrica concéntrica de radio  $r$  se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$\Phi \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = -2\pi kL \int_{T_1}^T dT \Rightarrow T = T_1 - \frac{1}{2\pi kL} \Phi \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

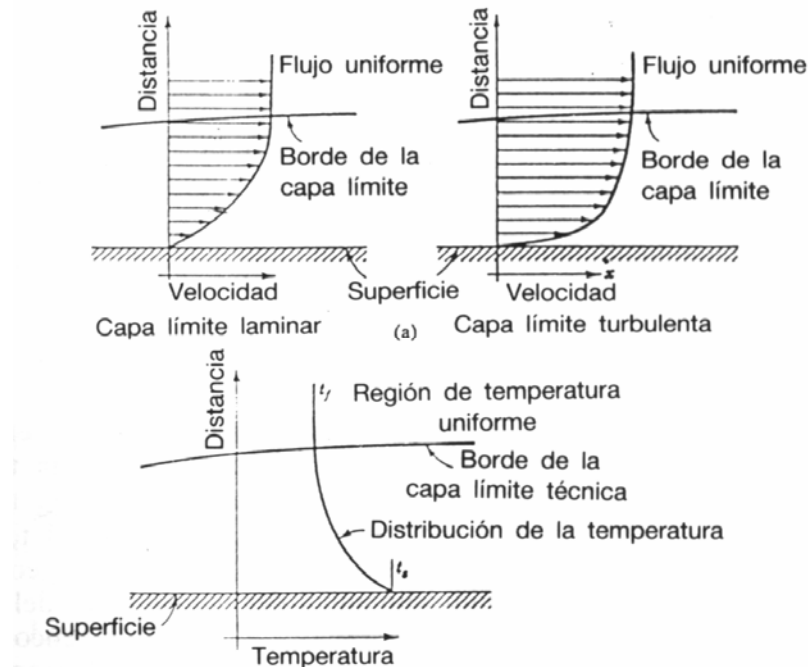
Sustituyendo el valor de  $\Phi$  obtendremos la distribución estacionaria de temperaturas:

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

### 3.4. LAS LEYES FUNDAMENTALES DE LA CONVECCIÓN

Hemos definido la “convección” como el mecanismo de la transmisión del calor que tiene lugar en un fluido debido a la conducción y al transporte de energía como consecuencia de los movimientos del fluido. Como el movimiento del fluido es la característica principal de la convección, conviene recordar algunos de los principios de la dinámica de los fluidos.

Consideremos el caso sencillo de flujo a lo largo de una superficie plana, la velocidad del fluido oscila desde un valor de “corriente libre” en los puntos distantes de la pared hasta un valor nulo. Por lo que respecta a fluidos como el aire o el agua, la capa límite en la que se produce la mayor parte de la variación puede ser bastante delgada es posible simplificar la descripción del proceso de convección a dicha capa. Normalmente el límite de la capa límite se sitúa a una distancia de la pared en la que la velocidad del fluido es igual a un porcentaje predeterminado del valor de la corriente libre. Este porcentaje depende de la precisión deseada siendo habitualmente de 99 ò 95%.



Si la superficie sólida se mantiene a una temperatura de  $T_s$ , que difiere de la temperatura del fluido,  $T_f$ , medida en un punto alejado de la superficie se observa que la variación de la temperatura de dicho fluido es análoga a la variación de velocidad descrita anteriormente. Es decir, la temperatura del fluido variará desde un valor  $T_s$ , en la pared, al de  $T_f$  lejos de ésta produciéndose la mayor parte de esta variación cerca de la superficie. Podemos entonces definir la “*capa límite térmica*” como la región existente entre la superficie y el punto en el que la temperatura del fluido ha alcanzado una cierta fracción  $T_f$ . En el exterior de la capa límite térmica se supone que el fluido es un receptor del calor a la temperatura uniforme  $T_f$ . Por regla general, la capa límite térmica no coincide con la capa límite de velocidad, aunque sí depende de ésta, es decir, el espesor de la capa límite de velocidad, la variación de la velocidad, el hecho de que el flujo sea laminar o turbulento.... son factores que determinan la variación de la temperatura en la capa límite térmica.

Si suponemos que el intercambio de calor entre la pared y el fluido está concentrada en la capa límite térmica de espesor  $\Delta z$ , la ley de Fourier se aplicaría a la conducción térmica dentro de esta película de conductividad  $k$  en la forma:

$$\Phi = kS \left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) = hS(T_S - T_f)$$

que es la *ley de enfriamiento de Newton* y que constituye la condición de contorno de tercera especie de la que hablamos cuando estudiamos la conducción. En esta expresión se ha incluido el cociente  $\frac{k}{\Delta z}$  en un solo *coeficiente de convección*  $h$  también llamado *coeficiente de transmisión del calor, coeficiente de película o conductancia térmica unitaria*. Sus unidades en el Sistema Internacional son  $\frac{W}{m^2 \cdot K}$ . El valor

de  $h$  depende en general de forma compleja de la composición del fluido, de la geometría de la superficie del sólido, estado de las superficies, las temperaturas, de la dinámica del movimiento del fluido a lo largo de la superficie... En un análisis detallado ni siquiera el coeficiente de convección es uniforme en toda la superficie y lo que se conoce como  $h$  es en realidad un valor promedio en la superficie, el coeficiente de convección promedio:

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h dS$$

Aunque nosotros aparentemente lo hemos definido de una forma sencilla, esto demuestra la complejidad del proceso de convección y las dificultades para determinar  $h$ . En un modelo simplificado para convección natural entre el aire y varias superficies los coeficientes pueden tener la siguiente forma:

- Lámina horizontal intercambiando calor hacia arriba:  $h = 2,5(T_S - T_f)^{\frac{1}{4}}$
- Lámina horizontal intercambiando calor hacia abajo:  $h = 1,3(T_S - T_f)^{\frac{1}{4}}$
- Lámina vertical:  $h = 1,76(T_S - T_f)^{\frac{1}{4}}$
- Tubos horizontales o verticales de diámetro  $D$ :  $h = 4,17 \left( \frac{T_S - T_f}{D} \right)^{\frac{1}{4}}$

La condición límite para la ecuación general de conducción del calor cuando tenemos un sólido limitado por un fluido convectivo de temperatura conocida se obtiene simplemente igualando en la superficie los flujos dados por la ley de enfriamiento de Newton y la de Fourier. Como ejemplo veamos el caso de una pared plana constituida por dos capas sólidas, limitada en cada cara por fluidos convectores. Las conductancias y conductividades térmicas las denotamos por  $h_{12}$ ,  $k_{23}$ ,  $k_{34}$  y  $h_{45}$ .

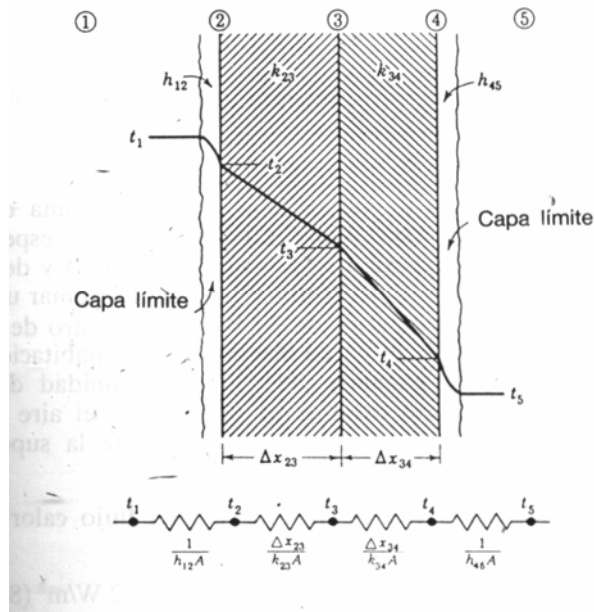
Al alcanzarse el régimen estacionario la cantidad de calor por unidad de tiempo  $\Phi$  cedida por el recinto a la temperatura  $t_1$  al recinto a la temperatura  $t_2$  por convección natural será igual a la transmitida por conducción a través del muro y así sucesivamente. En consecuencia los flujos en virtud de la leyes de conductividad y convección son respectivamente:

$$\Phi = Sh_{12}(T_1 - T_2)$$



$$\Phi = S \left[ \frac{T_2 - T_4}{\frac{\Delta x_{23}}{k_{23}} + \frac{\Delta x_{34}}{k_{34}}} \right]$$

$$\Phi = Sh_{45}(T_4 - T_5)$$



Despejando los términos que expresan diferencia de temperatura y sumando para eliminar  $T_2$  y  $T_4$  obtenemos la siguiente expresión para  $\Phi$  en función de la diferencia de temperatura total y de las propiedades térmicas de los materiales empleados:

$$\Phi = S \left[ \frac{T_1 - T_5}{\frac{1}{h_{12}} + \frac{\Delta x_{23}}{k_{23}} + \frac{\Delta x_{34}}{k_{34}} + \frac{1}{h_{45}}} \right] = \left[ \frac{T_1 - T_5}{\frac{1}{Sh_{12}} + \frac{\Delta x_{23}}{Sk_{23}} + \frac{\Delta x_{34}}{Sk_{34}} + \frac{1}{Sh_{45}}} \right]$$

De igual manera que hemos definido la resistencia térmica podemos definir la resistencia convectiva:

$$\Phi = \left[ \frac{T_1 - T_5}{R_{12convectiva} + R_{23térmica} + R_{34térmica} + R_{45convectiva}} \right]$$

La ecuación para el flujo también se puede describir haciendo  $\frac{1}{U} = \frac{1}{h_{12}} + \frac{\Delta x_{23}}{k_{23}} + \frac{\Delta x_{34}}{k_{34}} + \frac{1}{h_{45}}$ ,

esto es:

$$\Phi = SU(T_1 - T_5)$$

donde  $U$  se denomina coeficiente de **transmisión global o transmitancia**. Una vez conocido el flujo calorífico podemos determinar las temperaturas  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$  sustituyendo la expresión de  $\phi$  en las

ecuaciones iniciales. Conocidas estas temperaturas queda determinada la distribución de temperaturas en el interior del muro al ser ésta una distribución lineal. En las capas límite térmicas del fluido la distribución de temperaturas es más compleja y viene determinada por la dinámica del fluido. En la figura nos hemos limitado a dibujar su perfil sin entrar en más detalles sobre su expresión matemática.

Consideremos otro ejemplo, supongamos un cilindro homogéneo de conductividad térmica  $k$  y radios exterior e interior  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente, siendo  $T_{F1}$  y  $T_{F2}$  las temperaturas de los fluidos interior y exterior siendo  $T_{F1} > T_{F2}$  con  $h_1$  y  $h_2$  los coeficientes de colección. En el estado estacionario tendremos:

$$\Phi = 2\pi r_1 L h_1 (T_{F1} - T_1) \Rightarrow (T_{F1} - T_1) = \frac{\Phi}{2\pi L} \frac{1}{h_1 r_1}$$

$$\Phi = 2\pi k L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{\Phi}{2\pi k L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\Phi = 2\pi r_2 L h_2 (T_2 - T_{F2}) \Rightarrow (T_2 - T_{F2}) = \frac{\Phi}{2\pi L} \frac{1}{h_2 r_2}$$

Por tanto el flujo de calor se puede escribir como:

$$\Phi = 2\pi L U (T_{F1} - T_{F2})$$

siendo el coeficiente de transmisión global:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2 r_2}}$$

### 3.5. TRANSMISIÓN DE CALOR POR RADIACIÓN

El fenómeno físico fundamental que forma la base de todos los estudios sobre transmisión de calor es el hecho observado de que la temperatura de un cuerpo más caliente que su entorno tiende a disminuir con el tiempo. Esta disminución de temperatura significa que existe un flujo de energía desde el cuerpo. Los métodos discutidos hasta ahora es necesario algún medio físico para llevar energía de las fuentes de alta temperatura a los receptores de baja temperatura.

Si un cuerpo calentado se le aísla físicamente de su entorno más frío (vacío), se observa que su temperatura sigue disminuyendo con el tiempo, mostrando una pérdida de energía. Este mecanismo de transmisión de energía se llama **radiación térmica**. Varias teorías se han propuesto para explicar el transporte de energía por radiación una de ellas sostiene puede estar representado como un movimiento de una onda electromagnética. Estas ondas electromagnéticas se propagan en el vacío a la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ). La radiación está caracterizada por su longitud de onda  $\lambda$  o la frecuencia  $f$  relacionadas por la ecuación  $f = \frac{c}{\lambda}$ . La radiación térmica abarca un espectro entre  $10^{-7}$  y  $10^{-4}$  m. Las ondas

electromagnéticas de mayor longitud de onda (menor frecuencia) transportan menos energía que las de menor longitud de onda (mayor frecuencia).

Cuando un cuerpo se calienta, emite radiación electromagnética de una longitud de onda  $\lambda$  que se encuentra típicamente comprendida en el rango de longitudes de onda de 0,1 a 100 micras, a la que se denomina radiación térmica. Lo que denominamos radiación visible es una porción muy estrecha del espectro y de la radiación térmica, que se extiende aproximadamente desde 0,35 hasta 0,75 micras. A la distribución de energía emitida en función de la longitud de onda o frecuencia de la radiación se le denomina espectro de la radiación. La mayor parte de los sólidos y los líquidos tienen un espectro continuo de radiación, es decir, emiten energía en todas las longitudes de onda desde cero a infinito, aunque la intensidad con que lo hace depende fuertemente de la región del espectro en la que se observa la radiación emitida. En el caso de gases y vapores o en el caso de muchos metales con la superficie pulida, se tiene un espectro de emisión selectivo. Sólo se produce emisión en unas determinadas longitudes de onda. En general, esta energía emitida se debe a transiciones entre los estados electrónicos de los átomos o moléculas.

En los sólidos y líquidos opacos se produce una considerable absorción y emisión, y por tanto solamente una fina capa superficial interviene en el proceso de transmisión del calor por radiación. La energía radiante de un emisor aumenta con la temperatura, ya que su energía interna aumenta. Cuando la temperatura cambia, no sólo cambia la magnitud absoluta de la energía, sino también su distribución en longitudes de onda.

Todos los cuerpos emiten esta radiación a sus alrededores y a su vez absorben la radiación térmica procedente de los alrededores. Así, el sol transfiere energía a la tierra por radiación a través de millones de kilómetros de espacio vacío. El adjetivo monocromático se usará para describir una cantidad radiante que se aplica a una sola longitud de onda. La dependencia de longitud de onda de cualquier cantidad radiante se conocerá como dependencia espectral. Igualmente las cantidades de radiación muestran dependencias direccionales, en las definiciones que veremos a continuación los efectos direccionales no se tienen en cuenta.

Algunas definiciones importantes para el cálculo de los intercambios de calor por radiación son las siguientes:

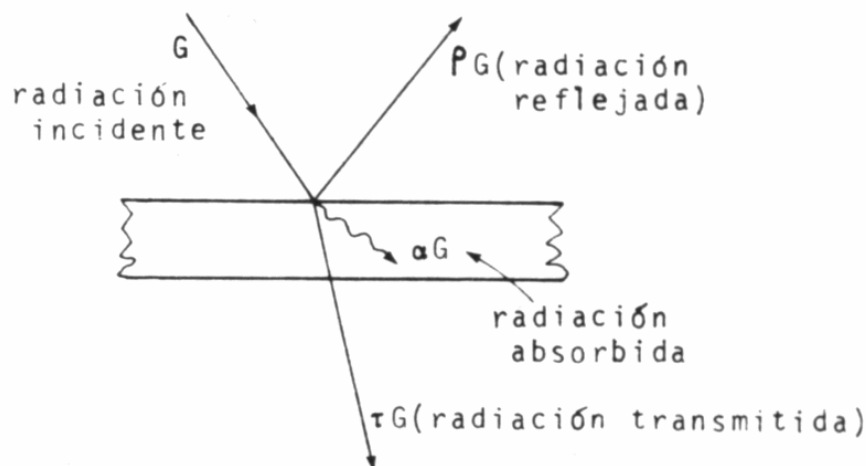
- **Potencia emisiva o flujo energético:** se define con este término a la energía irradiada por un cuerpo por unidad de tiempo en todo el espacio que le rodea. Se designa por  $\Phi$  y se puede medir situando un receptor que rodee completamente al cuerpo y que absorba toda la energía emitida. Se mide en vatios o en cualquier otra unidad de potencia.
- **Potencial espectral o flujo monocromático:** se denomina flujo espectral o monocromático al flujo energético emitido por unidad de longitud de onda, correspondientes a las radiaciones de longitud de onda comprendida entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ . Se designa por  $\Phi_\lambda$  y se mide en vatios/metro u otra unidad similar.
- **Poder emisivo o emitancia:** radiación térmica emitida que abandona la superficie por unidad de tiempo y por unidad de área de superficie. Tenemos potencia emisiva

monocromática y total y se designan por  $E_\lambda$  y  $E$  respectivamente. El poder emisivo y la potencia emisiva se relacionan mediante la expresión  $E = \frac{\Phi}{A}$  siendo  $A$  el área.

- **Radiosidad:** término usado para indicar la radiación que abandona una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área. Tenemos radiosidad monocromática y total y se designan por  $J_\lambda$  y  $J$  respectivamente. Se diferencia de la emitancia en que la radiosidad incluye la energía reflejada y la emitida.
- **Irradiación:** se utiliza este término para designar la cantidad por unidad de área de energía que incide sobre una superficie. Los símbolos  $G_\lambda$  y  $G$  se usan para designar la irradiación monocromática y la total respectivamente.

### 3.5.1. Absorción, reflexión y transmisión de la radiación

Consideremos un haz de energía radiante que incide sobre una superficie como se indica en la figura:



Para una energía incidente total  $G$  (o monocromática  $G_\lambda$ ), una porción de energía se absorbe dentro del material  $\alpha G$  ( $\alpha_\lambda G_\lambda$ ), otra porción se refleja en la superficie  $\rho G$  ( $\rho_\lambda G_\lambda$ ) y el resto se transmite dentro del cuerpo  $\tau G$  ( $\tau_\lambda G_\lambda$ ). Estas fracciones de energía absorbida, reflejada y transmitida son propiedades de la superficie y se denominan **absortividad** (factor de absorción o absorbancia), **reflectividad** (factor de reflexión o reflectancia) y **transmitividad** (factor de transmisión o transmitancia) respectivamente. Se definen los valores monocromáticos y totales de estas propiedades:

$\alpha$  : absortividad total: fracción absorbida para todas las longitudes de onda

$\alpha$ : energía absorbida/energía incidente

$\alpha_\lambda$  : absortividad monocromática: fracción absorbida para una longitud de onda  $\lambda$

Estas magnitudes monocromáticas se calcula de la siguiente manera:

$\alpha_\lambda$ : energía incidentes absorbida en el intervalo  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$  /energía incidente en este intervalo

$\rho$  : reflectividad total: fracción reflejada para todas las longitudes de onda.

$\rho_\lambda$  : reflectividad monocromática: fracción reflejada para una longitud de onda  $\lambda$  .

$\tau$  : transmitividad total: fracción transmitida para todas las longitudes de onda.

$\tau_\lambda$  : transmitividad monocromática: fracción transmitida para una longitud de onda  $\lambda$  .

El balance de energía para la energía incidente total o monocromática es:

$$\alpha G + \rho G + \tau G = G \Rightarrow \alpha + \rho + \tau = 1$$

$$\alpha_\lambda G_\lambda + \rho_\lambda G_\lambda + \tau_\lambda G_\lambda = G_\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

### Casos particulares:

- a) **Cuerpos opacos:** no transmiten nada de la radiación incidente. Son la mayoría de los sólidos que encontramos en la ingeniería excepto el vidrio:  $\tau = 0 \Rightarrow \alpha + \rho = 1$ .
- b) **Reflectores perfectos:** reflejan toda la radiación incidente:  $\alpha = \tau = 0 \Rightarrow \rho = 1$ .
- c) **Absorbentes perfectos (cuerpo negro):** absorbe toda la radiación incidente:  $\rho = \tau = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ .

### 3.5.2. Radiación en el interior de una cavidad:

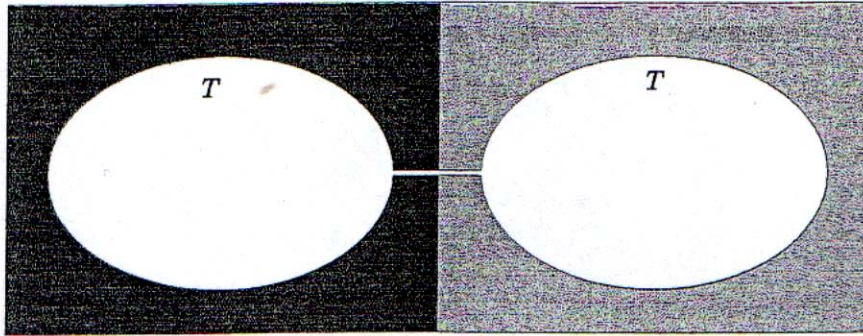
Denominaremos cavidad a un recinto hueco, cerrado y de paredes isoterma. Conocemos por experiencia que la radiación emitida por el exterior de la cavidad hacia fuera depende tanto de la temperatura como de la naturaleza de las paredes de la cavidad. Sin embargo, hay una característica muy especial de la radiación dentro de la cavidad. Se puede demostrar que en dicha cavidad, cuando todo el sistema está en equilibrio:

*Cualquier que sea la naturaleza de los materiales de las paredes interiores de la cavidad, la densidad de energía de la radiación en el interior de la cavidad depende exclusivamente de la temperatura de las paredes, mientras que la densidad espectral de energía depende exclusivamente de la temperatura y de la longitud de onda. Esto es:*

$$u = u(T)$$

$$u_\lambda = u_\lambda(\lambda, T)$$

Para demostrar esto, consideremos el caso de dos cavidades con paredes de distinta naturaleza que se encuentran a la misma temperatura como se muestra en la figura:



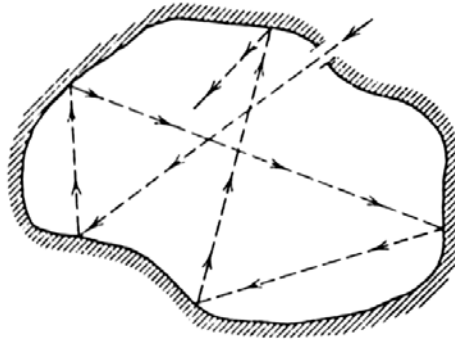
Si las intensidades de radiación fueran distintas, habría un transporte neto de energía desde una de las cavidades a la otra. Esto contradeciría el segundo principio de la termodinámica, ya que una cavidad se enfriaría y la otra se calentaría sin que se realizara trabajo sobre el sistema, luego las intensidades de radiación son iguales independientemente de la naturaleza de las paredes.

Para ver además que debe ser homogénea e isotrópica consideremos la presencia de un cuerpo alargado en el interior de la cavidad a la misma temperatura de las paredes. El hecho de que el cuerpo esté colocado en uno u otro sitio, o con sus superficies en una u otra orientación no hará que abandone el equilibrio térmico, ya que si no fuera así iría contra el segundo principio de la termodinámica. Por tanto, la radiación en el interior de la cavidad es además **homogénea e isotrópica**.

### 3.5.3. Cuerpo negro

Con el fin de describir las características de radiación y propiedades de las superficies reales, es conveniente definir una superficie ideal para fines comparativos (el cuerpo negro constituye un modelo ideal físico). Esta superficie ideal es un cuerpo perfectamente negro. Un cuerpo negro perfecto se define como aquel que absorbe toda la radiación incidente ( $\alpha, \alpha_\lambda = 1$ ). El término negro se emplea debido a que las superficies oscuras muestran normalmente altos valores de absorbitividad. Debido a que un cuerpo negro absorbe toda la radiación incidente, la única radiación que abandona su superficie es la emisión original.

Debido a que un cuerpo negro perfecto es una idealización, es posible producir en el laboratorio la radiación, que es muy próxima a la que se produciría por tal superficie. Imaginemos una cavidad hueca cuyas paredes se mantienen a una temperatura uniforme. Si practicamos un pequeño orificio en la pared (pequeño en comparación con el tamaño de la cavidad) entonces cualquier rayo de la energía incidente, que entra por él será sometido a un gran número de reflexiones internas, quedando absorbida una porción de radiación en cada reflexión. Muy poco del rayo incidente o prácticamente nada, escapará fuera por el orificio pequeño por el que penetró.



Se ha comprobado experimentalmente que la emitancia total de un cuerpo negro es función solamente de la temperatura. La dependencia de  $E^0$  con la temperatura se llama **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$E^0 = \sigma T^4$$

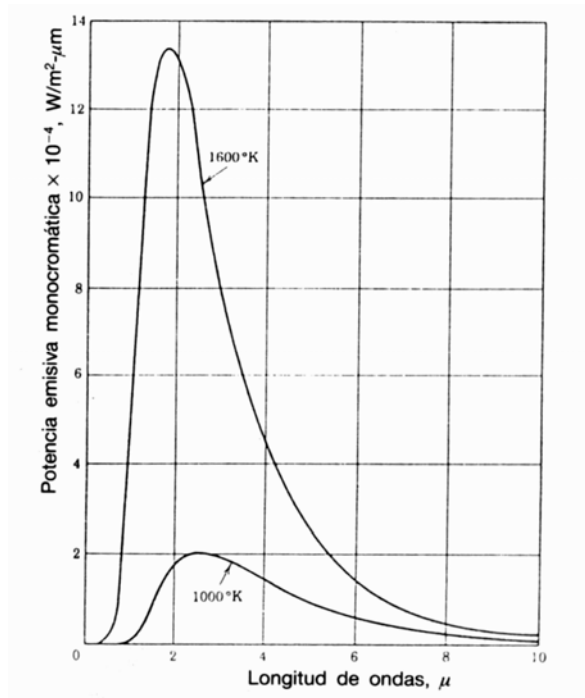
siendo  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W } / (\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  la constante de Stefan-Boltzmann. Debido al pequeño valor de  $\sigma$ , a bajas temperaturas el efecto de la radiación es insignificante. Por el contrario, la dependencia en  $T^4$  hace que, para altas temperaturas, la radiación se convierta en el mecanismo predominante del calor.

En 1900, Max Planck, a partir de hipótesis de la Mecánica Cuántica y Mecánica Estadística, demostró que la emitancia monocromática de un cuerpo negro a la temperatura  $T$  venía dada por la expresión:

$$E_{\lambda}^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{K_B \lambda T}} - 1}$$

Esta expresión es conocida como Ley de Planck, en la cual  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $h$  una constante conocida como constante de Planck de valor  $6,625 \times 10^{-34} \text{ J } / \text{s}$  y  $K_B$  la constante de Boltzmann de valor  $1,381 \times 10^{-23} \text{ J } / \text{K}$ .

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la ecuación de Planck para dos temperaturas diferentes:



Como puede verse, la energía total emitida crece con la temperatura, ya que

$$E^0 = \int_0^{\infty} E^0(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4.$$

Una segunda observación es que la emitancia monocromática de un cuerpo negro presenta un valor máximo que crece con la  $T$  y que se produce en las longitudes de ondas más cortas cuando  $T$  aumenta. Este comportamiento también lo predice la ley de Planck. La longitud de onda a la cual el poder emisivo o emitancia del cuerpo negro alcanza un valor máximo para una determinada temperatura puede determinarse imponiendo la condición de máximo en la expresión de la ley de Planck:

$$\frac{dE_{\lambda}^0(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \right]_{T=cte} = 0$$

El resultado de esta operación es  $\lambda_{\max} T = 2898 \mu m \cdot K$  que constituye la **ley del desplazamiento de Wien**. Así, según la ley de Wien cuando una corriente pasa por un filamento metálico se tiene que:

$$T \leq 3400 K \Rightarrow \lambda_{\max} > 0,85 \mu m \text{ (infrarrojo no visible)}$$

$$T \approx 3600 K \Rightarrow \lambda_{\max} \approx 0,8 \mu m \text{ (extremo rojo del espectro visible)}$$

$$T > 4000 K \Rightarrow \lambda_{\max} < 0,7 \mu m \text{ (espectro visible)}$$

resultados que concuerdan con la experiencia. Para el sol, con una temperatura en la superficie del orden de los 5888 K,  $\lambda_{\max} \approx 0,5 \mu m$  en el centro de la región visible del espectro. El ojo humano está adaptado a este máximo de emisión, siendo allí donde tiene su mayor sensibilidad.



En el límite de altas temperaturas, o longitudes de onda largas  $hc \ll K_B T \lambda$  y es posible desarrollar en serie la exponencial de la fórmula de Planck de la siguiente manera:

$$e^{\frac{hc}{K_B T \lambda}} \approx 1 + \frac{hc}{K_B T \lambda} + \dots$$

Así quedándonos en el primer orden del desarrollo en serie se tiene, para la emitancia monocromática:

$$E_{\lambda}^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{K_B T \lambda}} - 1} \approx \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{K_B T \lambda}{hc} = \frac{2\pi c K_B T}{\lambda^4}$$

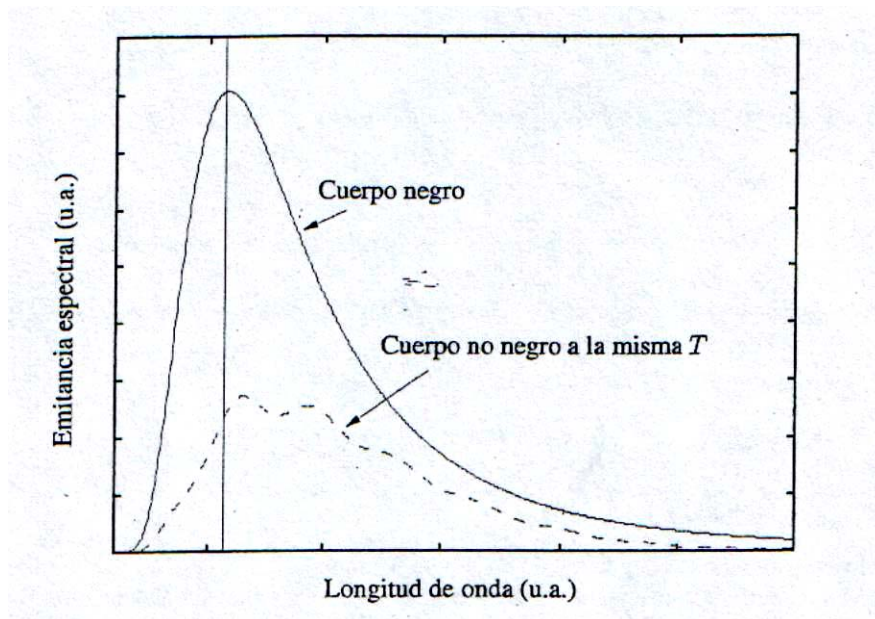
relación conocida como **fórmula de Rayleigh-Jeans**.

Antes de que Planck formulara su ley, la ley de Wien y la fórmula de Rayleigh-Jeans, junto con la ley de Stefan-Boltzmann eran las únicas relaciones conocidas para la transmisión del calor por radiación. Se sabía que la fórmula de Rayleigh-Jeans funcionaba razonablemente en el infrarrojo a temperaturas no bajas, pero el intento de extrapolarla a longitudes de onda mayores llevaba a una paradoja conocida como catástrofe ultravioleta. Según esto, a una determinada temperatura, la emitancia monocromática sería tanto mayor cuanto más corta fuera la longitud de onda. Así, se emitiría más cuanto mayor fuera la energía de la radiación, por ejemplo, a una temperatura de 5800 K, se emitiría más en el ultravioleta que en el visible, más en los rayos X que en el ultravioleta y más en los rayos gamma que en los rayos X, para una misma anchura espectral en todos los casos. El planeta Tierra estaría entonces achicharrada por los rayos X, gamma y otras radiaciones ionizantes de mayor energía que se emitirían aún en mayor cantidad y absurdo tras absurdo, la energía total emitida sería infinita.

La ley de Planck resuelve esta situación absurda y da un valor para la energía total emitida coincide con la Ley de Stefan-Boltzmann.

### 3.5.4. Emisividad monocromática y total

Al comparar el espectro de emisión de un cuerpo cualquiera con el de un cuerpo negro a la misma temperatura se observa lo siguiente:



1. La curva  $E_{\lambda}^0(\lambda, T)$  correspondiente al cuerpo negro está siempre por encima de la correspondiente a cualquier otro cuerpo no negro que se encuentra a la misma temperatura.
2. Su máximo corresponde a una longitud de onda inferior

En este sentido, si  $E_{\lambda}(\lambda, T)$  representa la emitancia monocromática de una superficie no negra a una temperatura  $T$ , entonces la **emisividad monocromática o factor de emisión monocromático** se define como el siguiente cociente:

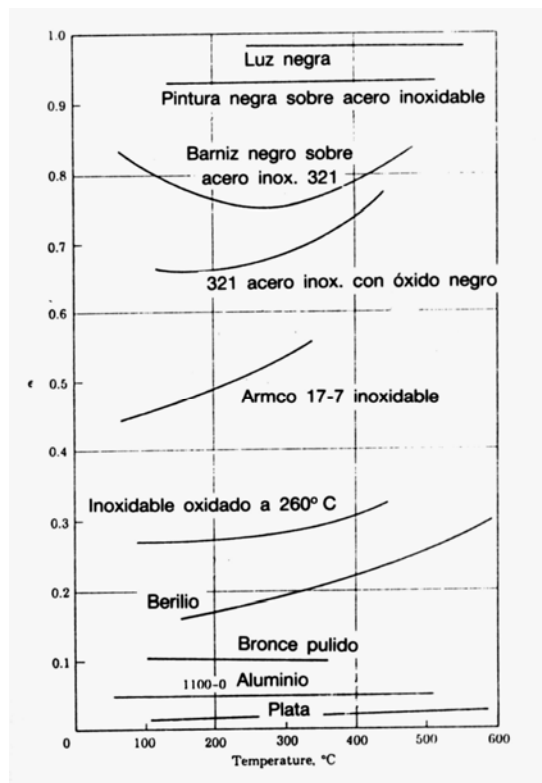
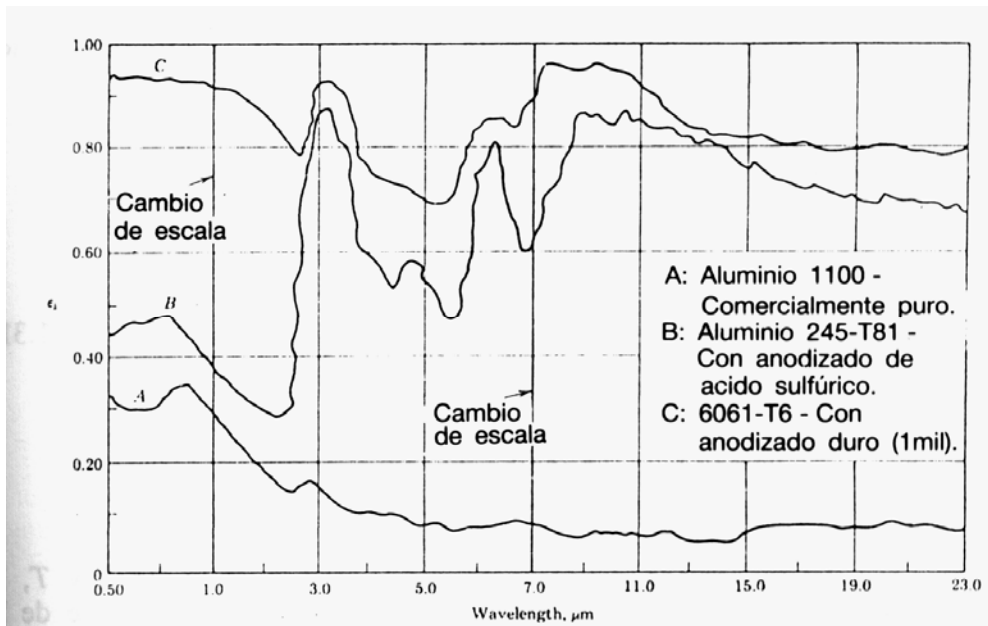
$$\epsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{E_{\lambda}(\lambda, T)}{E_{\lambda}^0(\lambda, T)}$$

donde  $\epsilon_{\lambda}(\lambda, T)$  es distinto para diferentes longitudes de onda de la energía emitida y también depende de la temperatura. La **emisividad total** de un cuerpo cualquiera a una temperatura  $T$  se define como la relación entre la emitancia total de una superficie no negra, con la de un cuerpo negro a la misma temperatura:

$$\epsilon(T) = \frac{E(T)}{E^0(T)} = \frac{\int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} E_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} E_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

de modo que la emitancia de una superficie cualquiera no negra se calcula rápidamente si  $\epsilon(T)$  es conocido:

$$E(T) = \epsilon(T) \sigma T^4$$



Entre la absorptividad  $\alpha_{\lambda}$  y la emisividad  $\epsilon_{\lambda}$  existe una relación importante. Para llegar a ella consideremos las siguientes experiencias:

Coloquemos un cuerpo negro en un recinto isoterma y supongamos que el cuerpo negro y el recinto están en equilibrio térmico, es decir a la misma temperatura. Si ambos están en equilibrio térmico no habrá intercambio neto de calor entre ambos. Así, serán iguales la emitancia del cuerpo negro, es decir el flujo radiante emitido por el cuerpo negro, y la irradiación del cuerpo negro o flujo radiante emitido por la cavidad. Matemáticamente esto se expresa como  $G = E^0(T)$ .

Coloquemos ahora en el interior de la cavidad un cuerpo no negro a la misma temperatura que las paredes. Antes vimos que como no debe hacer intercambio neto de calor entre el cuerpo negro y la cavidad, en el equilibrio el cuerpo negro emitía todo lo que absorbía.

Supongamos en este caso que la emisividad total del cuerpo no negro es  $\epsilon$  y la absorptividad total  $\alpha$  y de nuevo el equilibrio térmico requiere que las energías absorbidas y emitidas sean iguales, esto es  $\alpha G = E(T) = \epsilon E^0(T)$ , como  $G = E^0(T)$ , entonces  $\alpha = \epsilon$ .

Es decir, en equilibrio térmico la absorptividad  $\alpha$  es igual a su emisividad  $\epsilon$ . Esto constituye la **ley de Kirchhoff** de la radiación y solo es válido el resultado si el cuerpo está en equilibrio térmico. La ley de Kirchhoff se cumple también para los factores de absorción y emisividades espectrales  $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda$ , pero en esta forma es válida tanto en el equilibrio térmico como fuera de él.

En general, la emisividad total es una función solamente de la superficie y su temperatura, la absorptividad total, es además también función de la fuente de radiación incidente sobre la superficie. Por tanto, no es una simple propiedad de la superficie que se puede recoger en una tabla como la emisividad, una tabla tendría que hacerse para cada fuente. Esto se suele hacer para una fuente única que es el sol. En la tabla se recogen los valores de la absorptividad solar para un número de superficies junto con la emisividad.

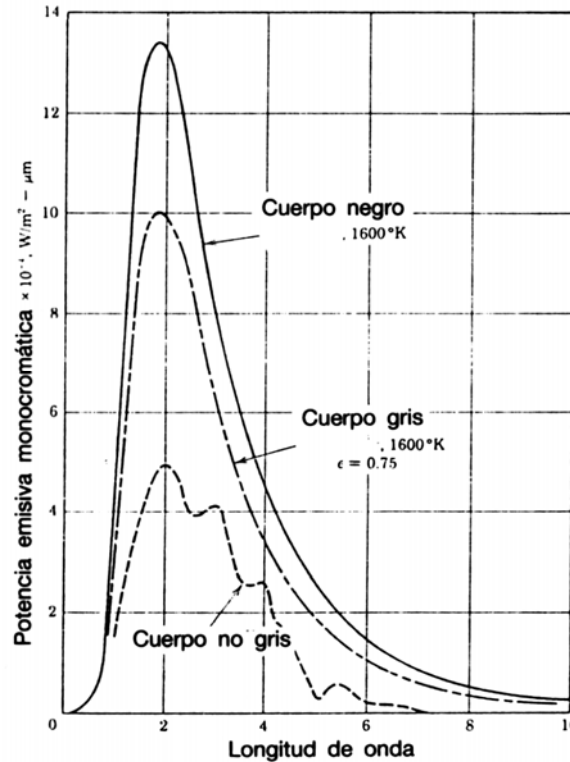
**Poder de absorción solar de varias superficies\***

Descripción de la superficie	Poder de absorción solar $\alpha_s$	Emisividad infraroja					
		250° K		308° K		556° K	
		$\epsilon$	$\alpha_s/\epsilon$	$\epsilon$	$\alpha_s/\epsilon$	$\epsilon$	$\alpha_s/\epsilon$
Hoja de aluminio recubierta con silicona de 10- $\mu$ m	0.522			0.12	4.35	0.12	4.35
Célula solar de silicio de 1 mm de espesor	0.938			0.316	2.97	0.497	1.89
Lámina de cromo de 0.1 mil de espesor sobre la de 0.5 mil de espesor de níquel sobre acero inoxidable 321	0.778			0.150	5.18	0.182	4.27
Acero inoxidable, tipo 410	0.764			0.130	5.88	0.180	4.24
Titanio 75A, calentado a 454° C durante 300 h	0.798			0.211	3.78	0.294	2.72
Titanio C-110 calentado a 427° C durante 100 h	0.524			0.162	3.24	0.202	2.59
Titanio anodizado	0.515	0.866	0.59			0.835	0.62
Ebanol C sobre el cobre	0.908			0.11	8.25		
Ebanol S sobre el acero	0.848			0.10	8.48		
Aluminio, 6061-T-6, 1 mil anodizado	0.923	0.841	1.10			0.847	1.09
Inconel X oxidado	0.898	0.711	1.26			0.809	1.11
Acero inoxidable 301, con óxido negro de Armco	0.891	0.746	1.19			0.756	1.18
Grafito, sobre silicato sódico sobre aluminio pulido	0.960	0.908	1.06			0.930	1.03
Vidrio, 3 mils sobre la célula solar de silicio	0.925	0.843	1.10			0.877	1.05
Titanox, 2 mils sobre pintura negra	0.154	0.885	0.17			0.905	0.17
Pintura negra epoxi sobre aluminio	0.951	0.888	1.07			0.924	1.03
Pintura blanca epoxi sobre aluminio	0.248	0.882	0.28			0.912	0.27

\* Recopilado de los datos recogidos en D. K. Edwards, R. D. Roddick, and J. T. Gier, «Basic Studies on the Use and Control of Solar Energy», Univ. Calif. Dept. Eng. Rept. 60-93, Los Angeles, 1960.

3.5.5. El cuerpo gris

Como ninguna superficie real irradia como un cuerpo negro, a veces se suele definir una superficie que tenga una distribución espectral semejante en forma a la de un cuerpo negro, pero con una emitancia o poder emisor inferior y de modo que se cumpla que  $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = cte$ . En la figura se representa las curvas de emisión de un cuerpo negro y un cuerpo gris, que son curvas completamente afines, y la correspondiente a un cuerpo real en el que la emisividad depende de la longitud de onda:



El coeficiente de absorción de un cuerpo gris será:

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda, T) d\lambda} = \alpha_\lambda \frac{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda, T) d\lambda} = \alpha_\lambda$$

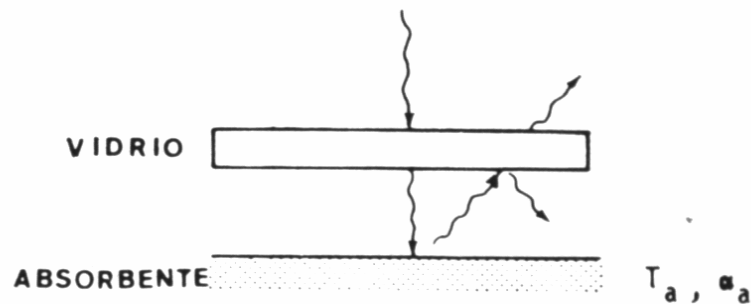
y análogamente para los casos de transmisión y reflexión. Así, para un cuerpo gris:

$$\alpha = \alpha_\lambda ; \rho = \rho_\lambda ; \tau = \tau_\lambda$$

quedando la ley de Kirchoff para un cuerpo gris en la forma  $\alpha = \epsilon$  con la diferencia de que en el caso del cuerpo gris esta expresión es válida cuando el cuerpo no está en equilibrio térmico con sus alrededores. Así, conociendo la emisividad de un cuerpo gris a una cierta longitud de onda se conocen también las emitancias y absorbancias totales de la superficie.

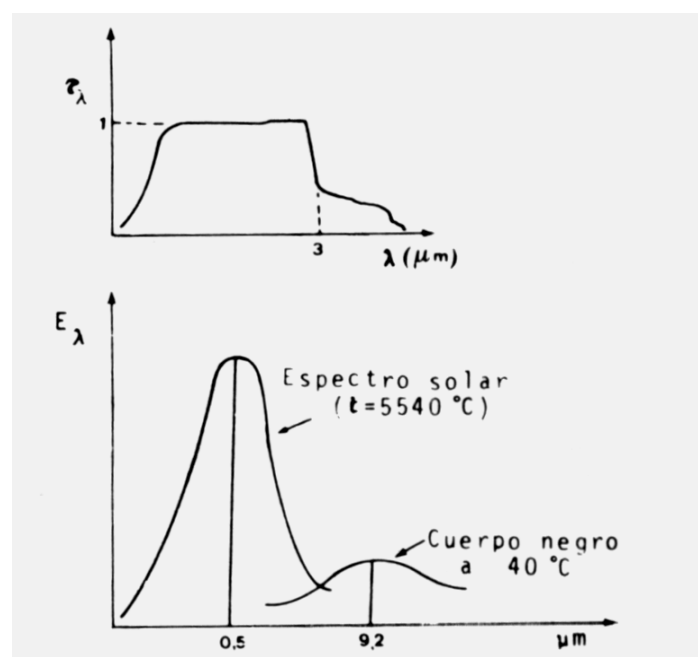
### 3.5.6. Efecto invernadero

Estudiaremos a continuación un comportamiento singular que tiene lugar cuando la radiación atraviesa una pared transparente (vidrio o plástico) y es absorbida por una superficie interior como se esquematiza en la siguiente figura:



Si la radiación incidente es la radiación solar, correspondiente aproximadamente a la emisión de un cuerpo negro a  $5540^{\circ}\text{C}$  el factor de transmisión monocromática del vidrio es aproximadamente igual a 1 para pequeñas longitudes de onda y casi nulo para grandes longitudes de onda. Así el vidrio transmite el visible y el infrarrojo próximo, pero no transmite las longitudes de onda superiores a  $3\ \mu\text{m}$ .

De este modo, la mayor parte de la radiación solar incidente, pasa sin dificultades a través del vidrio y es parcialmente absorbida por la superficie absorbente, dependiendo de su coeficiente de absorción. Por su parte, al calentarse el absorbente remite una radiación térmica correspondiente a su temperatura, cuyo espectro recuerda por ejemplo al de un cuerpo negro con una temperatura de aproximadamente de  $40^{\circ}\text{C}$ . Esta radiación cuyo máximo de emisión está en torno  $9\ \mu\text{m}$  que no es transmitida por el vidrio, de tal modo que la energía cedida por el absorbente queda atrapada en el recinto. El resultado final es que hay una acumulación de energía en el interior del recinto que actúa como captador solar, de modo que su temperatura es mayor que la que habría si no estuviera el vidrio.



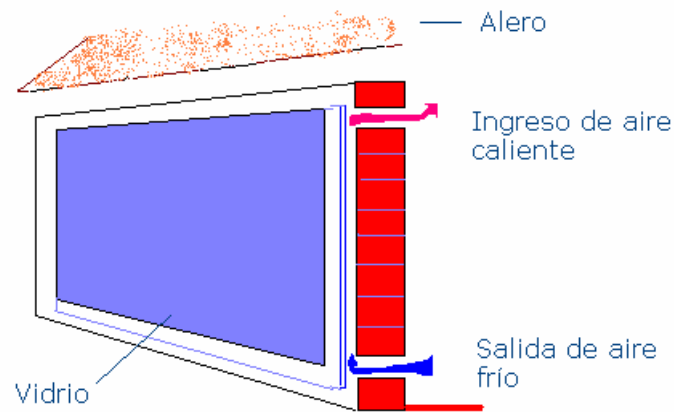
El efecto invernadero también aparece entre la tierra y la atmósfera. La radiación atrapada, de mayores longitudes de onda que la recibida del sol, determina fundamentalmente la temperatura superficial de la tierra. El efecto crece con la polución del aire que tiene a absorber más la radiación de longitud de onda larga, con el peligro de incrementar la temperatura media de la tierra.

Algunas aplicaciones de este efecto son las siguientes:

#### a) Muro Trombe:

Un ejemplo de aplicación del efecto invernadero en construcción es el muro Trombe cuyo esquema es el que se muestra en la figura y que se llama así por haber sido diseñado por el ingeniero Felix Trombe en Odelló una localidad junto a los Pirineos:

ESQUEMA DE FUNCIONAMIENTO DEL MURO TROMBE



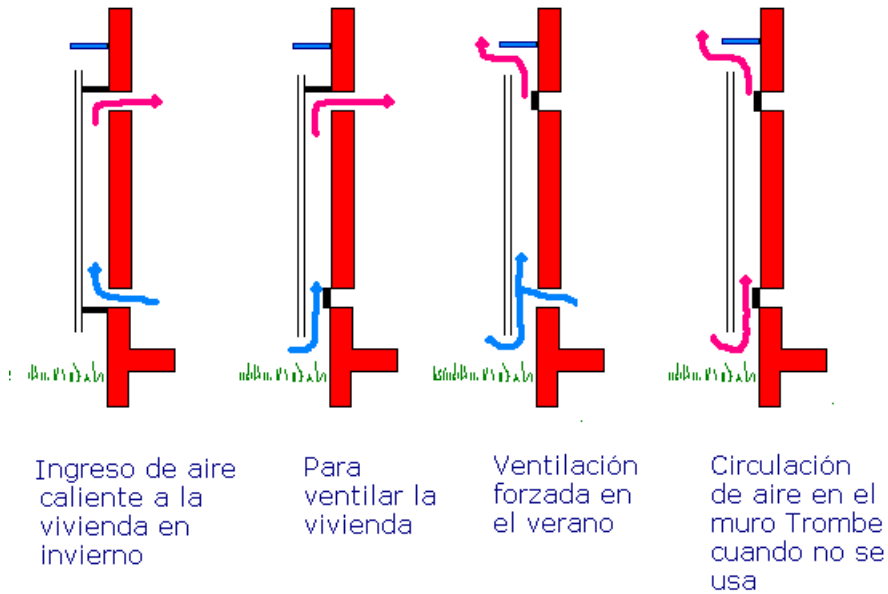
El muro Trombe es una pared pintada de negro que tiene delante de la pared un vidrio formando una cámara de aire. Es efectivo si se aprovecha al máximo la radiación solar, de modo que se arma sobre muros orientados hacia el sur en el hemisferio Norte y hacia el norte en el hemisferio sur. La radiación solar atraviesa el vidrio y el radiación térmica remitida por el muro no puede escapar. Dado que el aire caliente es menor denso que el aire frío, sube e ingresa en la casa por una abertura superior. Al mismo tiempo el aire frío de la casa sale por una ranura que se realiza en la parte baja del muro Trombe. El aire continuará circulando y calentando la vivienda. Lo maravilloso es que con un simple cambio de dirección de las ventanillas que regulan la circulación del aire, tanto en la parte superior como inferior, el muro Trombe también sirve para refrescar la casa al sacar aire caliente del interior.

Para dimensionar de una forma aproximada este sistema, hay que tener en cuenta los cuatro elementos que intervienen en él, esto es, **el muro** (espesor y material), **la superficie de vidrio**, el **número** y **dimensiones de los orificios**, y el espesor de la cámara de aire. La arquitectura bioclimática se basa en un estudio riguroso de las condiciones climáticas del entorno, por lo que no se pueden hacer cálculos generales.

El gran problema de este sistema, es que precisa de un muro ciego en la fachada sur del edificio,

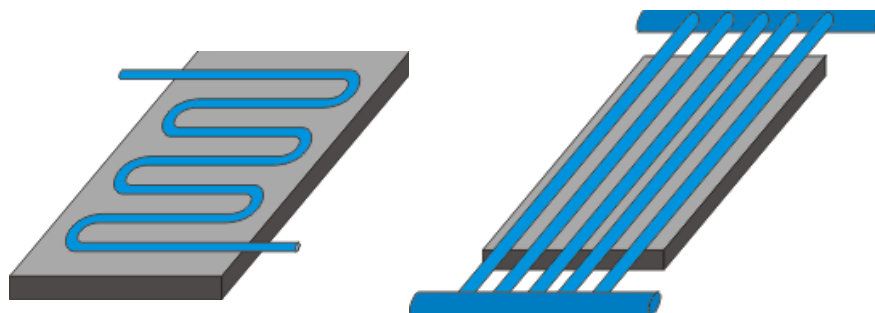
por lo que se anula tanto la entrada de luz como las posibles vistas que pudiera tener ese edificio. Por este motivo se han desarrollado variaciones del esquema descrito que buscan dar una respuesta a la captación de energía sin renunciar a la apertura de huecos.

### DIFERENTES USOS DEL MURO TROMBE



#### b) Superficies selectivas:

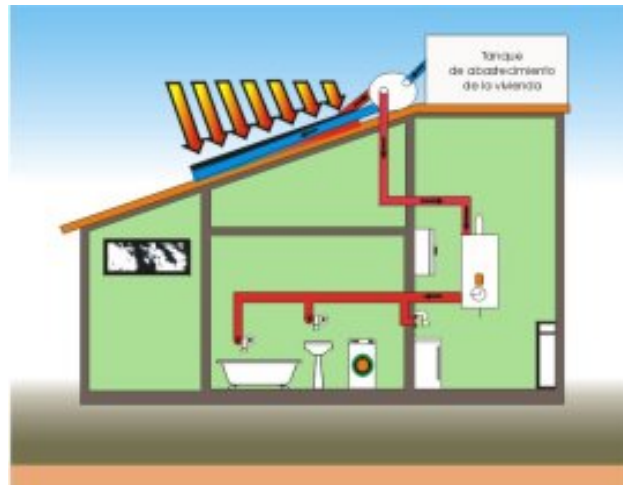
Otro ejemplo de aplicación del efecto invernadero son los colectores solares planos, que consta de una caja en la que dos de sus dimensiones son grandes y la tercera relativamente pequeña. Cinco de sus caras son de metal y la sexta de vidrio. Las cinco caras opacas están aisladas térmicamente y en el fondo de la caja hay una placa de color negro con una serie de conductos que llevan generalmente agua.



Existen varios tipos de tanques de almacenamiento para agua caliente. Los utilizados más frecuentemente con colectores de placa plana en sistemas nuevos son los sistemas integrados, donde los



tanques de almacenamiento son montados junto con los colectores, generalmente sobre el techo. Los tanques son ubicados sobre los colectores para aprovechar el efecto de termosifón. La densidad del agua varía según la temperatura. En general, el agua es más densa a mayores temperaturas. Los sistemas de termosifón hacen uso de este principio para hacer circular agua a través del colector, el agua fría, proveniente de la cañería, atraviesa el colector mientras el agua caliente es extraída del tanque de almacenamiento. Para que el termosifón sea exitoso es esencial que los caños tengan el diámetro adecuado.



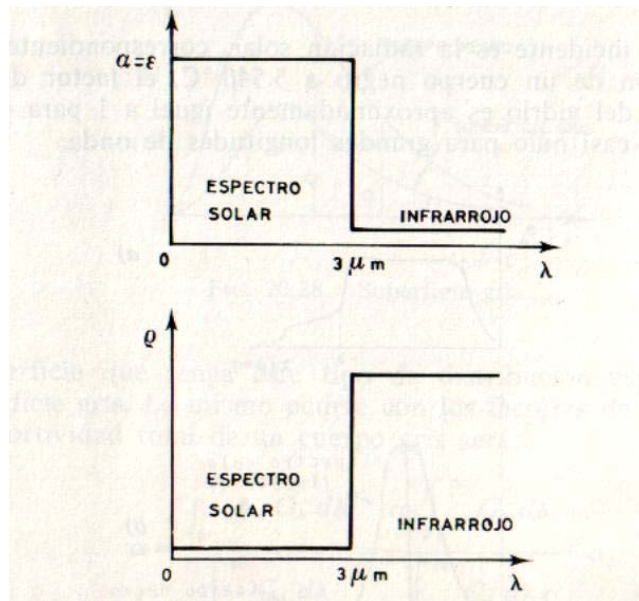
¿Cómo debe ser un captador solar (superficie transmisora y absorbente) para conseguir una mayor eficacia? Se busca conseguir temperatura por encima de los 100 °C.

Cuando la luz solar llega a una superficie, parte es absorbida, parte es reflejada y otra parte puede ser transmitida. Esto depende del material, textura y color que se utilice. Si bien a grandes rasgos los materiales que absorben mucho, emiten mucho, se han desarrollado algunos de baja emisividad.

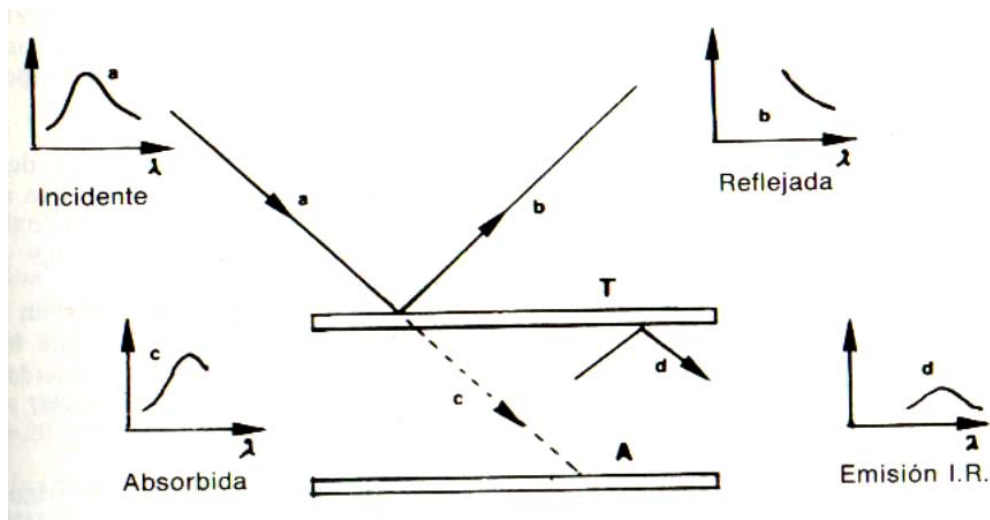
La superficie ideal de un captador de energía sería aquella que:

- Absorbe casi toda la energía de la radiación solar incidente ( $\lambda < 3\mu\text{m}$ )
- Emite débilmente en el infrarrojo lejano ( $\lambda > 3\mu\text{m}$ ). Esto correspondería a la mayor parte del espectro de radiación emitida por el absorbente a su temperatura (típicamente 50-100°C)

Si la transmisión es baja como  $\alpha + \rho = 1$ , otra forma de expresar esto es decir que la reflectividad es nula por debajo de  $3\mu\text{m}$  y la unidad para  $\lambda > 3\mu\text{m}$ . Estas superficies llamadas selectivas tienen las características que se representan en las siguientes figuras:



La siguiente figura describe el comportamiento típico de una superficie de este tipo:



La radiación solar incidente es en su mayor parte absorbida por la superficie. Sin embargo, como la superficie a su temperatura emite en el infrarrojo, a una longitud de onda más larga y su emisión es considerablemente más baja que la de un cuerpo negro a esa temperatura. Así absorbe bien en el visible pero emite mal en el infrarrojo dando como resultado un calentamiento hasta que se alcanza una temperatura a la que la emisión iguale a la absorción. Esta temperatura puede ser mayor que la temperatura que alcanzaría un cuerpo negro en las mismas condiciones. Veamos un ejemplo de esto:

Si  $G$  es la energía solar incidente por, en el estado estacionario se cumplirá para un cuerpo negro:

$$G = \sigma T_E^4 \Rightarrow T_E^4 = \frac{G}{\sigma}$$

En cambio para una superficie selectiva de características por ejemplo,  $\alpha(\text{visible}) = 0,9$  y  $\epsilon(\text{infrarrojo}) = 0,1$  se cumple:

$$\alpha G = \epsilon \sigma T_E^4 \Rightarrow T_E^4 = \frac{\alpha G}{\epsilon \sigma} = 9 \frac{G}{\sigma}$$

Si  $G = 1 \text{ kW} / \text{m}^2$ , la temperatura de equilibrio para el cuerpo negro es 364 K y para la superficie selectiva  $T = 631 \text{ K}$ . A estas superficies selectivas de interés para los colectores solares se les llama **superficies selectivas calientes**. Se les llama calientes en contraposición con las superficies de cal o yeso que tienen una que tienen una absorptividad y reflectividad de 0,1 para el espectro visible y de 0,9 para el infrarrojo lejano, por lo que se denominan **superficies selectivas frías**. Es decir, son materiales poco absorbentes para la radiación de onda corta y muy buenos radiadores para las de onda larga que emiten a temperatura ambiental, siendo este un fenómeno común entre los materiales de acabado de cerramientos.

### 3.5.7. Radiación directa entre cuerpos a distinta temperatura

Cuando dos superficies se ven, intercambian radiación en un proceso generalmente complejo de calcular porque parte de la radiación incidente sobre la superficie se refleja y vuelve a incidir sobre la superficie emisora. Un caso singular son las superficies planas paralelas, como en el caso de las cámaras de aire. Otro caso singular es el de una pequeña superficie rodeada de una gran superficie, ya que la pequeña superficie prácticamente no recibe las radiaciones reflejadas por la grande, como una estufa en medio de una habitación. En este apartado vamos a ver algunos ejemplos.

Para ello primero vamos a introducir el concepto de radiación efectiva:

Hemos visto que un cuerpo emite una radiación propia caracterizada por la emitancia o poder emisivo  $E$  por encontrarse a una cierta temperatura, esta emisión propia se hace a costa de su energía interna y viene determinada por su temperatura, material y estado de la superficie. Si no incidiera ninguna radiación sobre el cuerpo de éste saldría únicamente la radiación propia pero no es una situación real.

Consideremos un cuerpo en el que la transmisión es despreciable y por tanto  $\tau = 0$  y por consiguiente  $\rho + \alpha = 1$ . Sobre este incidirá la radiación  $E_{inc}$  procedente de otros cuerpos. Una parte de esta radiación es absorbida por el cuerpo  $E_{abs}$ , mientras que la parte restante es reflejada por la superficie  $E_{ref}$ . Además, el cuerpo emite su radiación propia. A la radiación total que sale del cuerpo se le denomina **radiación efectiva o emergente** con una de flujo radiante efectivo  $\Phi_{ef}$ :

$$\Phi_{ef} = \Phi + \Phi_{ref} = \Phi + \rho \Phi_{inc} = \Phi + (1 - \alpha) \Phi_{inc}$$

El flujo térmico resultante o neto emergente de la superficie que se denota por  $\Phi_{neto}$  se expresa de la siguiente manera:

$$\Phi_{neto} = \Phi_{ef} - \Phi_{inc} = \Phi + (1 - \alpha) \Phi_{inc} - \Phi_{inc}$$

De estas dos expresiones se puede obtener una relación entre  $\Phi_{ef}$  y  $\Phi_{neto}$ :

$$\Phi_{neto} = \Phi_{ef} - \Phi_{inc} = \Phi + (1 - \alpha) \Phi_{inc} - \Phi_{inc} = \Phi - \alpha \Phi_{inc} \Rightarrow \Phi_{inc} = \frac{1}{\alpha} (\Phi - \Phi_{neto})$$

$$\Phi_{ef} = \Phi + (1 - \alpha)\Phi_{inc} = \Phi + (1 - \alpha)\frac{1}{\alpha}(\Phi - \Phi_{neto}) = \frac{\Phi}{\alpha} + \Phi_{neto}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

**a) Intercambio de energía radiante entre dos superficies plano paralelas e infinitas:**

Un problema general de la transmisión del calor por radiación es aquél de intercambio radiante entre una colección de superficies de ubicación arbitraria y tamaños y formas arbitrarias. Uno de los aspectos fundamentales de tales problemas es la cuestión geométrica de que cantidad de la radiación que abandona una superficie incide realmente en otra. Por lo tanto, se estudiará en primer lugar un caso simplificado de intercambio radiante entre las caras opuestas de dos planos paralelos infinitos. En este ejemplo, uno está seguro del hecho de que toda la radiación que abandona una superficie es incidente sobre la otra. El supuesto de planos infinitos implica el desprecio de los efectos de borde y es frecuentemente una simplificación justificable si el espacio entre los planos es pequeño en comparación con el área de los planos.

Sean dos superficies plano paralelas  $S_1 = S_2 = S$  y  $d$  la separación entre las mismas cumpliéndose que  $S \gg d$ . Consideramos que existe una distribución uniforme de temperaturas en la superficie y que las superficies son opacas, esto es que  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  y  $\rho_1 = 1 - \alpha_1$ ,  $\rho_2 = 1 - \alpha_2$ .

La densidad neta de flujo radiante entre las dos superficies, será la diferencia entre las densidades efectivas de flujo radiante que salen de cada uno de los cuerpos:

$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \Phi_{ef1} - \Phi_{ef2}$$

$$\Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1} = \Phi_{ef2} - \Phi_{ef1}$$

de donde se deduce que  $\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = -\Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1}$ .

Por otro lado según las expresiones deducidas anteriormente:

$$\Phi_{ef1} = \frac{\Phi_1}{\alpha_1} + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) = \frac{S \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\Phi_{ef2} = \frac{\Phi_2}{\alpha_2} + \Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) = \frac{S \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} - \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

Restando ambas ecuaciones se obtendría:

$$\Phi_{ef1} - \Phi_{ef2} = \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \frac{S \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{S \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) = \frac{S \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{S \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} \Rightarrow \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\left[ \frac{\epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{\epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} \right] S}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1}$$

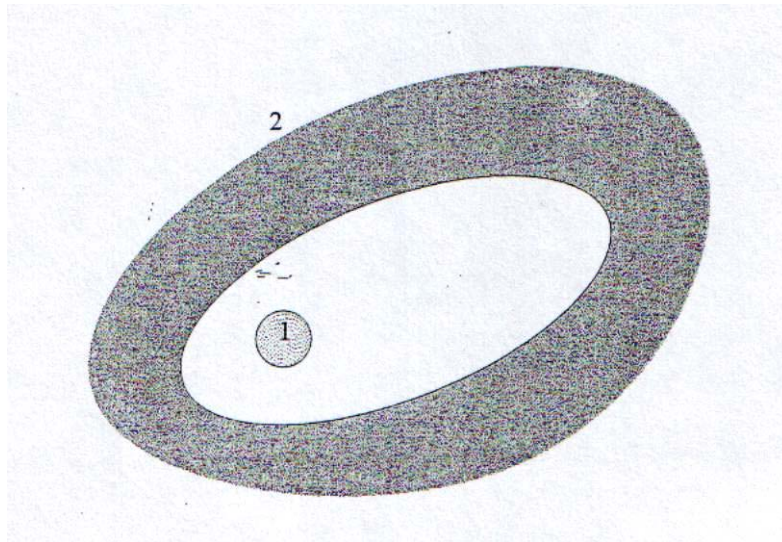
Si las superficies plano paralelas se pueden considerar como cuerpos grises podemos considerar  $\epsilon_1 \approx \alpha_1$  y  $\epsilon_2 \approx \alpha_2$  entonces:

$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \frac{[T_1^4 - T_2^4] \sigma S}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} = \frac{[T_1^4 - T_2^4] \sigma S}{\alpha_r}$$

siendo  $\alpha_r = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1$  la denominada absortividad reducida del sistema.

b) **Intercambio de energía radiante entre dos superficies una rodeando a la otra:**

La sencillez del problema que acabamos de resolver se ha debido sobre todo al hecho de que todas las radiaciones que abandonaban un plano incidían sobre el otro. Consideremos ahora dos cuerpos uno de los cuales rodea completamente al otro. Supongamos que sus superficies respectivas son  $S_1$  y  $S_2$ , sus y absorancias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , sus temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  con  $T_1 > T_2$ .



Ahora el flujo radiante neto será:

$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \Phi_{ef1} - F_{21} \Phi_{ef2}$$

siendo  $F_{21}$  el llamado factor de forma, que es un factor geométrico que da la fracción de la energía total emitida por 2 que es capturada por 1.  $F_{12}$  es 1 ya que toda la energía emitida por el cuerpo 1 es capturada por el cuerpo 2 al envolverlo. El flujo radiante efectivo que abandona cada uno de los cuerpo es:

$$\Phi_{ef1} = \frac{\Phi_1}{\alpha_1} + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) = \frac{S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} + \Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\Phi_{ef2} = \frac{\Phi_2}{\alpha_2} + \Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) = \frac{S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} + \Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

Teniendo en cuenta que en el estado estacionario  $\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = -\Phi_{neto}^{2 \rightarrow 1}$ , se obtiene que:

$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\frac{S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) F_{21}}$$

Si los cuerpos están en equilibrio térmico  $\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = 0$ , por tanto:

$$S_1 - F_{21} S_2 = 0 \Rightarrow F_{21} = \frac{S_1}{S_2}$$

mostrando que el factor de forma depende de la geometría del sistema y de sus propiedades ópticas, pero no de la diferencia de temperaturas entre los cuerpos al ser un factor puramente geométrico.

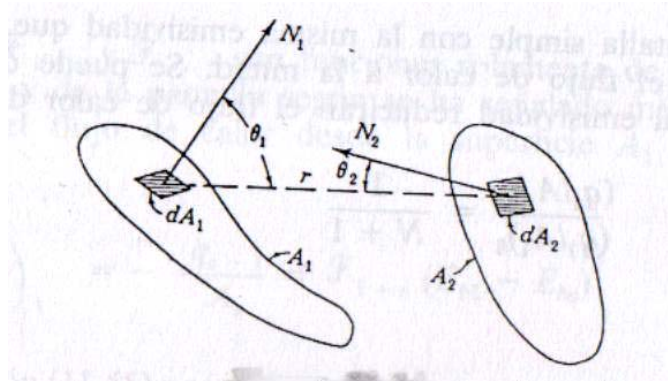
Si  $S_1 \cong S_2$  entonces  $F_{21} = 1$  y el resultado es de nuevo el obtenido para las placas plano paralelas.

Y de nuevo, si las superficies son grises:

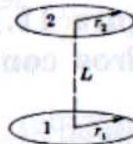
$$\Phi_{neto}^{1 \rightarrow 2} = \frac{S_1 \sigma T_1^4 - S_2 \sigma T_2^4 F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) F_{21}} = \frac{S_1 \sigma T_1^4 - S_2 \sigma T_2^4 \frac{S_1}{S_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) \frac{S_1}{S_2}} = \frac{S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\alpha_r}$$

siendo en este caso  $\alpha_r = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) \frac{S_1}{S_2}}$ .

ANEXO 1. Factores de forma:



$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_{21}} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$



$$R_1 = r_1/L \quad R_2 = r_2/L$$

