Inferencia Estadística

José Gabriel Palomo Sánchez
gabriel.palomo@upm.es

E.U.A.T.
U.P.M.

Julio de 2011

ÍNDICE I

Índice II

Índice III

Generalidades

La inferencia es la parte de la estadística que tiene como objetivo obtener conocimiento acerca del comportamiento de una población, a través de la información ofrecida por una muestra.

Identificación del Modelo de probabilidad I

Problema

¿Cómo se sabe qué modelo de probabilidad describe a una variable aleatoria determinada?

Identificación del modelo de probabilidad II

- En ocasiones se puede asociar un modelo teórico de probabilidad al comportamiento de una variable aleatoria por métodos deductivos. Por ejemplo, analizando si la naturaleza de la variable se puede identificar con un modelo binomial o de Poisson.

Identificación del modelo de probabilidad III

- De una manera general, el comportamiento de una variable aleatoria se modeliza analizando la información que ofrece una muestra.

Identificación del modelo de probabilidad IV

Observaciones

Para identificar el modelo de probabilidad que describe a una variable aleatoria, será necesario contestar a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se elige una muestra?
- ¿Cómo se analiza una muestra para asimilar el comportamiento de la población con el de un modelo de probabilidad?

Selección de la muestra I

- En general, una muestra se obtendrá por **muestreo aleatorio simple (M.A.S),** que es aquel que cumple las siguientes condiciones:
    - Todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de pertenecer a la muestra.
    - Los elementos muestrales son independientes.
- Una manera de asegurar el cumplimiento de las propiedades de un M.A.S. es el sorteo entre los miembros de la población.

Selección de la muestra II

Observación

Toda la información disponible sobre la composición de la población puede ser utilizada en la obtención de la muestra. Por ejemplo, mediante la construcción de estratos.

Identificación del modelo de probabilidad V

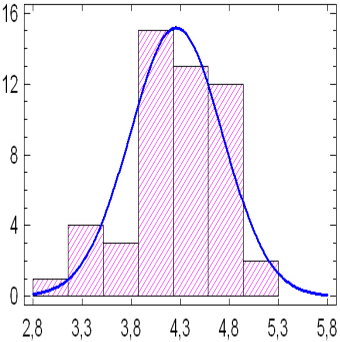
Obtenida la muestra $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de la variable aleatoria, X, ajustar un modelo que explique su comportamiento requiere, empleando métodos del análisis exploratorio de datos y de la inferencia estadística:

1. Identificar, en primer lugar, su **forma genérica**: Normal, exponencial, binomial,. . .
2. Calcular, en segundo lugar, el valor de los parámetros de la distribución conjeturada.

Identificación del modelo de probabilidad VI

El histograma facilita, en el caso de las variables continuas, la identificación de la forma genérica del modelo adecuado para la variable en estudio, o de una transformación de la misma.

El gráfico adjunto compara un modelo normal con el histograma de una muestra.



Identificación del modelo de probabilidad VII

Observación

El histograma y la función de densidad son comparables:

La superficie de una barra del histograma representa la proporción de los individuos muestrales que se encuentran en una clase, y la superficie encerrada por la función de densidad en un intervalo representa la proporción de los individuos de la población que se encuentra en dicho intervalo.

Si el modelo explica la variable, ambas proporciones deberían ser «similares.»

Identificación del modelo de probabilidad VIII

- La forma del modelo se **conjetura** analizando el aspecto gráfico de los datos muestrales, (histograma, diagrama de barras), y comparándola con las de los modelos teóricos, (función de densidad o de probabilidad.)

Estimación de los parámetros del modelo I. Estimación puntual

Cuando el modelo genérico está conjeturado hay que calcular sus parámetros.

MODELO	PARÁMETROS
Normal	μ, σ
Exponencial	λ
Poisson	λ
Binomial	n, p

La **estimación puntual** asigna un valor concreto a cada uno de los parámetros desconocidos.

Estimación de los parámetros del modelo II. Método de los momentos

¿Cómo se hace esta asignación?

- **El método de los momentos** consiste en igualar los parámetros poblacionales con los muestrales:

$$\mu = \bar{x}, \quad \sigma^2 = s^2, \quad p = \hat{p}, \ldots$$

Observación

El método de los momentos no emplea la información relativa a la forma de la distribución.

Estimación de los parámetros del modelo III. Método de máxima verosimilitud

- El método de máxima verosimilitud es un método de estimación puntual que sí tiene en cuenta la información relativa a la forma de la distribución.

- El método de máxima verosimilitud consiste en asignar a un parámetro desconocido el valor del mismo que hace más verosímil la muestra obtenida.

Estimación de los parámetros del modelo IV. Método de máxima verosimilitud. Ejemplo

Supóngase que se desea conocer el porcentaje de alumnos de una autoescuela que aprueban el examen en la primera ocasión. Para ello se eligen diez alumnos de la autoescuela al azar, de los cuales ocho aprueban el examen en la primera ocasión.

Con esta información ¿cuál sería el valor más razonable que se podría asignar al porcentaje global de alumnos de la autoescuela que aprueban el examen la primera vez que lo realizan?

Estimación de los parámetros del modelo V. Método de máxima verosimilitud. Ejemplo

Si se supone que existe una proporción, p, de alumnos de esa autoescuela que aprueba el examen a la primera, y que los aprobados se dan con independencia, el número de alumnos, de entre diez elegidos al azar, que aprueban el examen a la primera se comportará como una $B(10, p)$.

Estimación de los parámetros del modelo VI. Método de máxima verosimilitud. Ejemplo

La siguiente tabla indica, para distintos valores de p, la probabilidad de que al elegir diez alumnos de la autoescuela al azar, ocho de ellos aprueben el examen a la primera:

p	$P(8 \text{ aprobados a la primera} \mid p)$
$0'1$	$0'3645 \times 10^{-6}$
$0'2$	$0'7372 \times 10^{-4}$
$0'3$	$0'00144$
$0'4$	$0'01061$
$0'5$	$0'04394$
$0'6$	$0'12093$
$0'7$	$0'23347$
$0'8$	$0'30199$
$0'9$	$0'19371$
$0'95$	$0'07463$

Estimación de los parámetros del modelo VII. Método de máxima verosimilitud. Ejemplo

La probabilidad de obtener la muestra seleccionada es máxima cuando $p = 0'8$, (se puede demostrar que es así para cualquier valor de p).

Por lo tanto, parece lógico tomar como valor de p:

$$p = \hat{p} = 0'8.$$

Se dice que $\hat{p}$ es el estimador **máximo verosímil de** p.

Estimación de los parámetros del modelo VIII.

Observación

En muchos casos: normal, binomial, exponencial, Poisson, ..., los métodos de los momentos y de máxima verosimilitud ofrecen los mismos resultados.

Estimación de los parámetros del modelo IX. Observaciones

- La estimación puntual no resuelve completamente el problema de calcular el valor de los parámetros del modelo que describe una variable aleatoria porque:

1. Las muestras son variables aleatorias con la misma distribución que la población. Por lo tanto:
2. Los estadísticos, $\bar{x}$, $\hat{s}^2$, $\hat{p}$, ... son variables aleatorias.

Estimación de los parámetros del modelo X. Consecuencias

1. La estimación puntual de un parámetro siempre será aproximada, puesto que depende del azar a través de la muestra.
2. En todo caso se cometerá un error al estimar un parámetro puntualmente.
3. Será necesario conocer alguna cota del error cometido en la estimación del parámetro.

Estimación de los parámetros del modelo XI. Intervalos de confianza

- Para acotar el error cometido en la estimación de un parámetro se utilizan los **intervalos de confianza**.

Definición

Un intervalo confianza para un parámetro es un intervalo numérico en el que se encuentra dicho parámetro, con un nivel de seguridad conocido que nunca es el 100 %.

Estimación de los parámetros del modelo XII. Intervalos de confianza

Problema

¿Cómo se construyen intervalos de confianza?

- Para construir intervalos de confianza se razona sobre una distribución de probabilidad que relacione el estadístico adecuado con el parámetro que se quiere estimar.

Intervalos de confianza para la media de una normal I

Recordatorio:

- Si una muestra $\{x_1, \ldots, x_n\}$ permite conjeturar que una variable aleatoria X se distribuye como una $N(\mu, \sigma)$, los métodos de los momentos y de máxima verosimilitud toman como estimadores de μ y σ, respectivamente:

$$\mu \cong \bar{x} \quad \text{y} \quad \sigma^2 \cong s^2.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal II

Ahora bien:

- $\bar{x}$ es una variable aleatoria.
- Se puede demostrar que si $X \approx N(\mu, \sigma)$, entonces:

$$\boxed{\bar{x} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

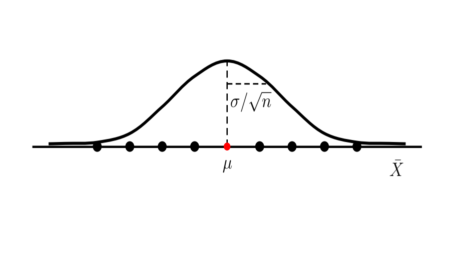
$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)}$$

Intervalos de confianza para la media de una normal III

La distribución de la media implica que si se calcularan todas las muestras de tamaño n de la población, las medias muestrales se situarían en torno a μ con una variabilidad inversamente proporcional al tamaño muestral, como indica la figura.

Como $E(\bar{x}) = \mu$, se dice que $\bar{x}$ es un estimador **centrado** de μ.

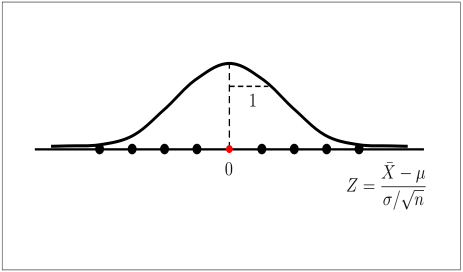


Intervalos de confianza para la media de una normal IV

Equivalentemente, si se calcularan todas las muestras de tamaño n, los valores del estadístico

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

se situarían en torno a 0 con una deviación típica igual a 1, como indica la figura.



Intervalos de confianza para la media de una normal V

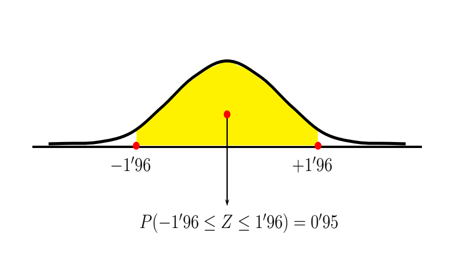
Obsérvese que aunque el valor de

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

no se puede calcular, sin embargo sí se puede asegurar, por ejemplo, que

$$P(-1'96 \leq Z \leq 1'96) = 0'95,$$

como puede verse en la figura.



Intervalos de confianza para la media de una normal VI

- Por lo tanto, algebraicamente,

$$P(-1'96 \leq Z \leq 1'96) = 0'95.$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(-1'96 \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1'96\right) = 0'95.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal VII

De donde:

$$P\left(\bar{x} - 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0'95.$$

Por lo tanto,

$$P\left[\mu \in \left(\bar{x} - 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] = 0'95.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal VIII

- El intervalo

$$\left(\bar{x} - 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1'96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

es un **intervalo de confianza** para μ al 95 %.

Ésto significa que, a priori, la probabilidad de que μ se encuentre en este intervalo es el 95 %.

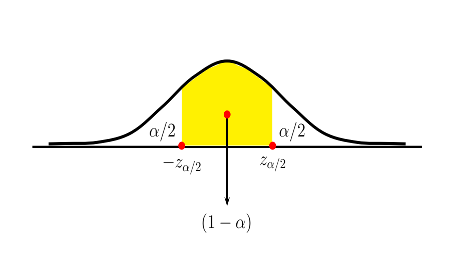
A posteriori, el 95 % es la confianza del intervalo.

Intervalos de confianza para la media de una normal IX

En general, para cualquier valor $\alpha \leq 1$, se pueden encontrar dos números $z_{\alpha/2}$ y $-z_{\alpha/2}$, tales que:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = (1-\alpha),$$

como puede verse en la figura.



Intervalos de confianza para la media de una normal X

- Algebraicamente,

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XI

De donde:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Por lo tanto, a priori:

$$P\left[\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] = (1 - \alpha).$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XII

- El intervalo

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

es un **intervalo de confianza** para μ al $(1-\alpha) \times 100\,\%$.

Esto significa que, a priori, la probabilidad de que μ se encuentre en este intervalo es el $(1-\alpha) \times 100\,\%$.

A posteriori, $(1-\alpha) \times 100\,\%$ es la confianza del intervalo.

Intervalos de confianza para la media de una normal XIII

Problema

- Obtenida la muestra, el cálculo del intervalo de confianza anterior no se puede realizar porque el valor exacto de σ es desconocido.

Solución

- Se puede sustituir σ por una aproximación, por ejemplo: $\hat{s}$.

Intervalos de confianza para la media de una normal XIV

De esta manera no se utilizará el estadístico

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}},$$

sino que se empleará el valor de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s} / \sqrt{n}}.$$

Ahora bien, t **no se comporta como una** $N(0,1)$. Sin embargo, se demuestra que:

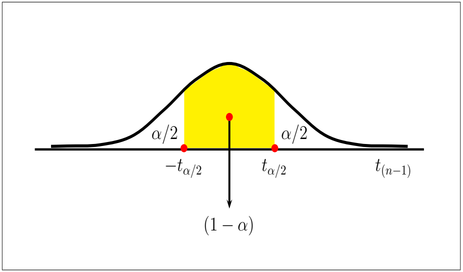
$$\boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s} / \sqrt{n}} \approx t_{(n-1)}}$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XV

Obsérvese que aunque el valor de t no puede calcularse, en general, para cualquier valor $\alpha \leq 1$, se pueden encontrar dos números $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$, tales que:

$$P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = (1-\alpha),$$

como puede verse en la figura.



Intervalos de confianza para la media de una normal XVI

- Algebraicamente,

$$P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s}/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XVII

De donde:

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Por lo tanto, a priori:

$$P\left[\mu \in \left(\bar{x} - t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - \alpha.$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XVIII

- El intervalo

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2} \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right)$$

es un **intervalo de confianza** para μ al $(1-\alpha) \times 100\,\%$.

Esto significa que, a priori, la probabilidad de que μ se encuentre en este intervalo es el $(1-\alpha) \times 100\,\%$.

A posteriori, $(1-\alpha) \times 100\,\%$ es la confianza del intervalo.

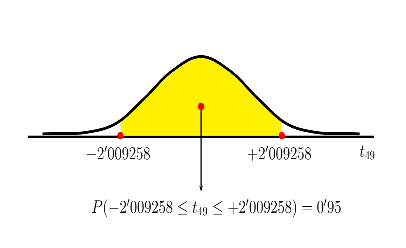
Intervalos de confianza para la media de una normal XIX. Ejemplo

Al realizar el estudio de una muestra determinada de tamaño 50, parece razonable conjeturar que dicha muestra procede de una población $N(\mu, \sigma)$. Además: $\bar{x} = 6'23$ y $\hat{s} = 1'15$.

Para calcular un intervalo de confianza para μ, se tiene en cuenta que en una t_{49}, se cumple que:

$$P(-2'00958 \leq t \leq 2'00958) = 0'95,$$

como ilustra la figura.



Intervalos de confianza para la media de una normal XX. Ejemplo

- Algebraicamente,

$$P\left(-2'00958 \leq \underbrace{\frac{6'23-\mu}{1'15/\sqrt{50}}}_{t} \leq +2'00958\right) = 0'95.$$

Por lo tanto, con el 95 % de confianza:

$$\mu \in \left(\underbrace{6'23 - 2'00958 \times \frac{1'15}{\sqrt{50}}}_{5'9031}, \underbrace{6'23 + 2'00958 \times \frac{1'15}{\sqrt{50}}}_{6'5568}\right).$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XXI. Ejemplo

- Es decir, $(5'9031; 6'5568)$ es un intervalo de confianza para μ al 95 % de confianza.
- Lo que significa que existe una seguridad del 95 % acerca de que el verdadero valor de μ, que sigue siendo **desconocido**, se encuentre dentro de este intervalo.
- El valor más verosímil para μ es $\mu \cong \bar{x} = 6'23$

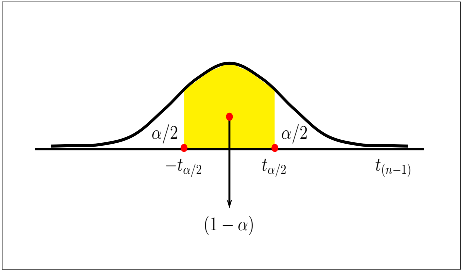
Intervalos de confianza para la media de una normal XXII. La confianza del intervalo

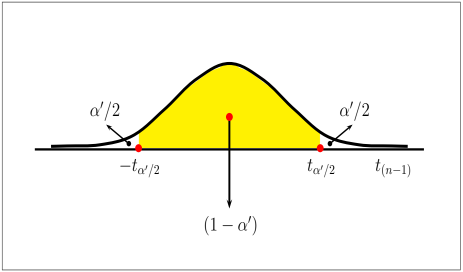
¿Cómo se puede mejorar la confianza de un intervalo?

- Recordando que el valor de la confianza es $(1-\alpha)\times 100\,\%$, para aumentarla basta con disminuir α.

Intervalos de confianza para la media de una normal XXIII. La confianza del intervalo

Gráficamente,





Intervalos de confianza para la media de una normal XXIV. La confianza del intervalo

- Al disminuir α aumenta $t_{\alpha/2}$ en valor absoluto:

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow |t_{\alpha'/2}| > |t_{\alpha/2}|$$

- Como consecuencia aumenta la longitud del intervalo de confianza

$$\left(\bar{x} \pm |t_{\alpha/2}| \times \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right)$$

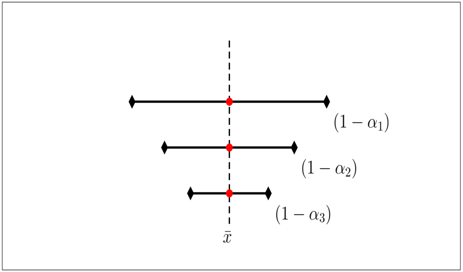
Intervalos de confianza para la media de una normal XXV. La confianza del intervalo

El gráfico adjunto muestra intervalos de confianza para la media de una normal con distintos niveles de confianza:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - \alpha_1) > (1 - \alpha_2) > (1 - \alpha_3)$$



Intervalos de confianza para la media de una normal XXVI. El error de la estimación

- ¿Es positivo que aumente la longitud del intervalo?

¿Qué representa la longitud del intervalo?

- Si el verdadero valor de μ se encuentra en el intervalo, la longitud de éste es una cota del error máximo cometido al realizar la aproximación:

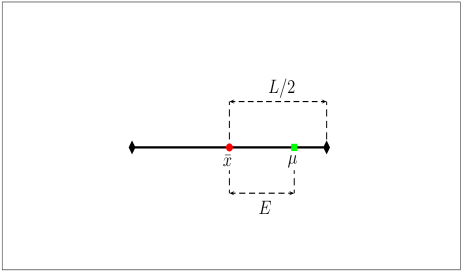
$$\mu \cong \bar{x}$$

Intervalos de confianza para la media de una normal XXVII. Error de la estimación

Si el valor verdadero de μ se encuentra en el intervalo, lo que ocurrirá, a priori, con probabilidad $(1-\alpha)$:

$$|\bar{x}-\mu| = E < \frac{L}{2},$$

como se observa en el gráfico.



Cálculo de intervalos de confianza. Resumen

Resumen

1. Calculado el intervalo de confianza para un parámetro, λ, puede interpretarse que la seguridad de que λ se encuentre dentro del intervalo es el $(1-\alpha)\times 100\,\%$.
2. Esta seguridad, que interesa sea alta, nunca es el 100 %, para ello el intervalo debería ser $(-\infty, +\infty)$.
3. Al aumentar la confianza, se aumenta la longitud del intervalo.
4. La longitud del intervalo es una cota del error máximo de la aproximación, por lo que interesa que el intervalo sea pequeño.
5. La única forma de conseguir intervalos pequeños con gran confianza es aumentar el tamaño muestral.

Intervalos de confianza para la varianza de una normal

- Para calcular intervalos de confianza para otros parámetros, se razona como en el caso de la media de una normal con el estadístico adecuado.

- En el caso de la varianza de una normal se utiliza que:

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1}$$

Intervalos de confianza para proporciones

- En el caso de las proporciones, se tiene en cuenta que:

$$\hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Observación

Todos los comentarios realizados anteriormente acerca del significado de la confianza de un intervalo, así como sobre la longitud del mismo como cota del error siguen siendo válidos en todos los casos.

Contrastes de hipótesis I

Estado del problema

Durante el trabajo realizado para identificar el modelo que describe el comportamiento de una variable aleatoria:

1. Se ha conjeturado la forma del modelo, analizando la estructura del histograma de la muestra.
2. Se han estimado valores puntuales de los parámetros.
3. Se han calculado intervalos de confianza de los parámetros para tener una cota del error máximo cometido en su estimación.

Contrastes de hipótesis II

Dificultad:

¿Qué seguridad ofrece la conjetura realizada acerca de la forma del modelo?

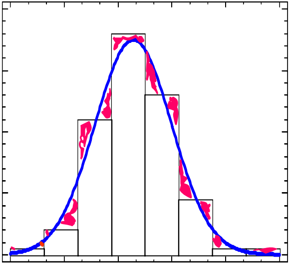
- Esta seguridad se «mide» por medio de un contraste, o test, de hipótesis.

CONTRASTES DE HIPÓTESIS III. TEST DE LA χ^2

El test de la chi cuadrado analiza la hipótesis de que la variable sigue un modelo de probabilidad concreto.

El test mide de la discrepancia entre el histograma de los datos, y la función de densidad del modelo.

Esta discrepancia es una variable aleatoria.



Contrastes de hipótesis IV. Test de la χ^2

- Cuando la conjetura es cierta, (esto es, la variable sigue el modelo previsto), el estadístico:

$$d = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \longrightarrow \chi^2_{k-r-1},$$

donde:

  - k es el número de clases en que se divide a los datos.
  - O_i es la frecuencia observada en cada clase.
  - E_i es la frecuencia esperada en cada clase, si la conjetura fuese cierta.
  - r es el número de parámetros estimados con la muestra.

Contrastes de hipótesis V. Test de la χ^2

- El análisis del valor de d permite discutir el contraste:

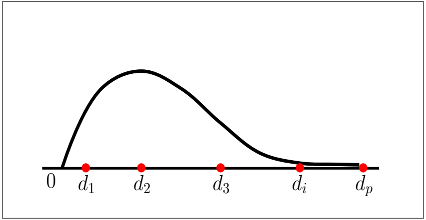
  1. Si el valor de d contradice su distribución, porque es demasiado grande, se rechaza la veracidad de la conjetura.

  2. Si el valor de d es coherente con su distribución, porque es pequeño, se acepta la conjetura.

Contrastes de hipótesis VI. Test de la χ^2

En el gráfico adjunto se presentan distintos valores de d, obtenidos al analizar el ajuste de una muestra con distintos modelos de probabilidad.

¿Cuál hace más verosímil la conjetura de que el modelo explica el comportamiento de la variable?



Contrastes de hipótesis VII. Test de la χ^2

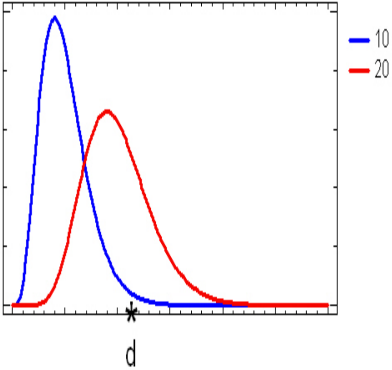
Problemas

- ¿Cómo se decide si un valor de d es grande o pequeño?
- Un valor de d puede ser grande en una χ^2 y pequeño en otra.

Contrastes de hipótesis VIII. Test de la χ^2

El siguiente gráfico muestra la situación relativa de una discrepancia en dos modelos χ^2 distintos.

Puede observarse cómo en el modelo con 10 grados de libertad esta discrepancia es grande, mientras que en modelo con 20 grados de libertad no lo es tanto.



CONTRASTES DE HIPÓTESIS IX. TEST DE LA χ^2. EL $p - valor$

- Supóngase que se ha obtenido una discrepancia d_0.

  Para decidir si d_0 es grande o pequeño se define el $p - valor$ del test como:

$$p = P(d > d_0 \mid \text{el modelo es correcto})$$

CONTRASTES DE HIPÓTESIS X. TEST DE LA χ^2. EL $p - valor$

El siguiente gráfico muestra el $p - valor$ de dos valores distintos de la discrepancia.

- ¿En cuál de los dos casos es más verosímil la corrección de la conjetura acerca del ajuste del modelo a la muestra?

Contrastes de hipótesis XI. Test de la χ^2. El $p - valor$

Observaciones

1. El $p - valor$ es una medida de la coherencia de los datos con la conjetura acerca de la forma del modelo.
2. El $p - valor$ es una probabilidad, por lo que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.
3. La interpretación del $p - valor$ no depende de los grados de libertad de la χ^2 de referencia.
4. Cuanto más grande es el $p - valor$, menor es, en términos relativos, la discrepancia obtenida y, por lo tanto, mayor es la evidencia de que el ajuste es correcto, y viceversa.

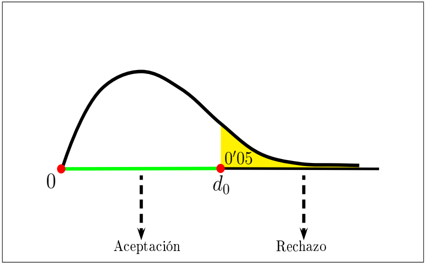
Contrastes de hipótesis XII. Test de la χ^2. Metodología

Metodología

- En general, se fija un valor, convencionalmente $0'01$, $0'05$ ó $0'1$, y se consideran grandes los $p-valores$ mayores que el valor fijado, y pequeños los valores menores que el mismo.
- Cuando p es mayor que el valor fijado, α, se acepta que existe coherencia entre la muestra y el modelo seleccionado, mientras que si p es menor que este valor se considera que el modelo seleccionado puede ser inadecuado.
- El valor $(1-\alpha)\times 100\,\%$ es la confianza con la que se adopta la decisión.

Contrastes de hipótesis XIII. Test de la χ^2. Metodología

Por ejemplo, al 95 %, el siguiente gráfico señala los valores de la discrepancia que sugieren que se puede aceptar el modelo propuesto, **zona de aceptación**, y los que sugieren rechazarlo, **zona de rechazo**.



Contrastes de hipótesis XIV. Planteamiento general

- Un contraste de hipótesis es una discusión acerca de la veracidad de un aserto o de una conjetura.
    - La conjetura, cuya certeza se analiza, se denomina **hipótesis nula** y se representa por H_0.
    - En caso de no aceptarse como verosímil la hipótesis nula se aceptará la **hipótesis alternativa**, que se representa por H_1.

Contrastes de hipótesis XV. Planteamiento general

Ejemplo

En el test de la χ^2 :

- H_0 es «La población se distribuye como un modelo concreto.»
- H_1 es «La población no se distribuye según ese modelo concreto.»

Contrastes de hipótesis XVI. Planteamiento general

Metodología I

- Para la resolución de un contraste se construye una muestra, y se analiza la coherencia de los datos muestrales con la hipótesis nula.
    - Si los datos de la muestra no contradicen la hipótesis nula se acepta la verosimilitud de la misma.
    - Si los datos muestrales son muy discrepantes con la hipótesis nula, se rechaza ésta y se acepta la hipótesis alternativa.

Contrastes de hipótesis XVII. Planteamiento general

Metodología II

- La evaluación de la discrepancia entre la hipótesis nula y los datos muestrales, se realiza por medio de un estadístico, seleccionado «ad hoc», de distribución conocida cuando la hipótesis nula es cierta.

Contrastes para la media de una normal I

- Supóngase que se desea contrastar si la media de una población normal, μ, puede tomar un valor concreto, μ_0, o si, por el contrario, $\mu \neq \mu_0$.

- La formulación del contraste sería:

$$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$$

frente a

$$\boxed{H_1 : \mu \neq \mu_0}$$

Contrastes para la media de una normal II

- El estadístico adecuado para la realización de este contraste, midiendo la discrepancia entre la muestra y la hipótesis nula, es:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}}$$

- Es conocido que, cuando H_0 es cierta:

$$\boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \approx t_{n-1},}$$

lo que permite analizar la magnitud de la dicrepancia entre la hipótesis nula y los datos muestrales.

Contrastes para la media de una normal III

Observación

Debe observarse que el valor de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}}$$

es una medida de la distancia entre μ_0 y $\bar{x}$, en desviaciones típicas de $\bar{x}$.

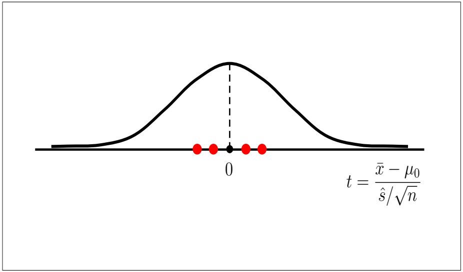
Contrastes para la media de una normal IV

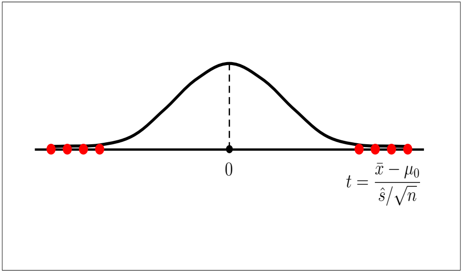
- Valores próximos a cero del estadístico t confirman la verosimilitud de H_0.

- Valores alejados de cero del estadístico t, tanto por la derecha como por la izquierda, contradicen la verosimilitud de H_0 y, en consecuencia, confirman la verosimilitud de H_1.

Contrastes para la media de una normal V

El gráfico de la izquierda presenta valores de t que confirman H_0, mientras que el de la derecha presenta valores que contradicen H_0.





Contrastes para la media de una normal VI

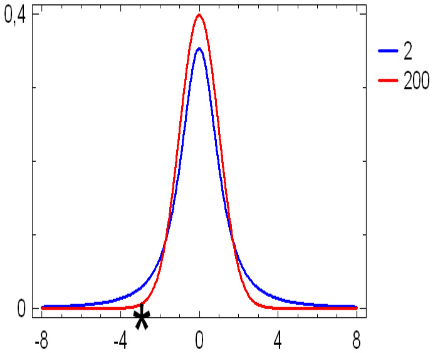
Problemas

- Como en el caso del test de la χ^2, ¿cómo se decide si un valor de t es grande o pequeño?
- Un valor de t puede ser grande en una t y pequeño en otra.

Contrastes para la media de una normal VII

El siguiente gráfico muestra la situación relativa de una discrepancia en dos modelos de t distintos.

Puede observarse cómo en el modelo con 200 grados de libertad esta discrepancia es grande, mientras que en modelo con 2 grados de libertad es relativamente menor.



CONTRASTES PARA LA MEDIA DE UNA NORMAL VIII. EL $p - valor$

- Supóngase que se ha obtenido una discrepancia t_0.

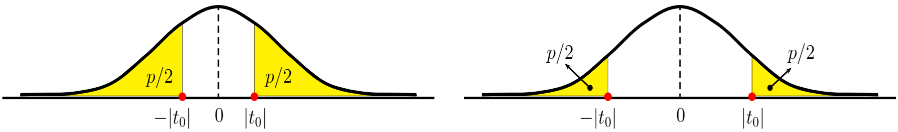
  Para decidir si t_0 es grande o pequeño se define el $p - valor$ del test como:

$$p = P(|t| > |t_0| \;\; \text{condicionado a que el modelo es correcto})$$

Contrastes para la media de una normal IX. El $p - valor$

El siguiente gráfico muestra el $p - valor$ asociado a dos valores distintos de la discrepancia.

- ¿En cuál de los dos casos es más verosímil la corrección de la conjetura acerca del valor de la media?



Contrastes para la media de una normal X. El $p - valor$

Observaciones

1. Como en el caso del test de la χ^2, el $p - valor$ es una medida de la coherencia de los datos con la conjetura acerca del valor de la media.

2. El $p - valor$ es una probabilidad, por lo que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$.

3. La interpretación del $p - valor$ no depende de los grados de libertad de la t de referencia.

4. Cuanto más grande es el $p - valor$, menor es, en términos relativos, la discrepancia obtenida y, por lo tanto, mayor es la evidencia de que μ_0 puede ser el valor verdadero de μ, y viceversa.

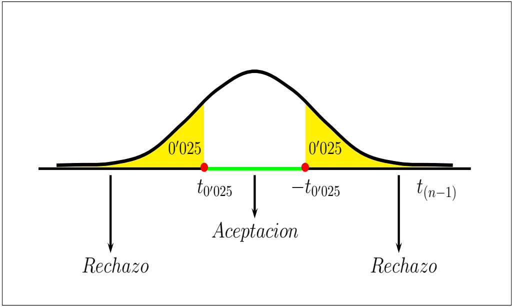
Contrastes para la media de una normal XI

Metodología

- En general, se fija un valor, convencionalmente $0'01$, $0'05$ ó $0'1$, y se consideran grandes los $p-$*valores* mayores que el valor fijado, y pequeños los valores menores que el mismo.
- Cuando p es mayor que el valor fijado, α, se acepta que existe coherencia entre la muestra y el valor de μ seleccionado por la hipótesis nula, mientras que si p es menor que este valor se considera que lo más probable es que $\mu \neq \mu_0$.
- El valor $(1-\alpha) \times 100\,\%$ es la confianza con la que se adopta la decisión.

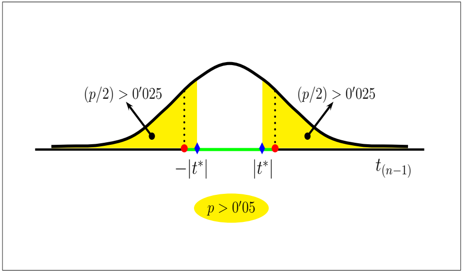
Contrastes para la media de una normal XII

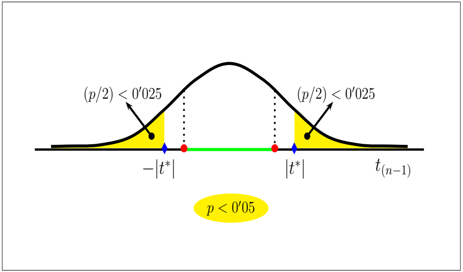
Por ejemplo, al 95 %, el siguiente gráfico señala los valores de t que sugieren que se puede aceptar que $\mu = \mu_0$, **zona de aceptación**, y los que sugieren rechazar esta igualdad, **zona de rechazo**.



Contrastes para la media de una normal XIII

En los siguientes gráficos puede comprobarse cómo valores de t incluidos en la zona de aceptación, al 95 % originan p — *valores* superiores a $0'05$, y cómo los incluidos en la zona de rechazo crean p — *valores* inferiores a 0'05.





Contrastes para la media de una normal XIV. Relación con los intervalos de confianza

- El contraste formulado anteriormente, con un nivel de confianza $(1-\alpha)\times 100\,\%$, respecto de la media de una normal:

  $$H_0 : \mu = \mu_0$$

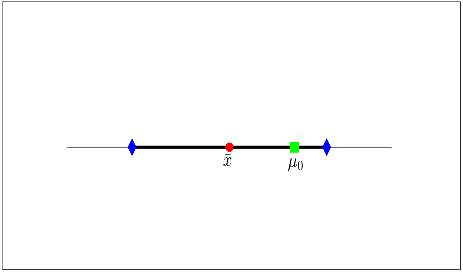
  frente a

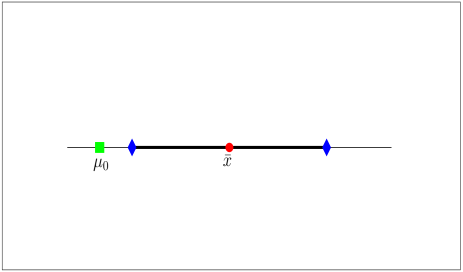
  $$H_1 : \mu \neq \mu_1$$

  es equivalente a calcular un intervalo con el mismo nivel de confianza para la media de la normal, y considerar verosímiles los valores de μ situados en el interior del intervalo y no aceptables los situados fuera del intervalo.

Contrastes para la media de una normal XV. Relación con los intervalos de confianza

En el siguiente gráfico se contempla una situación en la que la aceptación de que $\mu = \mu_0$ es razonable, frente a otra en la que no lo es.





Contrastes para la media de una normal XVI. Relación con los intervalos de confianza

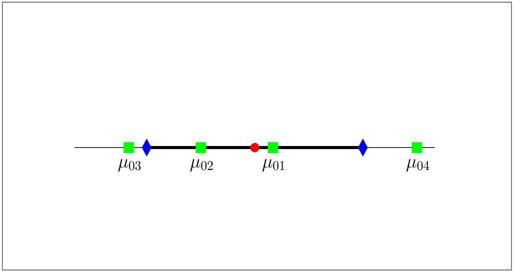
- El $p - valor$, en este caso, se puede interpretar como una medida de la posición relativa de μ_0 respecto del intervalo de confianza.

- Cuanto mayor es el $p - valor$ más cerca se encuentra μ_0 del centro del intervalo, y por lo tanto más verosímil es la hipótesis de que $\mu = \mu_0$, mientras que cuanto más alejado se encuentra μ_0 del centro del intervalo, menor es el $p - valor$ y menos aceptable la hipótesis de que $\mu = \mu_0$.

Contrastes para la media de una normal XVII. Relación con los intervalos de confianza

En el siguiente gráfico pueden observarse las posiciones relativas de distintos valores de μ_0 dentro de un intervalo de confianza para μ al $(1-\alpha)\times 100\,\%$. Se verifica que:

$$p_1 > p_2 > \alpha > p_3 > p_4$$



Contrastes para la media de una normal XVIII. Contrastes unilaterales

Observación

- La formulación de las hipótesis de un contraste puede condicionar la configuración de las zonas de aceptación y de rechazo del mismo.

Contrastes para la media de una normal XIX. Contrastes unilaterales

- Supóngase que un contraste se realiza con la siguiente formulación:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

frente a

$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

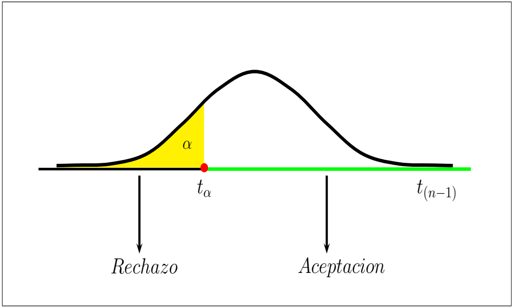
- En este caso, los valores de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}}$$

lejanos de cero por la derecha confirman la hipótesis nula, mientras que los valores lejanos de cero por la izquierda confirman la hipótesis alternativa.

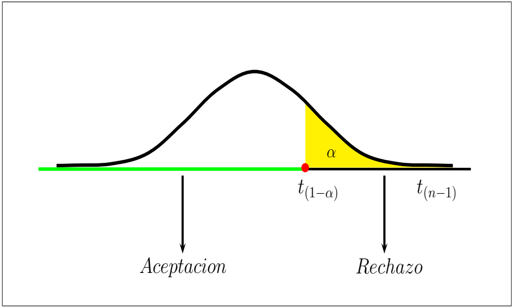
Contrastes para la media de una normal XX. Contrastes unilaterales

En este caso, toda la zona de aceptación de H_0 se encuentra a la derecha de t_α, y la de rechazo a la izquierda. Gráficamente:



Contrastes para la media de una normal XXI. Contrastes unilaterales

Análogamente, si el contraste enfrenta las hipótesis $H_0 : \mu \leq \mu_0$ y $H_1 : \mu \geq \mu_0$, toda la zona de aceptación de H_0 se encuentra a la izquierda de $t_{(1-\alpha)}$, y la de rechazo a la derecha. Gráficamente:



Contrastes de hipótesis XVIII. Planteamiento general

Resumen

1. La realización de un contraste de hipótesis requiere definir sin ambigüedad la hipótesis nula y la alternativa.
2. Una vez seleccionadas las hipótesis del contraste, se selecciona el estadístico apropiado para medir la discrepancia entre los datos muestrales y la hipótesis nula.
3. A continuación se definen las regiones de aceptación y de rechazo, teniendo en cuenta el nivel de confianza elegido.
4. Por último se discute el contraste, aportando siempre el $p - valor$ obtenido, como medida de garantía de la decisión adoptada.

Contrastes de hipótesis XIX. Planteamiento general. Riesgos

- Todo contraste conduce a la toma de una decisión:

  1. Aceptar la hipótesis nula.
  2. Rechazar la hipótesis nula.

Contrastes de hipótesis XX. Planteamiento general. Riesgos

- Asociados a estas decisiones existen dos tipos de riesgo:

  1. Rechazar la hipótesis nula siendo ésta verdadera: **Error de tipo I**
  2. Aceptar la hipótesis nula siendo falsa: **Error de tipo II**

Contrastes XXI. Planteamiento general. Riesgos

- La probabilidad de cometer un *error tipo I* se determina en el contraste, y es α.
- La teoría general de contrastes empleada habitualmente, teoría de Neyman-Pearson, prima evitar cometer un *error tipo I*, aunque sea a costa de cometer un *error tipo II*, lo que implica tener que ser muy cuidadoso a la hora de formular el contraste.
- La única forma de disminuir simultáneamente las probabilidades de *error de tipo I y tipo II* es aumentar el tamaño muestral.

Contrastes de hipótesis para otros parámetros

- Para la realización de contrastes de hipótesis acerca del valor de otros parámetros, se razona como en el caso de la media de una normal con el estadístico adecuado.

- En el caso de la varianza de una normal se utiliza que:

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1}$$

- En el caso de las proporciones, se tiene en cuenta que:

$$\hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Contrastes de hipótesis para comparación de medias I

- Los contrastes de hipótesis se pueden utilizar también para comparar parámetros

Por ejemplo, si $X_1 \approx N(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \approx N(\mu_2, \sigma_2)$, podría tener interés realizar el contraste:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

frente a:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Contrastes de hipótesis para comparación de medias II

- En el caso en que $\sigma_1 = \sigma_2$, se considera el estadístico:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{s}_T \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

donde:

$$\hat{s}_T = \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{s}_1^2 + \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{s}_2^2}.$$

- El caso en que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ no dispone de solución exacta. Véase, por ejemplo Peña (2002).

Contrastes de hipótesis para comparación de varianzas

- Para comparar las varianzas de dos poblaciones normales se tiene en cuenta que, cuando las varianzas son iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$:

$$\frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2} \approx F_{n_1-1;n_2-1},$$

donde n_1 y n_2 son los tamaños muestrales de las muestras respectivas de ambas poblaciones.