Modelos de probabilidad

José Gabriel Palomo Sánchez
gabriel.palomo@upm.es

E.U.A.T.
U.P.M.

Julio de 2011

Índice I

ÍNDICE II

Índice III

Variables aleatorias I

Objetivo

Uno de los objetivos básicos de la Estadística es confeccionar técnicas que ayuden a modelar el comportamiento de una variable aleatoria.

Variables aleatorias II. Definición

Variables aleatorias. Definición

De una manera poco rigurosa se admitirá que una **variable aleatoria** es el resultado numérico de un experimento que depende del azar. (Véase una definición más precisa, por ejemplo, en Martín Pliego y Ruiz-Maya (1995)).

- Cuando el resultado de la observación no ofrece directamente un número, se realiza una codificación numérica de los resultados.

Variables aleatorias III. Generalidades

- Una variable aleatoria se caracteriza porque si se repite sucesivamente el experimento en las mismas condiciones, el resultado puede ser distinto.

Variables aleatorias IV. Generalidades. Ejemplos

- Ejemplos de variables aleatorias:
  - Tiempo de vida de un ordenador.
  - Dureza de una probeta de hormigón.
  - Número de accidentes laborales diarios en la comunidad de Madrid.
  - Cotización diaria en bolsa de un valor.
  - Número de mensajes diarios recibidos en un teléfono móvil, . . .

Variables aleatorias V. Generalidades

Cuando se analiza una variable aleatoria, se desearía conocer con exactitud el valor que tomaría la variable si se realizara el experimento. Sin embargo,

Esto es **imposible** y genera **incertidumbre**

Variables aleatorias VI. Generalidades

- De una variable aleatoria se puede llegar a conocer:
  - La proporción de veces que la variable toma un valor, o un conjunto de valores.

$$\Updownarrow$$

  - La facilidad o dificultad con que la variable puede tomar un valor o un conjunto de valores, al realizar el experimento.

Variables aleatorias VII. Generalidades

Metodología de análisis de una variable aleatoria

- Una variable aleatoria se describe asociando su comportamiento con el de algún **modelo de probabilidad**.

Variables aleatorias VIII. Generalidades

Para resolver el problema de describir el comportamiento de una variable aleatoria habrá que dar respuesta, consiguientemente, a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es la probabilidad?
- ¿Qué son los modelos de probabilidad?
- ¿Cómo se asimila el comportamiento de una variable aleatoria concreta con un modelo de probabilidad?

PROBABILIDAD I. OBJETIVO. SUCESOS

¿QUÉ ES LA PROBABILIDAD?

La probabilidad es una forma numérica de medir la incertidumbre. Es decir, una forma de medir la facilidad o dificultad de que un **suceso** ocurra.

- Un **suceso** es cualquier evento observable tras la realización de un experimento.

Probabilidad II. Definición

- Una probabilidad es cualquier medida de la incertidumbre que verifique los siguientes axiomas:

  - Si S es un suceso cualquiera, asociado a un experimento aleatorio:

$$P(S) \in [0,1]$$

  - Si E es el suceso seguro:

$$P(E) = 1$$

  - Si S_1 y $S_2, \ldots$ son sucesos excluyentes dos a dos, (no hay dos que pudan ocurrir simultáneamente), se cumple que:

$$P\left(S_1 \text{ ó } S_2 \text{ ó } S_i \text{ ó} \ldots\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(S_j).$$

Probabilidad III. Propiedades

- Como consecuencia de estos axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades de la probabilidad:
  - Si S_1 y S_2 son complementarios, (siempre que se ejecuta el experimento ocurre uno de los dos, pero no simultáneamente):

$$P\left(S_1 \quad \text{ó} \quad S_2\right) = 1$$

  - La probabilidad del suceso imposible, $\emptyset$, es cero,

$$P(\emptyset) = 0.$$

  - Si S_1 y S_2 son sucesos excluyentes, se cumple que:

$$P\left(S_1 \quad \text{ó} \quad S_2\right) = P(S_1) + P(S_2)$$

  - Si S_1 y S_2 no son sucesos excluyentes, se cumple que:

$$P\left(S_1 \quad \text{ó} \quad S_2\right) = P(S_1) + P(S_2) - P\left(S_1 \quad \text{y} \quad S_2\right)$$

Probabilidad IV. Unión e intersección de sucesos

Observaciones

- El suceso S_1 ó S_2 es el que se verifica cuando uno de los dos sucesos, o ambos, se verifica. Habitualmente a este suceso se le denomina suceso **unión** y se representa por $S_1 \cup S_2$.

- El suceso S_1 y S_2 es el que se verifica cuando los dos sucesos ocurren simultáneamente. Habitualmente a este suceso se le denomina suceso **intersección** y se representa por $S_1 \cap S_2$.

Probabilidad V. Dependencia e independencia de sucesos

Con respecto a la probabilidad del suceso intersección, se presentan dos casos:

$$P\left(S_1 \cap S_2\right) = P(S_1) \times P(S_2)$$

En este caso se dice que S_1 y S_2 son **independientes**, lo que supone que la información acerca de si uno de ellos ha ocurrido, en la realización del experimento, no altera la probabilidad de que el otro ocurra.

Probabilidad VI. Dependencia e independencia de sucesos

O bien,

$$P(S_1 \cap S_2) \neq P(S_1) \times P(S_2)$$

En este caso se dice que S_1 y S_2 son **dependientes**, lo que supone que la información acerca de si uno de ellos ha ocurrido en la realización del experimento altera la probabilidad de que el otro ocurra.

Probabilidad VII. Probabilidad condicionada

En general, se define la probabilidad de S_1 **condicionada** a la ocurrencia de S_2 como:

$$P(S_1|S_2) = \frac{P(S_1 \cap S_2)}{P(S_2)},$$

de donde:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_2) \times P(S_1|S_2) = P(S_1) \times P(S_2|S_1)$$

Probabilidad VIII

En el caso en que S_1 y S_2 sean independientes se cumplirá que:

$$P(S_1|S_2) = P(S_1) \;\; \text{y} \;\; P(S_2|S_1) = P(S_2)$$

Probabilidad IX

Observación

En general, no es fácil distinguir si dos sucesos son, o no, independientes. En ocasiones se pueden calcular las probabilidades de ambos sucesos y la del suceso intersección, lo que permite decidir si los sucesos son independientes. En otros casos, un razonamiento lógico sobre la naturaleza de los sucesos permite discernir si son independientes.
En situaciones más complejas se requieren técnicas de inferencia estadística para analizar la independencia de sucesos.

Probabilidad X

Observaciones

Asociado a un experimento puede haber distintas variables aleatorias y, por lo tanto, distintos modelos de probabilidad.

- Ejemplo: Se arrojan dos monedas al aire y se observa:

1. El «número de caras resultante»

Número de caras	0	1	2
Probabilidad	$1/4$	$1/2$	$1/4$

2. El «número de monedas con el mismo resultado que la otra»

Número de monedas con el mismo resultado	0	2
Probabilidad	$1/2$	$1/2$

Probabilidad XI. Probabilidad e información

Observaciones

1. No todos los valores de la probabilidad son igualmente informativos.
   - Información máxima: valores cercanos a 0 ó 1
   - Información mínima: valores cercanos a 1/2
2. La probabilidad puede modificarse con la información.

Probabilidad XII. Cálculo de probabilidades

- ¿Cómo se calculan probabilidades?
- En casos particulares, cuando cualquier resultado «elemental» es igualmente posible, (espacios equiprobables), se puede emplear la regla de *Laplace*:

$$P(S) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Probabilidad XIII. Cálculo de probabilidades. Ejemplo

- La probabilidad de que al sacar dos naipes consecutivos de una baraja, los dos sean reyes es:
  - Si se sacan con restitución los resultados de las dos extracciones son independientes:

$$P(S) = \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

  - Sin embargo, si se sacan sin restitución:

$$P(S) = P(\text{naipe I rey}) \times P(\text{naipe II rey} | \text{naipe I rey}) = \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Probabilidad XIV. Cálculo de probabilidades. Insuficiencia de la regla de Laplace

- Si el problema consiste en conocer la probabilidad de que un autobús tarde más de veinte minutos en la realización de un trayecto, la regla de Laplace no es aplicable.
  - ¿Cómo se calculan en este problema los casos favorables y los casos posibles?

Las probabilidades acerca de una variable aleatoria se calculan, en general, empleando el modelo de probabilidad que las describe.

Modelos de probabilidad I

- Conocer una variable aleatoria significa poder precisar:
  - Los posibles valores de la misma.
  - Las probabilidades con las que la variable toma cualquier valor, o conjunto de valores.

$$\Updownarrow$$

  - La proporción de veces que una variable toma un valor o un conjunto de valores.

- Ésa es, por lo tanto, la información que debe dar un modelo de probabilidad.

Modelos de probabilidad II

Un modelo de probabilidad es un objeto matemático abstracto, descrito a través de ciertas ecuaciones que cumplen unas determinadas propiedades.

Modelos de probabilidad III. Clasificación

- Los modelos de probabilidad, al igual que las variables aleatorias, de manera general se clasifican en:
    - Modelos discretos, (sólo pueden tomar valores en conjunto asimilable a un subconjunto de los números enteros):
        - Uniforme, Bernoulli, Binomial, Poisson, ...
    - Modelos continuos, (pueden tomar cualquier valor en un rango):
        - Uniforme, Normal, Exponencial, t de Student, Chi cuadrado, ...

Modelos de probabilidad IV. Caracterización

- Los modelos de probabilidad se caracterizan, en general, por medio de funciones que pueden depender de la tipología de la variable: función de probabilidad, función de densidad, función de distribución . . . , y de parámetros.

Modelos de probabilidad V. Parámetros

- Algunos de los parámetros usuales para describir los modelos de probabilidad son **la media y la varianza.**
- Por extensión del caso de las variables estadísticas:
  - La media, μ, de una variable aleatoria indica el valor en torno al cual se acumula la probabilidad.
  - La varianza, σ^2, es una medida de la variabilidad del modelo en torno a la media.

Los modelos de probabilidad discretos I

Los modelos de probabilidad discretos se describen por medio de su **función de probabilidad**

- La función de probabilidad de una V.A. discreta es una función que a cada posible valor de la V.A. le asigna la probabilidad de obtener dicho valor cuando se realiza una observación.

Los modelos de probabilidad discretos II. Ejemplo

- Supóngase que se lanza un moneda al aire cinco veces y que se cuenta el «número de caras obtenidas»

- Los posibles valores de la variable son:

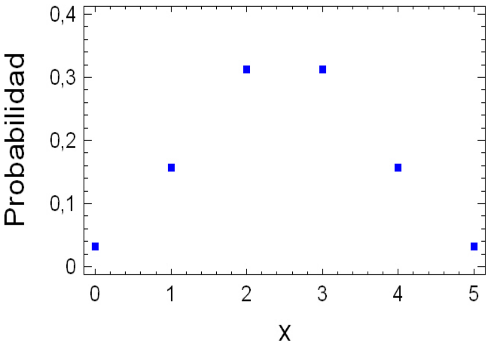
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- La función de probabilidad viene dada por:

$$P(0) = 0{,}03125$$
$$P(1) = 0{,}15625$$
$$P(2) = 0{,}3125$$
$$P(3) = 0{,}3125$$
$$P(4) = 0{,}15625$$
$$P(5) = 0{,}03125$$

Los modelos de probabilidad discretos III

Gráficamente:



La ordenada en cada punto representa la probabilidad de que la variable tome ese valor.

Los modelos de probabilidad discretos IV

Observaciones

En general, una función de probabilidad es cualquier función discreta, (definida en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$), que cumple las siguientes condiciones:

1. $f(a_i) \geq 0$ cualquiera que sea i.
2. $\sum f(a_i) = 1$

- En consecuencia, existen infinitas funciones de probabilidad e infinitos modelos de probabilidad discretos.
- Sólo tienen interés algunos, (pocos), modelos que se encuentran en la naturaleza.

Los modelos de probabilidad discretos V. Ejemplo

- Considérese la siguiente función discreta:

$$f(\pi) = 0{,}19; \quad f(\pi^2) = 0{,}32; \quad f(\pi^3) = 0{,}26; \quad f(\pi^4) = 0{,}23.$$

- Como
  - $f(x) \geq 0$, para $x \in \{\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4\}$ y
  - $f(\pi) + f(\pi^2) + f(\pi^3) + f(\pi^4) = 1$.
- Resulta que f es una función de probabilidad.

Observación

f sólo tendrá interés práctico si sirve para explicar alguna variable aleatoria presente en la naturaleza.

Los modelos de probabilidad discretos VI. Cálculo de los parámetros

Si la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la expresión

$$p(x_i) = p_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \ldots$$

entonces:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Y

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i.$$

El proceso de Bernoulli I

Algunas variables discretas de interés se obtienen de la observación sucesiva de sucesos elementales, de forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Cada vez que se realiza una observación elemental solo existen dos resultados posibles. (Éxito o fracaso.)
2. Las probabilidades de éxito o de fracaso, p y $(1-p)$, se mantienen constantes en cada observación elemental.
3. Los resultados de las observaciones sucesivas son independientes. Es decir, el conocimiento del resultado de un conjunto de observaciones elementales no altera las probabilidades de éxito o de fracaso en la siguientes observaciones.

El proceso de Bernoulli II

Definición de proceso de Bernoulli

Un conjunto de observaciones elementales realizadas en un contexto que verifica las tres condiciones anteriores determina un proceso de *Bernoulli*.

El modelo binomial I

Supóngase que en un proceso de Bernoulli, en el que la probabilidad de éxito es p, se realizan n observaciones elementales y se cuenta el número, X, de éxitos.

- La variable aleatoria X es discreta.
- X puede tomar los valores: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Definición

X es una variable binomial de parámetros n y p. $B(n, p)$. Y se demuestra que su función de probabilidad es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

El modelo binomial II

Media y varianza de un modelo binomial

En un modelo $B(n, p)$:

- $\mu = np$
  y
- $\sigma^2 = np(1 - p)$.

El modelo binomial III. Ejemplos

Las siguientes variables aleatorias tienen una distribución binomial:

1. En un proceso fabricación de ladrillos, la probabilidad de fabricar un ladrillo defectuoso es p. Los ladrillos se almacenan en palés de n elementos. La variable *Número de ladrillos defectuosos en un palé* es una distribución $B(n, p)$.

2. Un emisor emite un mensaje de n carácteres. La probabilidad de que el receptor reciba erróneamente un carácter es p. La variable *Número de carácteres leídos erróneamente* es una distribución $B(n, p)$.

3. La probabilidad de que una persona en contacto con un determinado virus se infecte es p. La variable *Número de personas infectadas en n que han tenido contacto con el virus* es una distribución $B(n, p)$.

El proceso de Poisson I

Algunas variables discretas de interés se obtienen de la observación de la aparición de ciertos sucesos elementales en un continuo, de forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1. En media, el número de sucesos elementales por unidad de continuo es constante, λ.
2. La aparición de los sucesos elementales ocurre con independencia.

El proceso de Poisson II

Definición de proceso de Poisson

Un conjunto de observaciones elementales realizadas en un contexto que verifica las condiciones anteriores determina un proceso de *Poisson*.

El modelo Poisson I

Supóngase un proceso de Poisson en el que, en promedio, ocurren λ sucesos elementales por unidad de continuo. Se considera la variable X, *Número de sucesos elementales observados en una unidad de continuo*

- La variable aleatoria X es discreta.
- X puede tomar los valores: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Definición

X es una variable de Poisson de parámetro λ. $P(\lambda)$. Y se puede demostrar que su función de probabilidad es:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k$$

El modelo Poisson II

Media y varianza de un modelo de Poisson

En un modelo $P(\lambda)$:

- $\mu = \lambda$
  y
- $\sigma^2 = \lambda$.

El modelo de Poisson III

Propiedad de las variables de Poisson.

Supóngase que las variables aleatorias X_1, X_2, ..., X_n son variables de Poisson independientes entre sí, de parámetros respectivos λ_1, λ_2, ..., λ_n. Se verifica entonces que la variable:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

se comporta como una variable de Poisson de parámetro

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

El modelo de Poisson IV. Ejemplos

Las siguientes variables aleatorias siguen una distribución de Poisson:

1. Un proceso de fabricación de pasta de papel produce, en media, 2 burbujas de aire por metro cuadrado. La variable *Número de burbujas en un metro cuadrado de pasta* es una variable $P(2)$.
2. A una cola de un supermercado llegan, en media, dos personas por minuto. La variable *Número de personas que llega a la cola en media hora* es una distribución $P(60)$.
3. Una imprenta imprime libros generando, en media, una errata cada cinco páginas. La variable *Número de erratas en un libro de 200 páginas* es una $P(40)$.

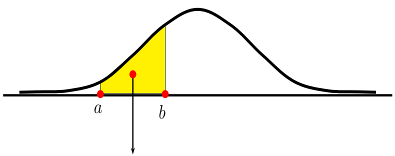
Los modelos de probabilidad continuos I

Los modelos de probabilidad continuos se describen por medio de su **función de densidad**

- La función de densidad de una V.A. continua es una curva, situada por encima del eje de abscisas, que a cada intervalo de posibles valores de la V.A. le asigna la probabilidad determinada por el área que dicha curva encierra con el eje de abscisas en ese intervalo.

Los modelos de probabilidad continuos II

Gráficamente,



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Los modelos de probabilidad continuos III

Observaciones

En general, una función de densidad es cualquier función continua, definida en un intervalo, que cumple las siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ cualquiera que sea x del intervalo.
2. $\int_I f(x)\,dx = 1$

- En consecuencia, existen infinitas funciones de densidad e infinitos modelos de probabilidad continuos.
- Sólo tienen interés algunos, (pocos), modelos que se encuentran en la naturaleza.
- ¡En las variables continuas, la probabilidad de que la variable tome un valor concreto es cero!

Los modelos de probabilidad continuos IV. Ejemplo

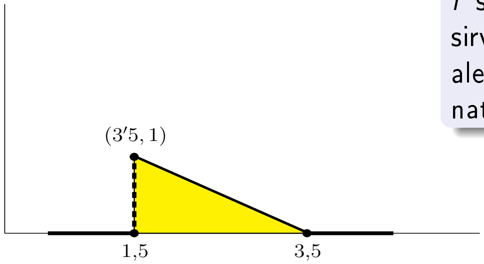
- Considérese la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4} & \text{cuando} \quad x \in [1'5; 3'5] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Como $f(x) \geq 0$ para todo x, y además
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$
- Resulta que f es una función de densidad.

Los modelos de probabilidad continuos V. Ejemplo

Gráficamente,



Observación

f sólo tendrá interés práctico si sirve para explicar alguna variable aleatoria presente en la naturaleza.

Los modelos de probabilidad continuos VI. Cálculo de los parámetros

Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Y

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

El modelo Normal I

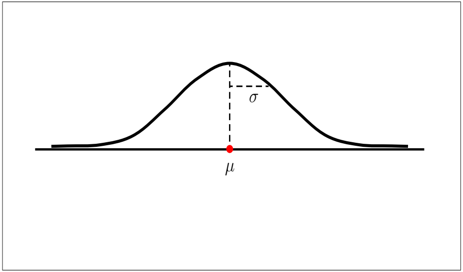
El modelo de probabilidad normal es un modelo de probabilidad continuo, cuya función de densidad viene dada por la expresión:

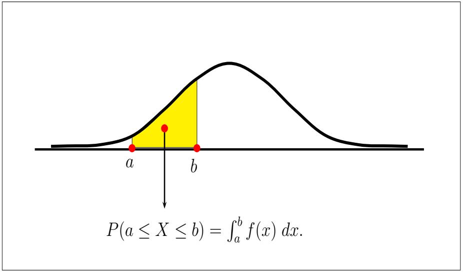
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- μ representa la esperanza matemática (media) de la variable.
- σ representa su desviación típica.

El modelo Normal II

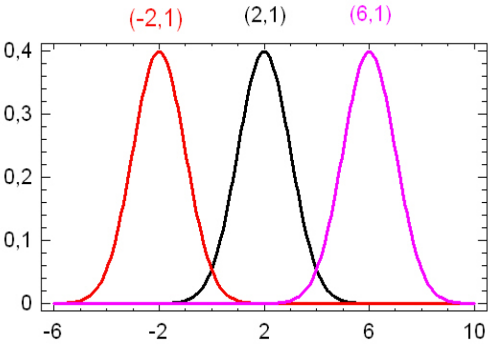
Gráficamente,





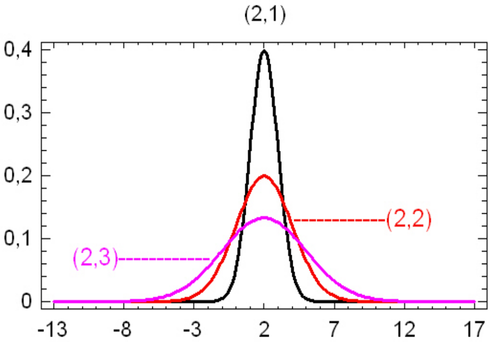
El modelo Normal III

El gráfico permite observar la influencia del cambio del valor de μ sobre el comportamiento de la variable. En él se representan tres modelos normales con medias, respectivas, -2, 2 y 6, y desviación típica común 1.



El modelo Normal IV

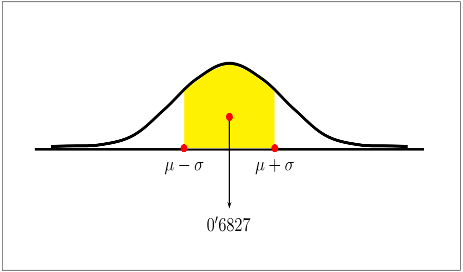
Este nuevo gráfico permite observar la influencia del cambio del valor de σ sobre el comportamiento de la variable. En él se representan tres modelos normales con desviaciones típicas, respectivas, 1, 2 y 3, y media común 2.



El modelo Normal V

En cualquier variable $N(\mu, \sigma)$ se cumple que:

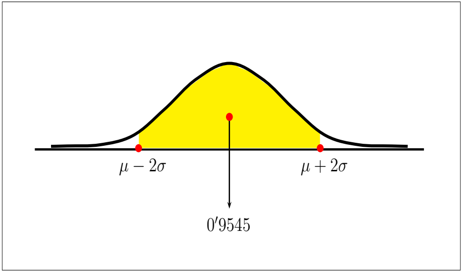
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0'6827$$



El modelo Normal VI

En cualquier variable $N(\mu, \sigma)$ se cumple que:

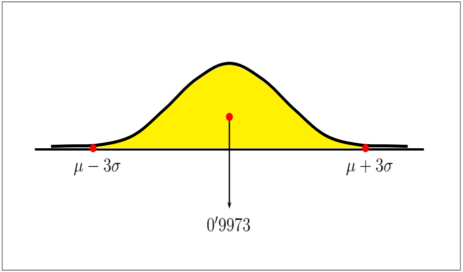
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0'9545$$



El modelo Normal VII

En cualquier variable $N(\mu, \sigma)$ se cumple que:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0'9973$$



El modelo Normal VIII

Otras propiedades interesantes de la distribución normal son las siguientes:

- Simetría respecto de la media. $As = 0$.
- Coeficiente de apuntamiento (curtosis), $K = 3$.
- La única combinación algebraica de distribuciones normales que mantiene la normalidad es la lineal.
- Si $X \approx N(\mu, \sigma)$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \longrightarrow N(0, 1)$$

El modelo Normal IX. El teorema central del límite

El teorema central del límite constituye una justificación de la presencia de la normalidad en la naturaleza.

El teorema central del límite, enunciado de forma poco rigurosa, dice que el resultado de sumar variables aleatorias, de forma que no haya ninguna predominante, tiende a comportarse como una distribución normal.

El modelo exponencial I

El modelo exponencial de parámetro λ es un modelo de probabilidad continuo, cuya función de densidad viene dada por la ecuación:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

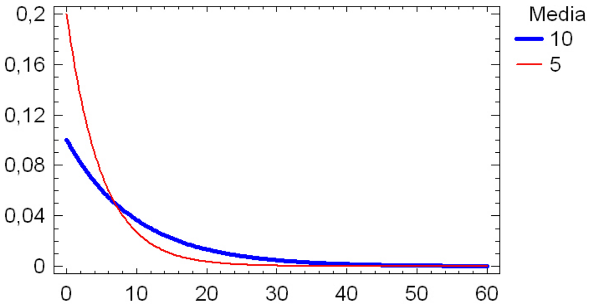
Su media y su desviación típica vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \sigma.$$

Este modelo permite describir, en muchas ocasiones, fenómenos relacionados con tiempos de vida.

El modelo exponencial II

Este gráfico presenta la función de densidad de los modelos exponenciales de medias 5 y 10, cuyos parámetros serán, respectivamente $\lambda_1 = 1/5$ y $\lambda_2 = 1/10$.



El modelo exponencial III

Relación del modelo exponecial con el modelo de Poisson

Supóngase que una variable de Poisson de media λ describe el número de veces que ocurre un determinado suceso en una unidad de tiempo. Si se considera la variable «X =Tiempo transcurrido entre dos sucesos consecutivos,» entonces X sigue un modelo exponencial de media $1/\lambda$ y, en consecuencia, de parámetro λ, por lo que su función de densidad tendrá la forma:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

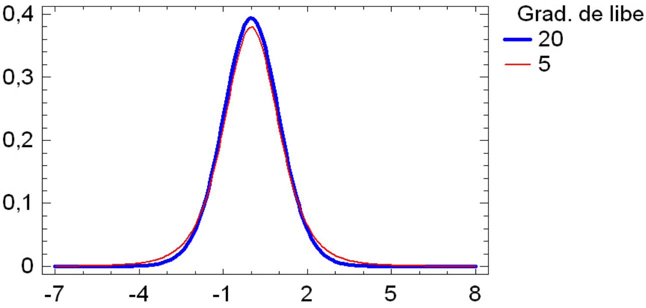
La t de Student I

La t de Student es un modelo de probabilidad muy útil en el campo de la inferencia estadística. Depende de un parámetro denominado «grados de libertad».

- Todas las t de Student tienen de media cero.
- Cuando aumenta el número de los grados de libertad, la variabilidad de la t decrece y la función de densidad converge a la función de densidad de la $N(0,1)$.

La t de Student II

En el gráfico adjunto se representan las funciones de densidad de las t con 5 y 20 grados de libertad,



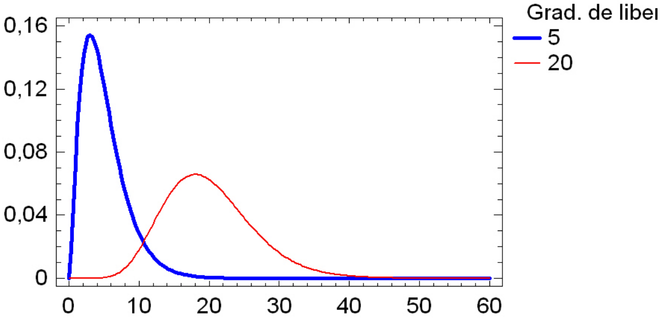
La χ^2 I

La χ^2 es otro modelo de probabilidad también muy útil en el campo de la inferencia estadística, depende de un parámetro denominado igualmente «grados de libertad».

- Si una variable aleatoria es una χ^2_n, su media $\mu = n$, y su varianza $\sigma^2 = 2n$.
- Cuando aumentan los grados de libertad. La función de densidad de la χ^2 se acerca a la de una $N(n, \sqrt{2n})$.

La χ^2 II

En el gráfico adjunto se representan las funciones de densidad de las χ^2 con 5 y 20 grados de libertad,



La función de distribución I

- Para el cálculo efectivo de probabilidades, tanto en distribuciones discretas como continuas, se emplea la **función de distribución**.

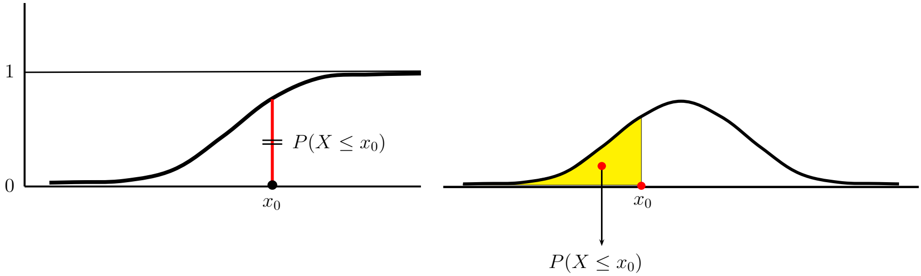
Definición

La función de distribución de una variable aleatoria, X, es una función, $F(x)$, que a cada valor, x_0, le hace corresponder «la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x_0.» Es decir:

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

La función de distribución II

Gráficamente, en modelos continuos:



La función de distribución III

En los modelos discretos, si X es una variable aleatoria que puede tomar los valores $a_1, a_2, \ldots,$ la función de distribución en cualquier valor a_k viene dada por la ecuación:

$$F(a_k) = P(X \leq a_k) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$$