MODELOS DETERMINISTAS

Programación Lineal

ESPERANZA AYUGA TÉLLEZ

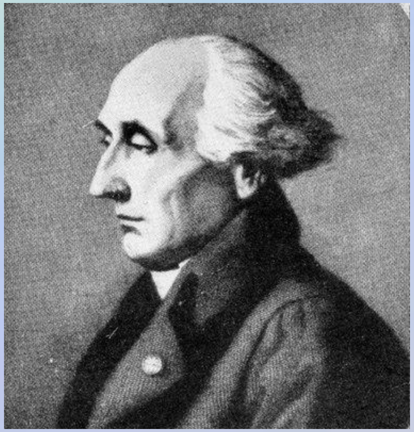
Programación Lineal

OBJETIVOS:

- Comprender la idea de la programación lineal y sus posibilidades de aplicación a problemas prácticos.
- Conocer el lenguaje propio de la programación lineal: función objetivo, restricciones, región factible, etc...
- Saber plantear un problema de programación lineal partiendo de su enunciado en términos generales.
- Saber representar regiones factibles y determinar dónde puede darse la solución óptima.
- Saber encontrar esa solución óptima.

ORIGEN

- En los siglos XVII y XVIII, **Newton**, **Leibnitz**, **Bernouilli** y, sobre todo, **Lagrange**, que desarrollaron el cálculo infinitesimal, también se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.
- En 1939, **Kantarovitch** publica *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* donde se plantea una teoría matemática precisa y bien definida para resolver una extensa gama de problemas: **la programación lineal**.
- En 1947, **G.B. Dantzig** formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal.



Lagrange

Dantzig

ORIGEN

- **La programación lineal hace historia: El puente aéreo de Berlín**

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría. Uno de sus episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín. Los aliados podían romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire.

Se decidió organizar un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en marzo de 1949 se transportaron 8000 T, tanto como por carretera y ferrocarril antes del bloqueo.

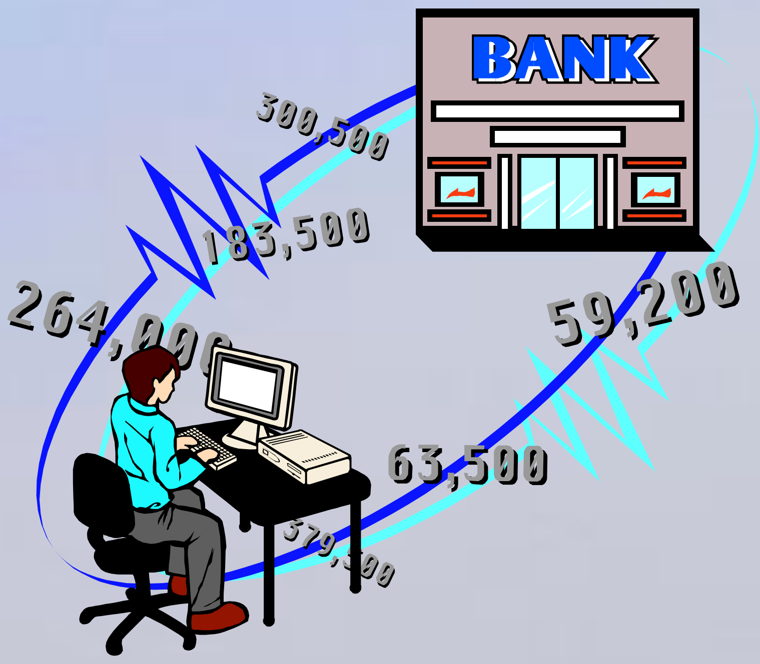
En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal.
El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo

ORIGEN

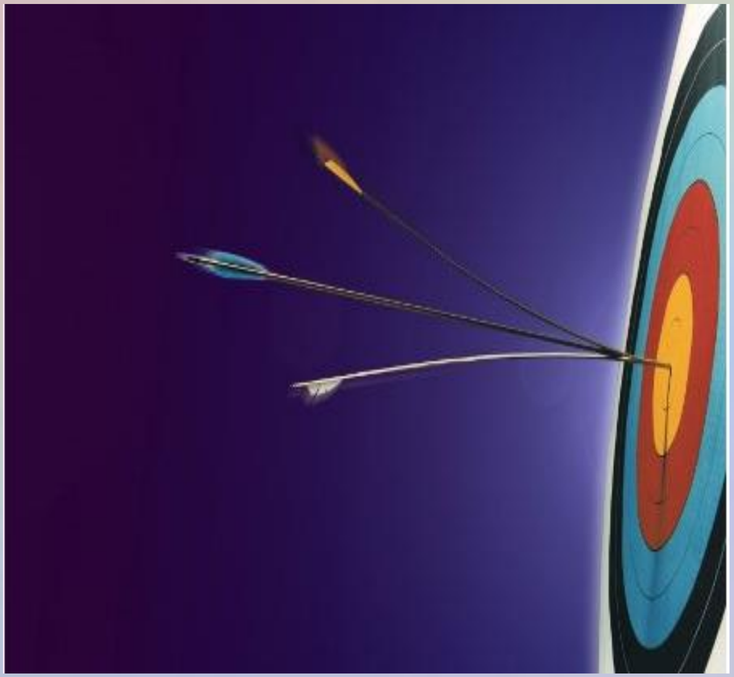
- **Esta técnica se ha desarrollado mucho en los últimos años**

En los años cincuenta y posteriores se resolvieron grandes problemas con programación lineal con ayuda de los ordenadores que trabajaban con muchas incógnitas, sujetas a multitud de restricciones.

Se ha estimado que, en general, si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la programación lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan sólo un año.



DEFINICIÓN



Un modelo de programación lineal busca maximizar o minimizar una función lineal, sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

DEFINICIÓN

Un modelo de programación lineal esta compuesto de:

* Un conjunto de variables de decisión
* Una función objetivo
* Un conjunto de restricciones

IMPORTANCIA

Ciertos problemas se describen fácilmente a través de la programación lineal.

Muchos problemas pueden aproximarse a modelos lineales.

La solución generada entrega información útil para responder ante nuevas condiciones sobre el "qué pasa si".

Ejemplo: la industria de juguetes "Galaxia"

Galaxia produce dos tipos de juguetes:

* Space Ray
* Zapper

Los recursos están limitados a:

* 1200 kg de plástico especial.
* 40 horas de producción semanal.

Ejemplo: la industria de juguetes "Galaxia"

Requerimientos de Marketing

- La producción total no puede exceder de 800 docenas.
- El número de docenas de Space Rays no puede exceder al número de docenas de Zappers por más de 450.

Requerimientos Tecnológicos

- Space Rays requiere 2 kg de plástico y 3 minutos de producción por docena.
- Zappers requiere 1 kg de plástico y 4 minutos de producción por docena.

Ejemplo: la industria de juguetes "Galaxia"

Plan común de producción para:

- Fabricar la mayor cantidad del producto que deje más beneficios, el cual corresponde a Space Ray (8 € de utilidad por docena).
- Usar la menor cantidad de recursos para producir Zappers, porque estos dejan una menor utilidad (5 € de utilidad por docena).

El plan común de producción:

- Space Rays = 550 docenas
- Zappers = 100 docenas
- Utilidad = 4900 € por semana

El gerente siempre buscará un esquema de producción que incremente las ganancias de su compañía

EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PROVEE UNA SOLUCIÓN INTELIGENTE PARA ESTE PROBLEMA

Solución

Variables de decisión:

X1 = Producción de Space Rays (en docenas por semana)

X2 = Producción de Zappers (en docenas por semana)

Función objetivo:

Maximizar la ganancia semanal

Solución

Modelo de Programación Lineal:

Max $8X1 + 5X2$ (ganancia semanal)

Sujeto a:

$2X1 + 1X2 \leq 1200$ (Cantidad de plástico)

$3X1 + 4X2 \leq 2400$ (Tiempo de producción)

$X1 + X2 \leq 800$ (Limite producción total)

$X1 - X2 \leq 450$ (Producción en exceso)

$Xj \geq 0$, $j= 1, 2.$ (Resultados positivos)

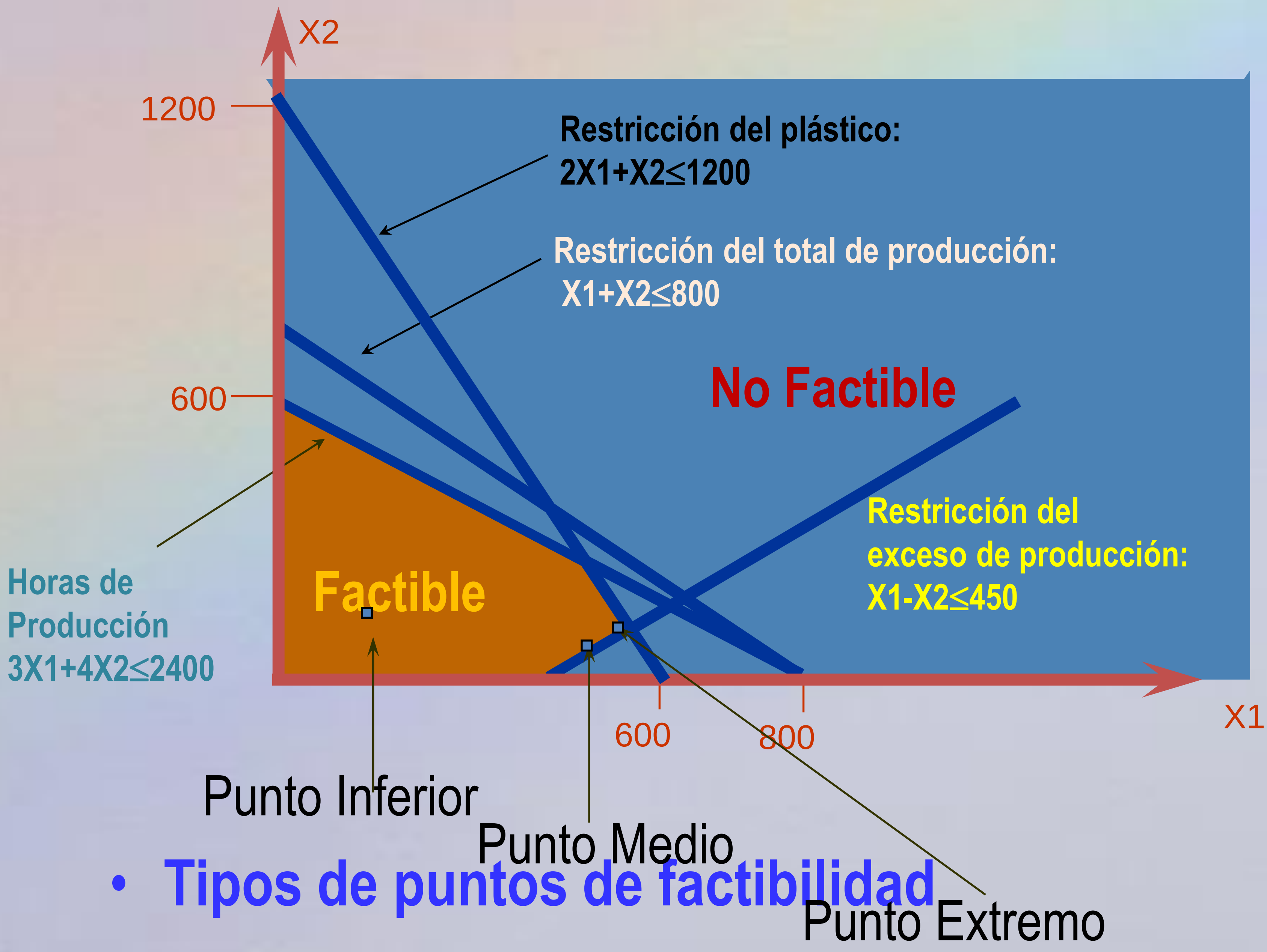
Solución

Conjunto de soluciones factibles para el modelo lineal:

El conjunto de puntos que satisface todas las restricciones del modelo es llamado

REGION FACTIBLE

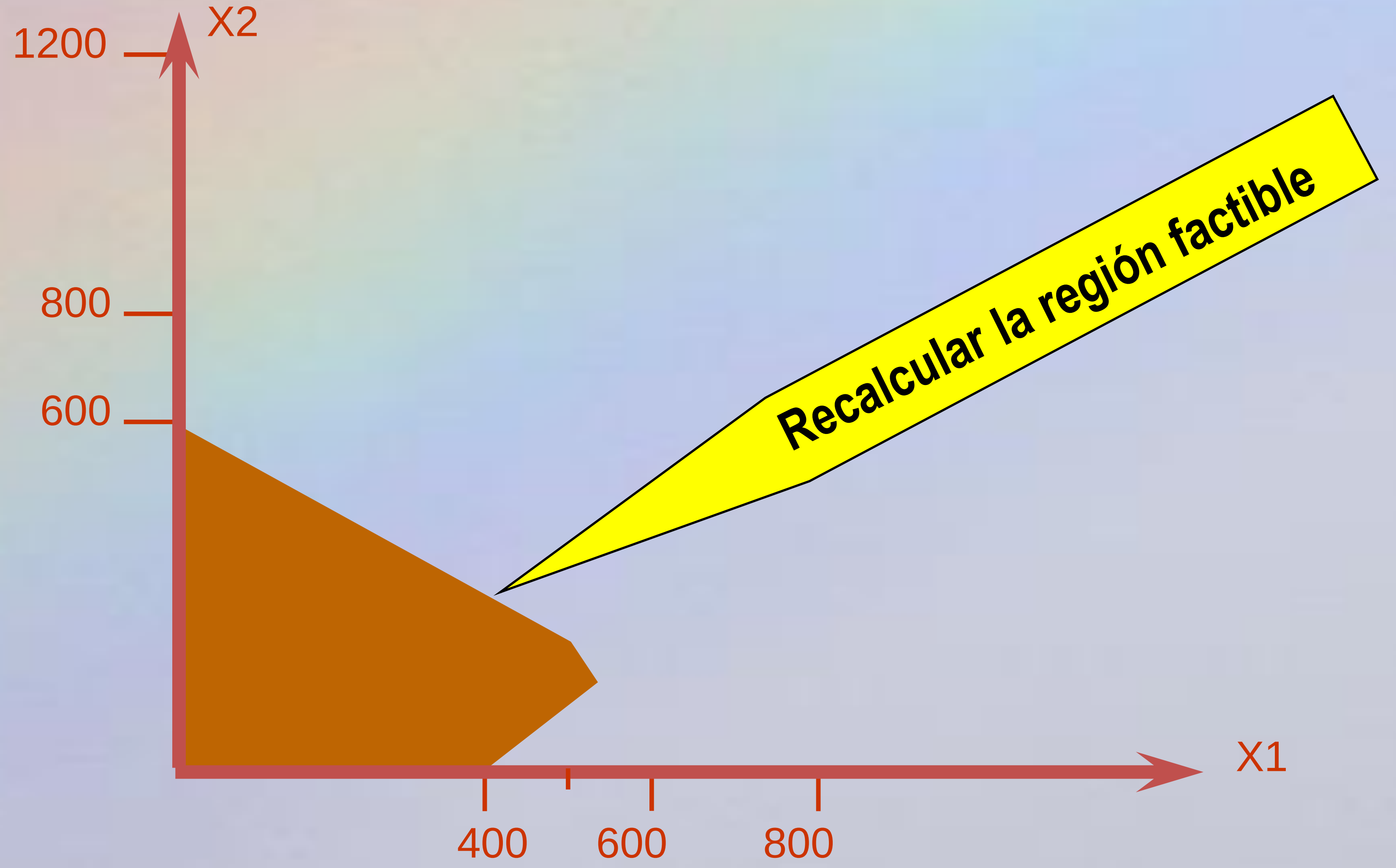
USANDO UN GRAFICO SE PUEDEN REPRESENTAR TODAS LAS RESTRICCIONES, LA FUNCION OBJETIVO Y LOS TRES TIPOS DE PUNTOS DE FACTIBILIDAD



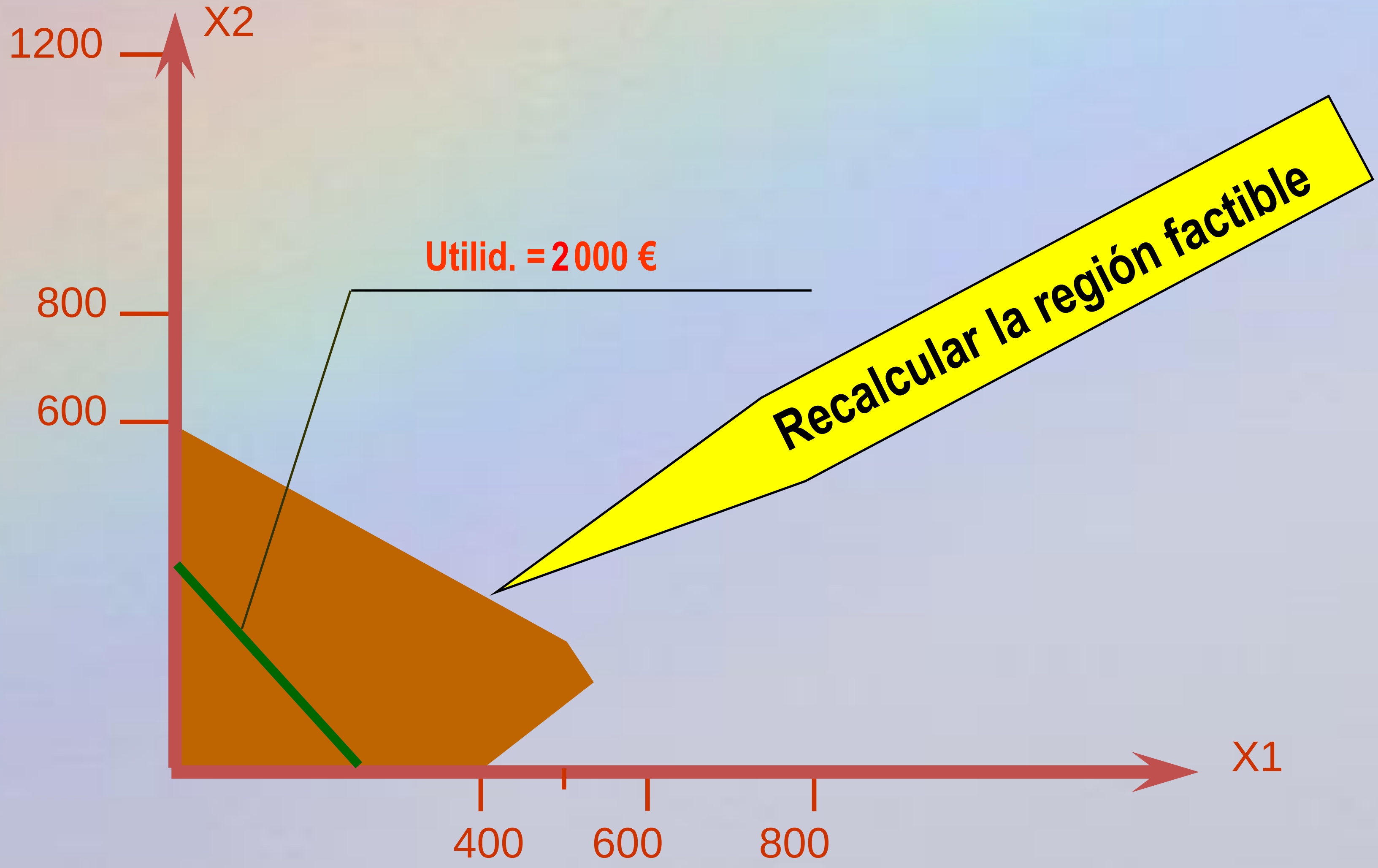
- **Tipos de puntos de factibilidad**

Solución

Resolución gráfica para encontrar la solución óptima:

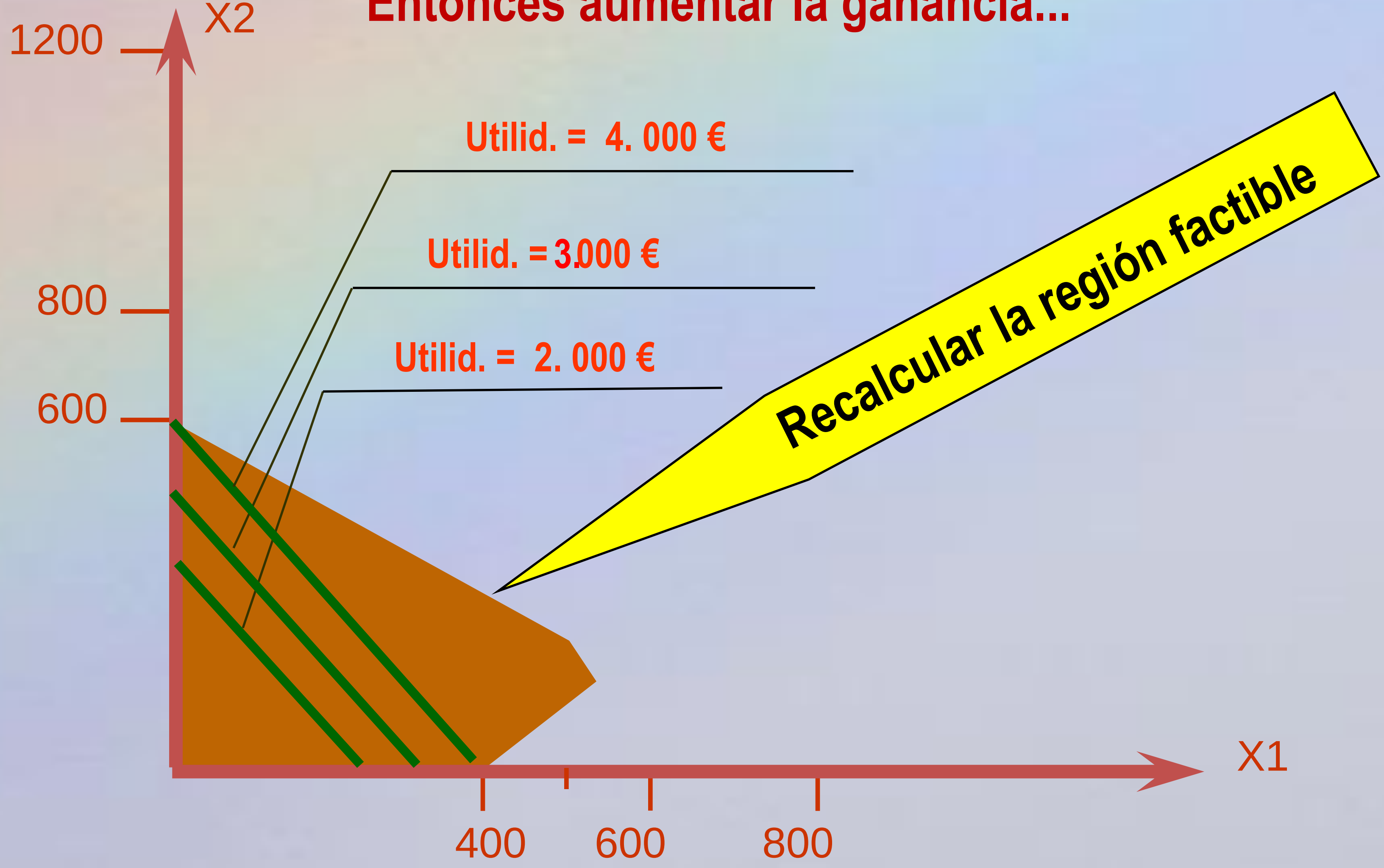

X2
1200
800
600
Recalcular la región factible
X1
400
600
800

comenzar con una ganancia dada de = 2.000 €...



comenzar con una ganancia dada de = 2.000 €...

Entonces aumentar la ganancia...

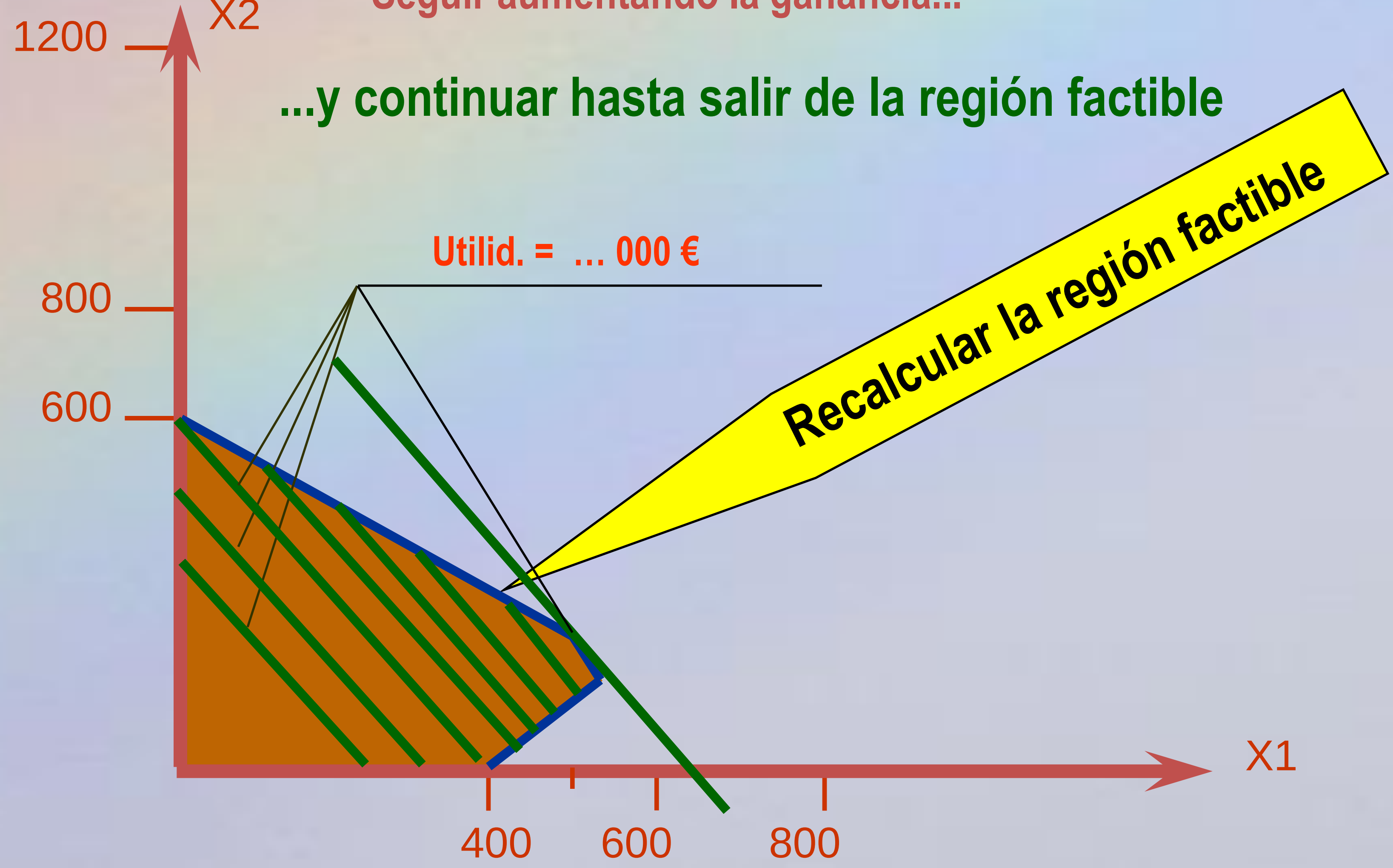


Recalculando la región factible

comenzar con una ganancia dada de = 2.000 €...

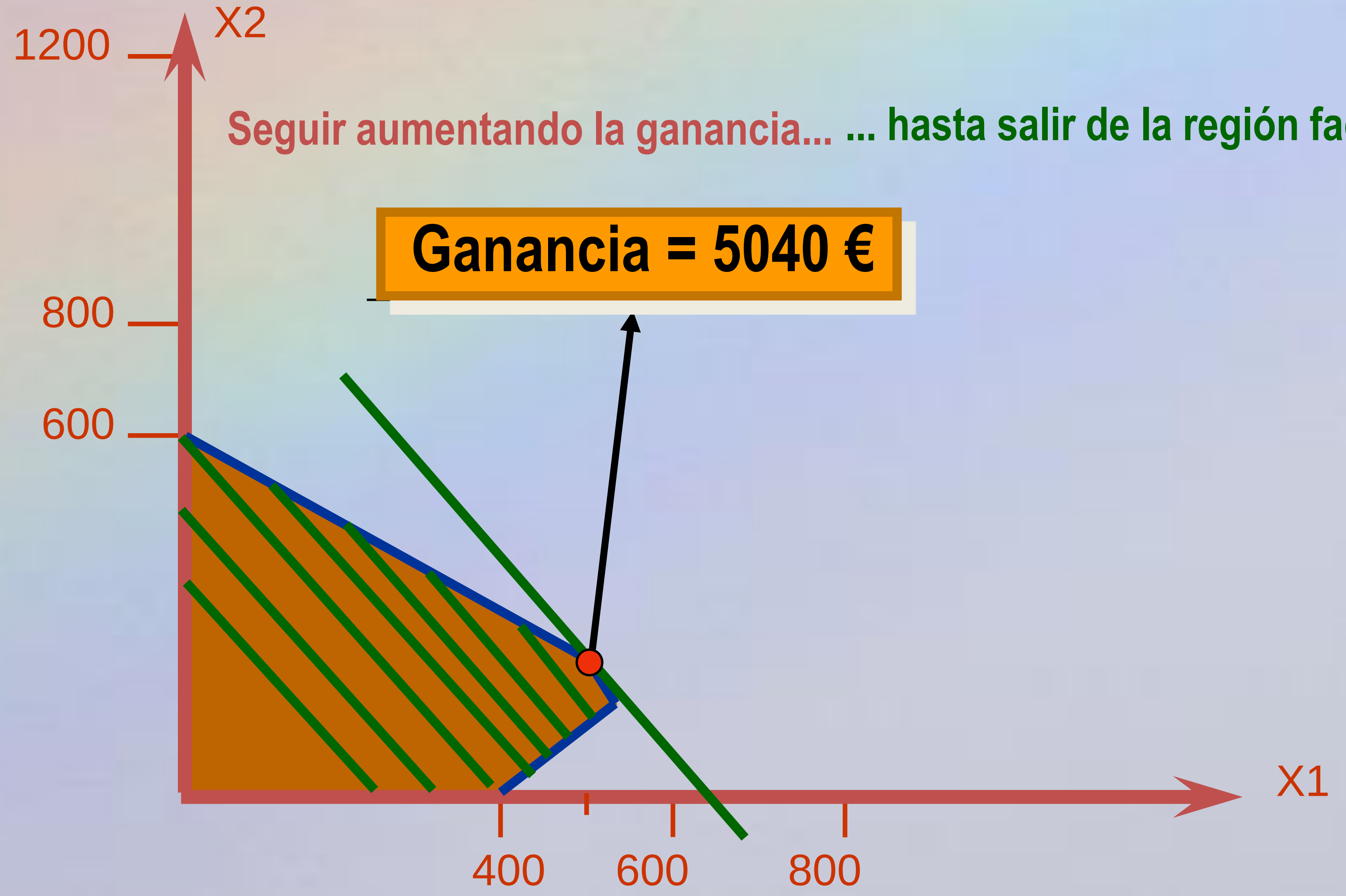
Seguir aumentando la ganancia...

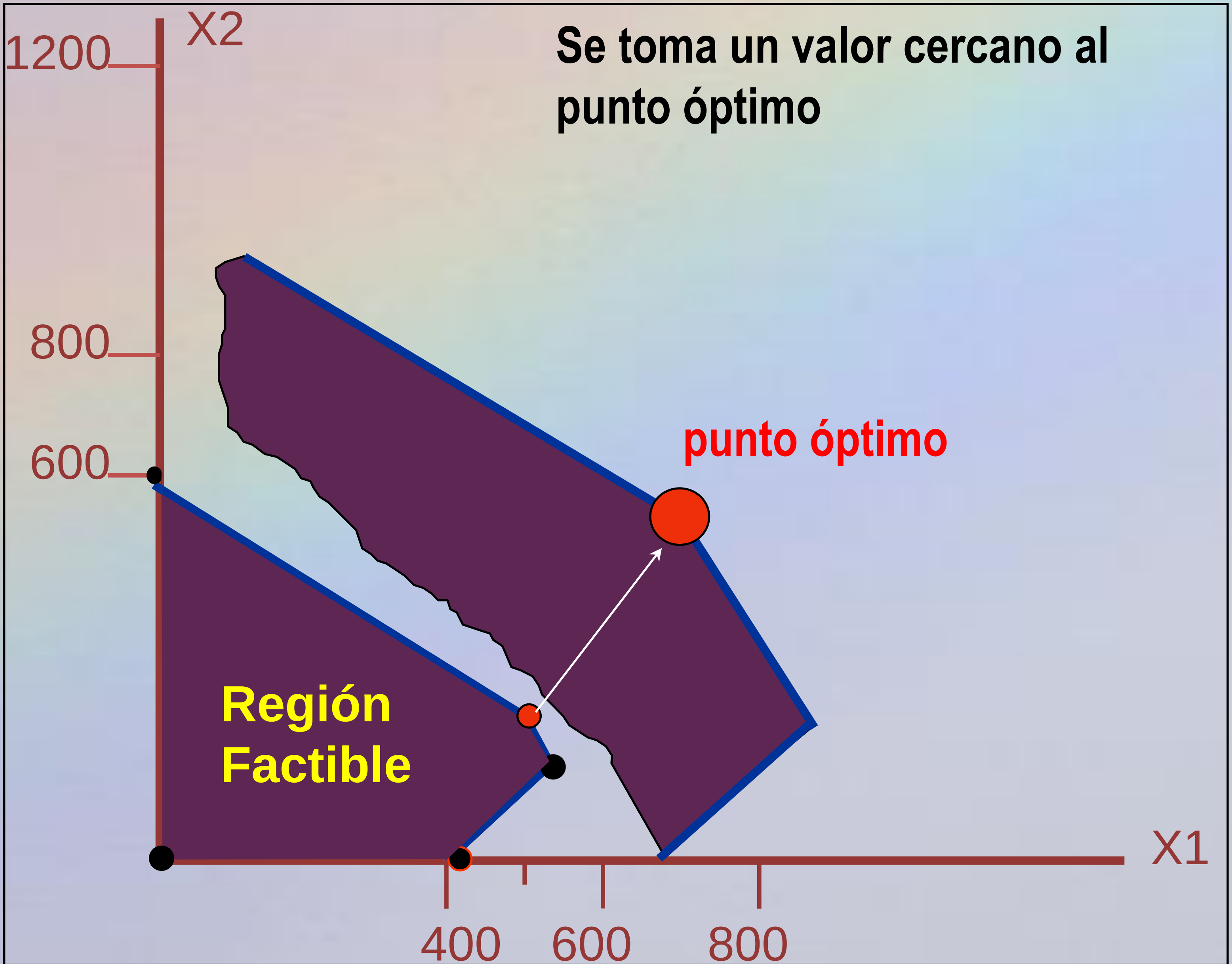
...y continuar hasta salir de la región factible

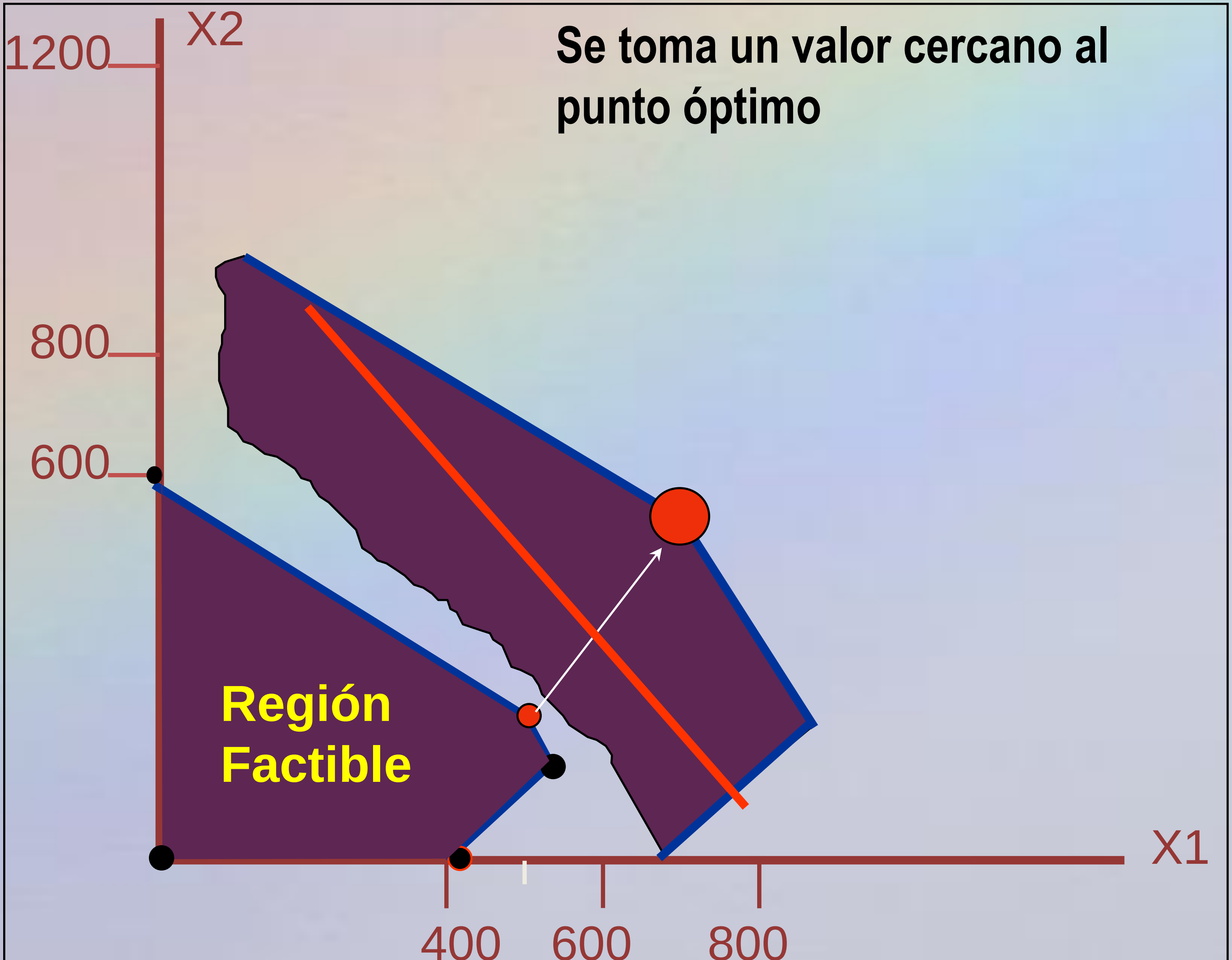


Recalculando la región factible

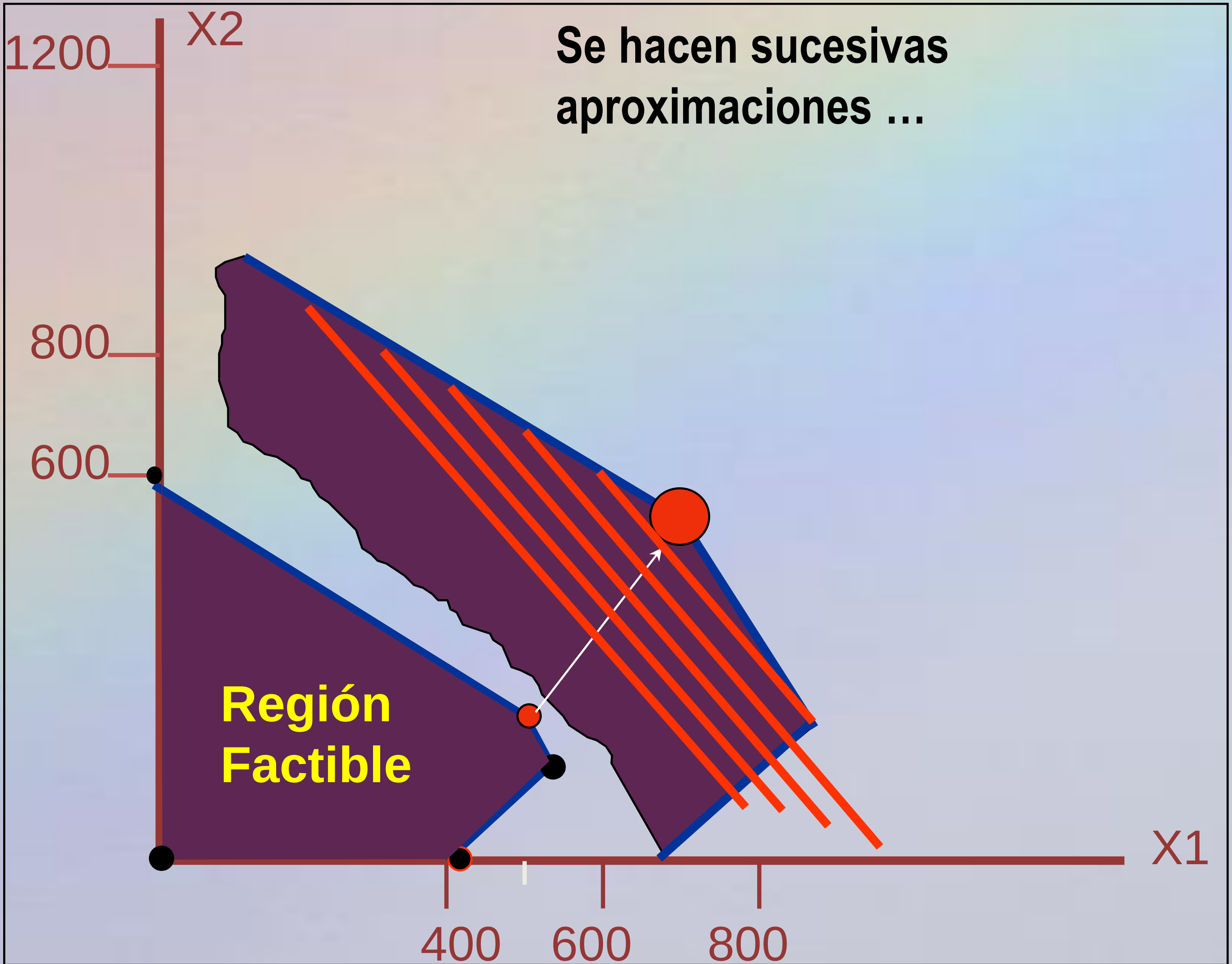
comenzar con una ganancia dada de = 2.000 €...




X2
1200
800
600
Se toma un valor cercano al punto óptimo
punto óptimo
Región Factible
X1
400
600
800

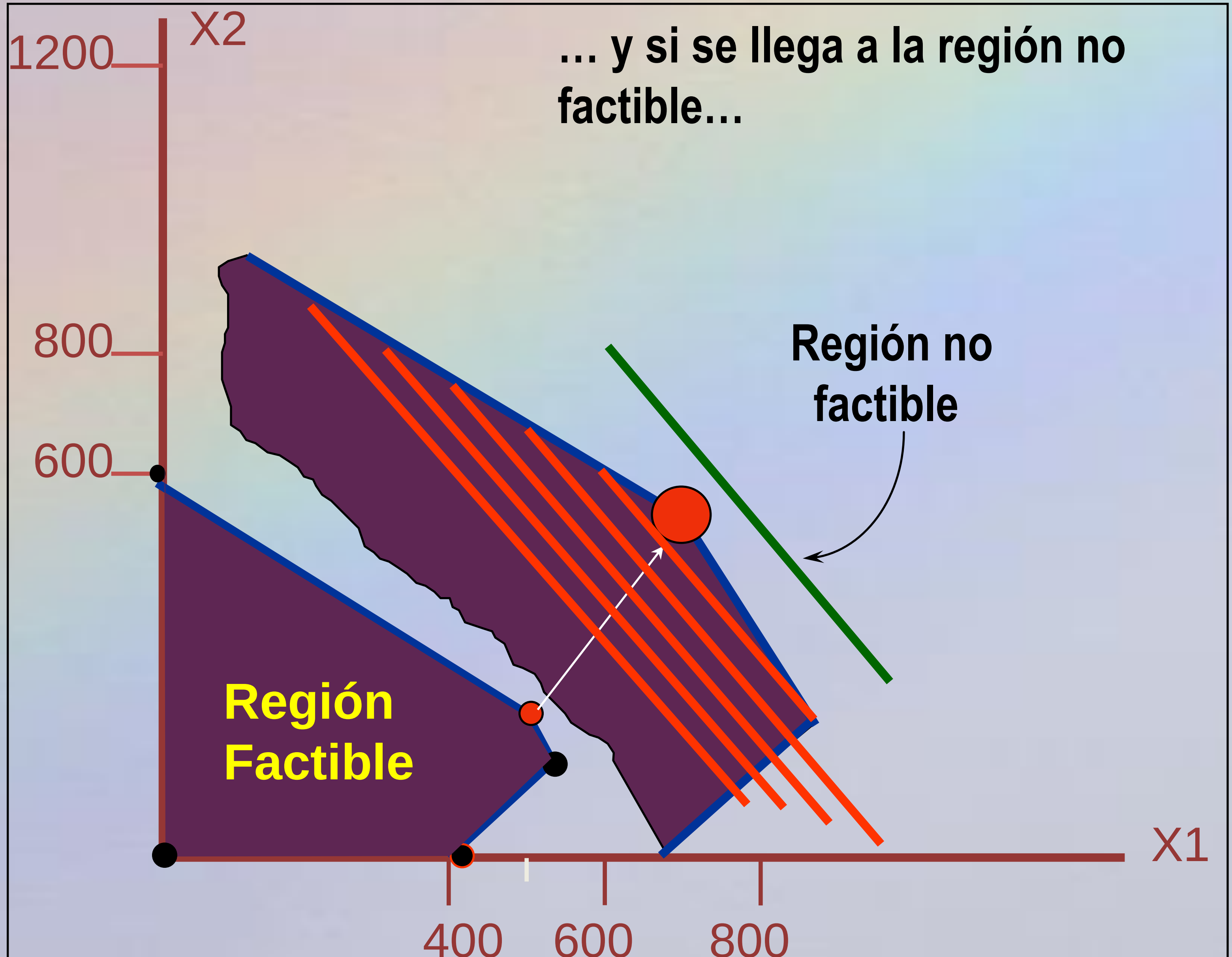


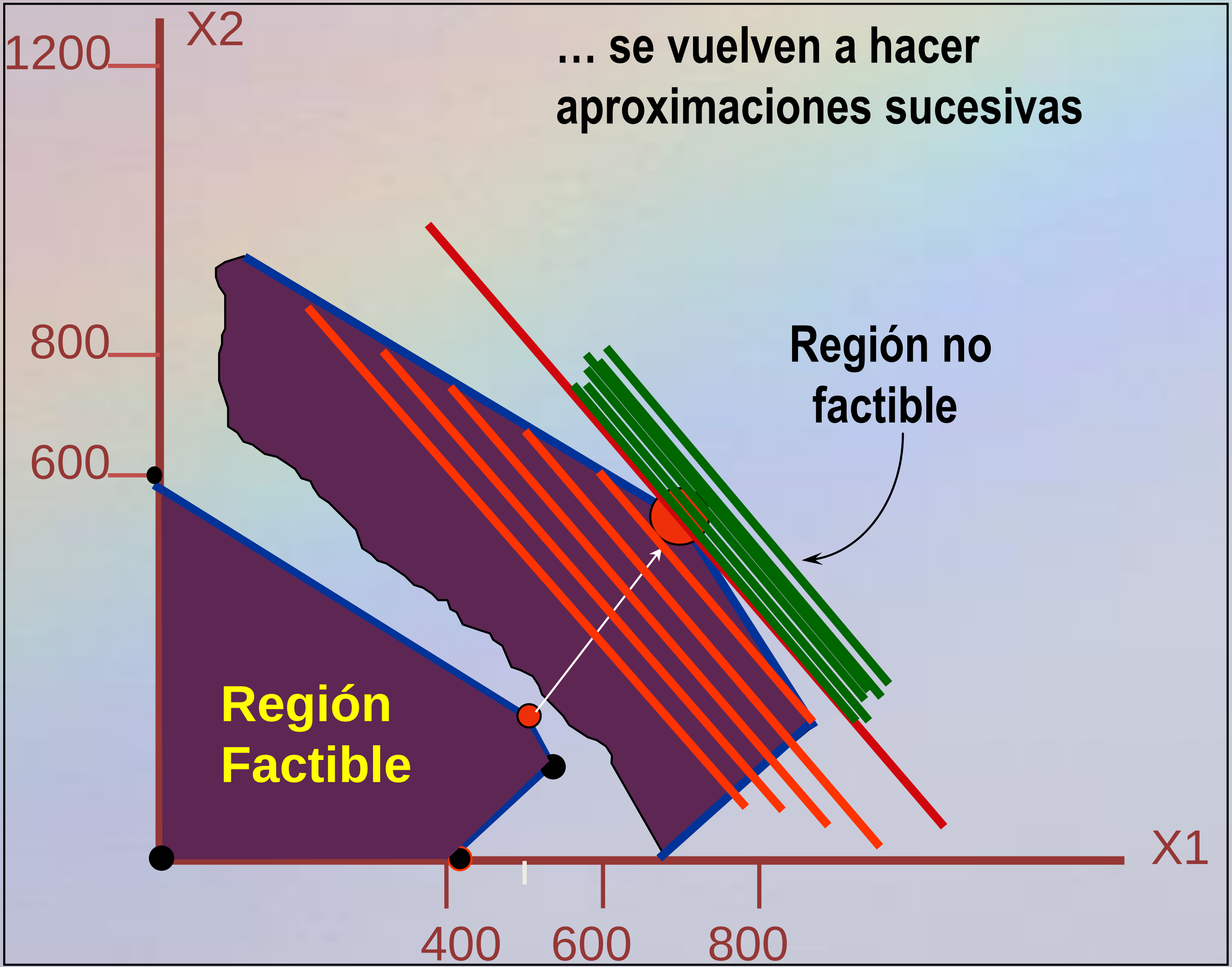
X2
1200
800
600
Se toma un valor cercano al punto óptimo
Región Factible
X1
400
600
800

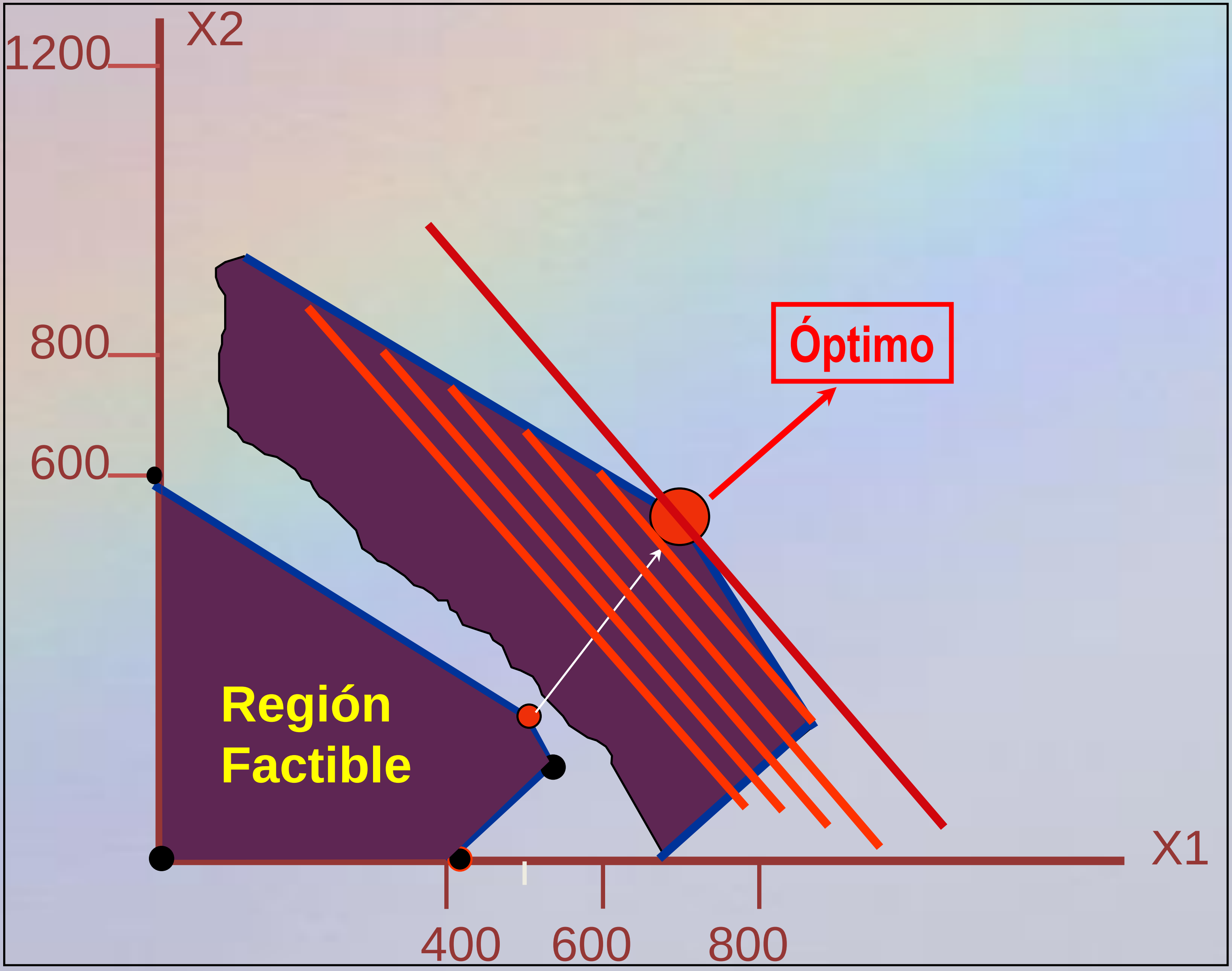


X2
1200
800
600
Se hacen sucesivas
aproximaciones …
Región
Factible
X1
400
600
800

… y si se llega a la región no factible…




X2
1200
800
600
... se vuelven a hacer
aproximaciones sucesivas
Región no
factible
Región
Factible
400
600
800
X1


X2
1200
800
600
Óptimo
Región
Factible
X1
400
600
800

Resumen de la solución óptima

Space Rays = 480 docenas

Zappers = 240 docenas

Ganancia = 5040 €

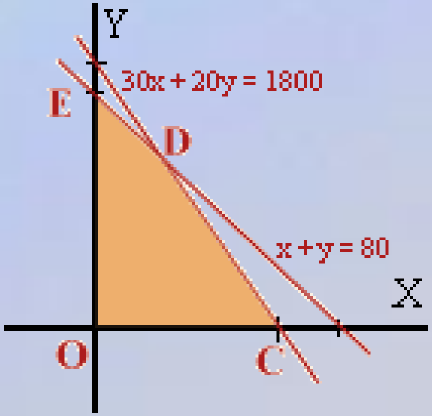
- *Esta solución utiliza todas las materias primas (plástico) y todas las horas de producción.*
- *La producción total son 720 docenas (no 800).*
- *La producción de Space Rays excede a la de Zappers por solo 240 docenas y no por 450.*

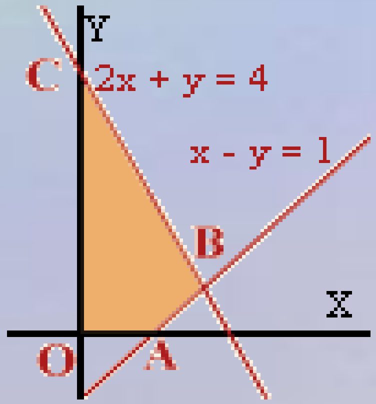
Tipos de soluciones

Factibles: Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones.

- Solución única

La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D





- Solución múltiple

Hay infinitas soluciones que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible. En este caso C y B

Tipos de soluciones

Soluciones óptimas y puntos extremos

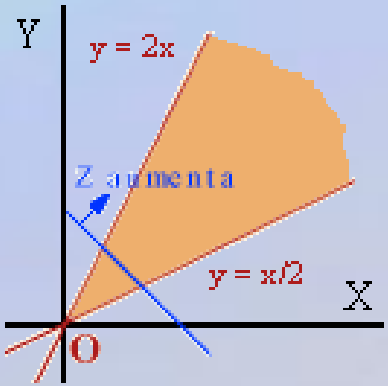
Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, entonces esta corresponde a un punto extremo.

Múltiples soluciones óptimas

- Cuando existen múltiples soluciones óptimas implica que la función objetivo es una recta paralela a uno de los lados de la región factible.
- Cualquier promedio ponderado de la solución óptima es también una solución óptima.

Tipos de soluciones

Factibles: Si existe el conjunto de soluciones que satisfacen las restricciones.



- Con solución no acotada

No existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución. La región factible no debe estar acotada.

No factibles: Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones → las restricciones son inconsistentes.

- Sin solución

No existe la región factible

Solución mediante el método Simplex

Problema a resolver: ***En un vivero se cultivan dos especies de Prunus (X, Y) que se vende a particulares, con un precio de 30 € de X y 20 € de Y, cada unidad de tamaño mínimo.***

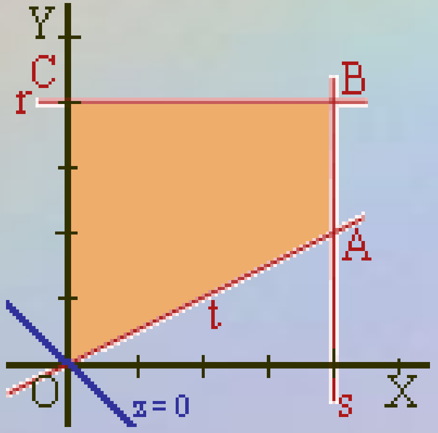
Los trabajos requeridos para obtener dichas especies plantas no debe exceder de 420 horas al año. Los trabajos requeridos para cada X son de 20 horas al año y para cada Y de 30 horas al año.

La cantidad de agua consumida es de 20 litros al año para cada X y 10 para cada Y . El consumo de agua no debe ser mayor de 180 litros al año para estas especies.

La cantidad de abono químico empleado al año para cada X es de 30 cl y de 10 cl para cada Y. La compra de abono químico no debe exceder de 240 cl al año para el cultivo de Prunus .

Solución mediante el método Simplex

Problema a resolver: Maximizar las ganancias anuales con los *Prunus* del vivero, con las restricciones de consumo y horas de trabajo propuestas.



Max $Z = 3X + 2Y$ (ganancia anual en decenas de €)

Sujeto a:

$2X + Y \leq 18$ (Consumo de agua)

$2X + 3Y \leq 42$ (Tiempo de trabajos de cultivo)

$3X + Y \leq 24$ (Gasto de abono)

$X \geq 0$, $Y \geq 0$. (Resultados positivos)

Para poder utilizar el método simplex se deben cumplir las siguientes restricciones:

Restricciones del Algoritmo SIMPLEX

- Solo se puede utilizar para maximizar funciones objetivo z

→ Para minimizar se debe maximizar (-z).

- Solo se puede aplicar a restricciones de igualdad:

Si la restricción es del tipo "≤" se añade una variable de holgura

$aX1 + bX2 \leq C$ → $aX1 + bX2 + \mathbf{Si} = C$; Si = Var. de holgura

Si la restricción es del tipo "≥" se resta una variable de exceso

$aX1 + bX2 \geq B$ → $aX1 + bX2 - \mathbf{Sj} = B$; Sj = Var. de exceso

- Todas las variables deben ser mayores que cero:

Si $X3 \leq 0$ se añade una variable ficticia, Y que se debe agregar a la función objetivo pero con un valor muy grande y negativo representado por -M.

Solución SIMPLEX para el vivero

Maximizar $Z = \mathbf{3X + 2Y}$

$$Z - 3X - 2Y = 0$$
$$2X + Y + S1 = 18$$
$$2X + 3Y + S3 = 42$$
$$3X + Y + S2 = 24$$

$$\mathbf{X \geq 0 , Y \geq 0}$$
$$\mathbf{Si \geq 0 , i= 1, \ldots, 4}$$

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*S1*	*S2*	*S3*	
S1	2	1	1	0	0	18
S2	2	3	0	1	0	42
S3	**3**	1	0	0	1	24
Z	-3	-2	0	0	0	0

1. Escogemos variable con el coeficiente negativo mayor (en valor absoluto).
2. Dividir cada término de la última columna (valores solución) por el término correspondiente de la columna pivote. En nuestro caso: 18/2 =9 , 42/2 =21 , 24/3 =8, se escoge la fila con menor valor.
Si hubiese algún elemento menor o igual que cero no se hace dicho cociente.
3. En la intersección de la fila pivote y columna pivote tenemos el elemento pivote operacional

Solución SIMPLEX para el vivero

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*S1*	*S2*	*S3*	
S1	0	-1/3	1	0	-2/3	2
S2	0	7/3	1	0	-2/3	26
S3	**1**	1/3	0	0	1/3	8
Z	-3	-2	0	0	0	0

S1-2*S3
S2-2*S3
Z+3*S3

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*S1*	S2	S3	
S1	0	**1/3**	1	0	-2/3	2
S2	0	7/3	0	1	-2/3	26
S3	1	1/3	0	0	1/3	8
Z	0	-1	0	0	1	24

4. Los nuevos coeficientes de X se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila pivote por el pivote operacional, que hay que convertir en 1. A continuación mediante la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de la columna pivote.

5. En los elementos de la última fila hay uno negativo, -1, significa que no tenemos la solución óptima. Hay que repetir el proceso: la columna pivote es la de y. Dividimos los términos de la última columna entre los términos de la nueva columna pivote: 2:1/3=6, 26:7/3=78/7 y 8:1/3=24 y como el menor cociente positivo es 6, tenemos que la fila pivote es S1 y el elemento que hay que hacer 1, es 1/3.

Solución SIMPLEX para el vivero

Operando de forma análoga a la anterior obtenemos la tabla:

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*S1*	S2	S3	
S1	0	1	3	0	-2	6
S2	0	0	-7	0	**4**	12
S3	1	0	-1	0	1	6
Z	0	0	3	0	-1	30

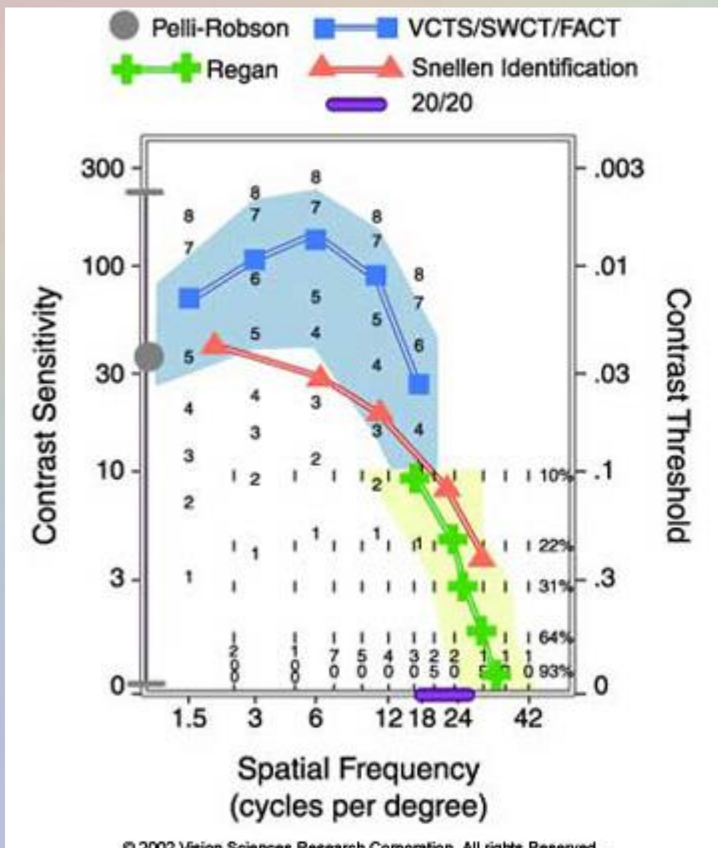
¡TODAVÍA NO HEMOS LLEGADO A LA SOLUCIÓN ÓPTIMA!

Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	*y*	*S1*	S2	S3	
S1	0	1	-1/2	0	0	**12**
S2	0	0	-7/4	0	1	3
S3	1	0	-3/4	0	0	**3**
Z	0	0	5/4	0	0	**33**

El máximo viene dado por el valor Z en la columna: valores solución, Z= **33.**
En la columna de soluciones se puede observar el vértice donde se alcanza, en las filas correspondientes a las variables de decisión que han entrado en la base: **X= 3** e **Y= 12**

Como todos los coeficientes de la fila de la función objetivo son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

Análisis de sensibilidad para la solución óptima.



¿Es sensible la solución óptima a cambios en los parámetros de entrada?

El análisis de sensibilidad estudia posibles cambios en la solución óptima como resultado de la existencia de cambios en el modelo original.

Análisis de sensibilidad para la solución óptima.

Razones para realizar un análisis de sensibilidad:

* Los valores de los parámetros usados se estimaron mejor (se produjo un cambio en ellos).

* El medio ambiente puede cambiar ya que es dinámico.

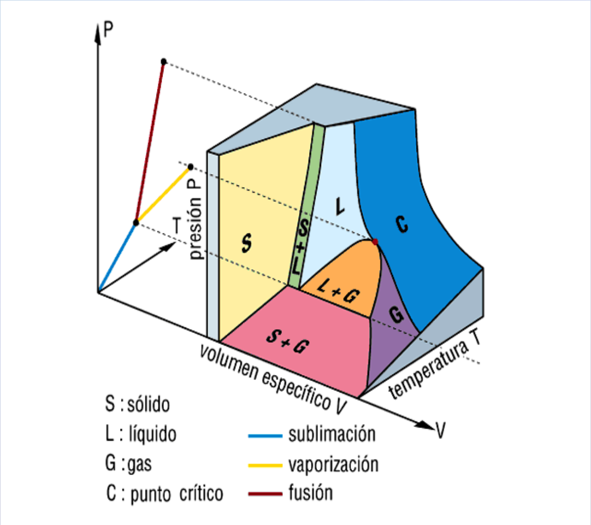
* El análisis del "qué pasa si" puede proveer información económica y operacional.

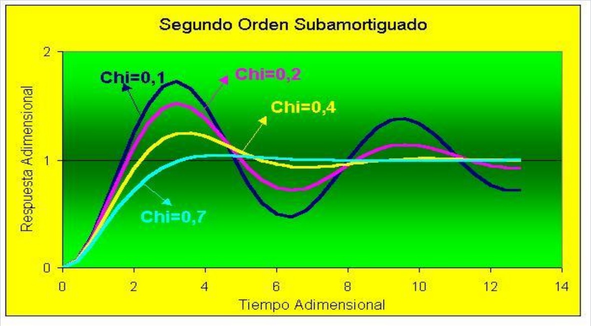
Análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo.

Rango de optimalidad:

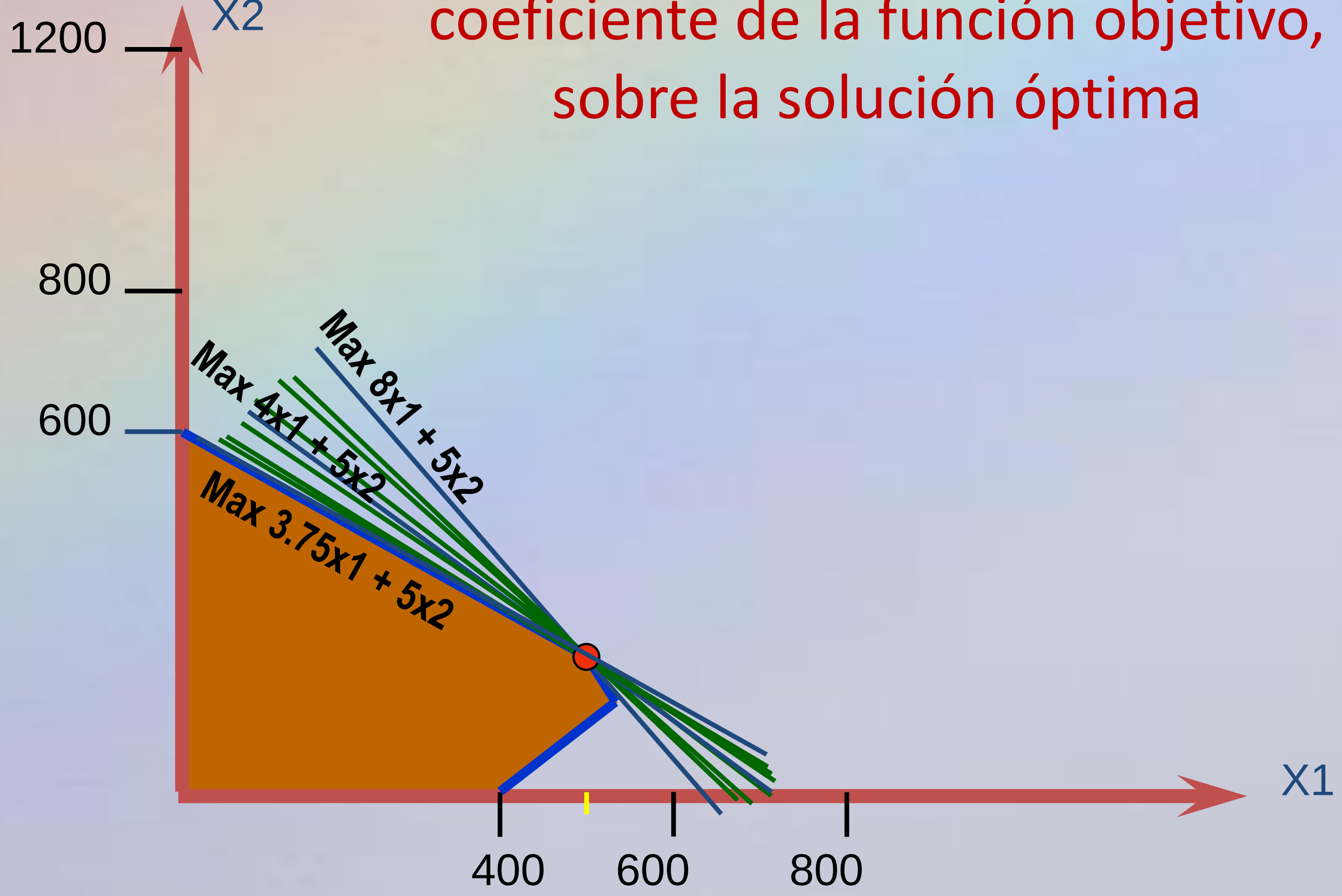
– La solución óptima permanecerá inalterable mientras:
  - Un coeficiente de la función objetivo se encuentre dentro del rango de optimalidad.
  - No hay cambios en ningún otro parámetro.

– El valor de la función objetivo cambiará si el coeficiente multiplica una variable cuyo valor es distinto de cero.

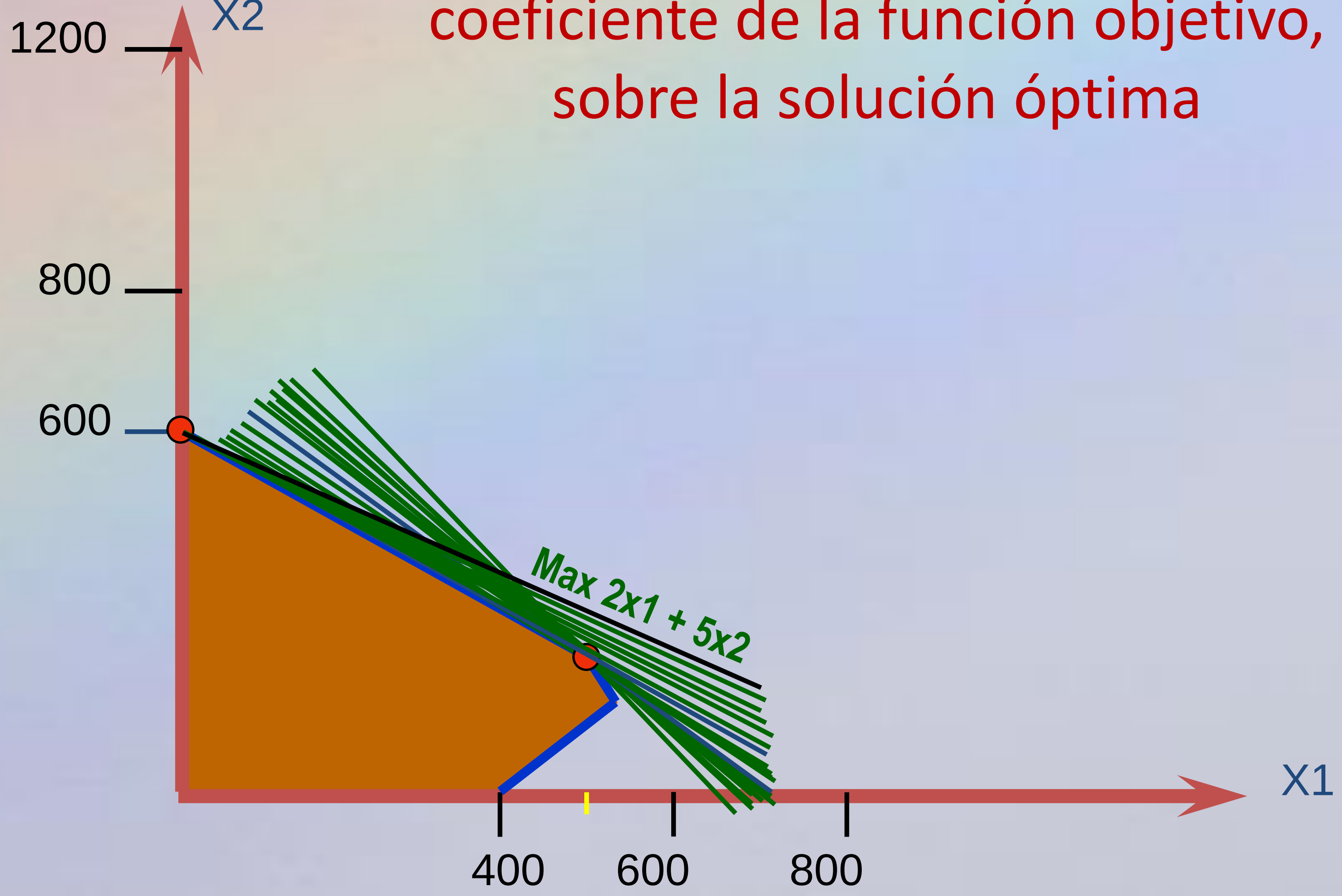




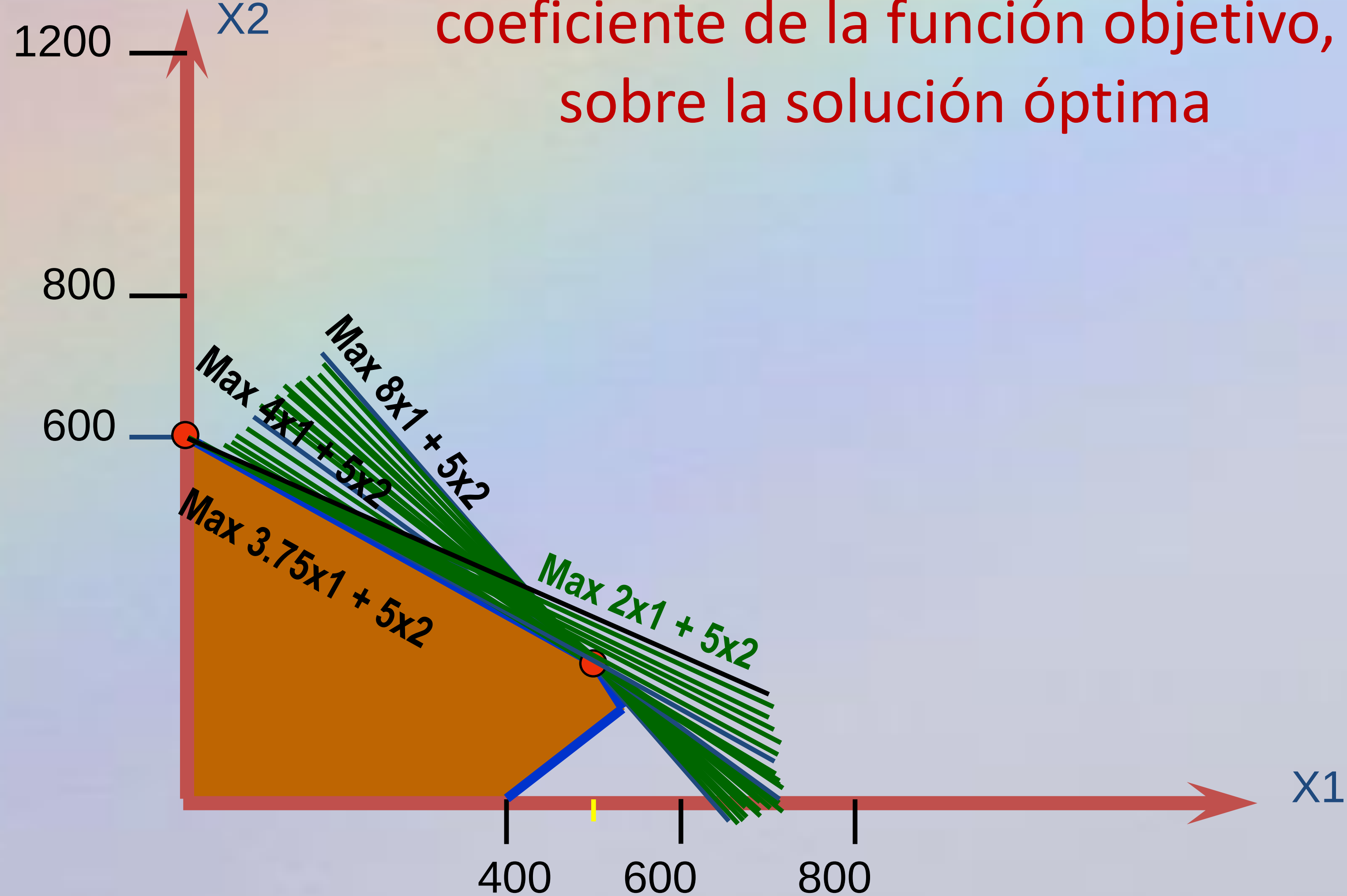
Efectos del cambio de un coeficiente de la función objetivo, sobre la solución óptima



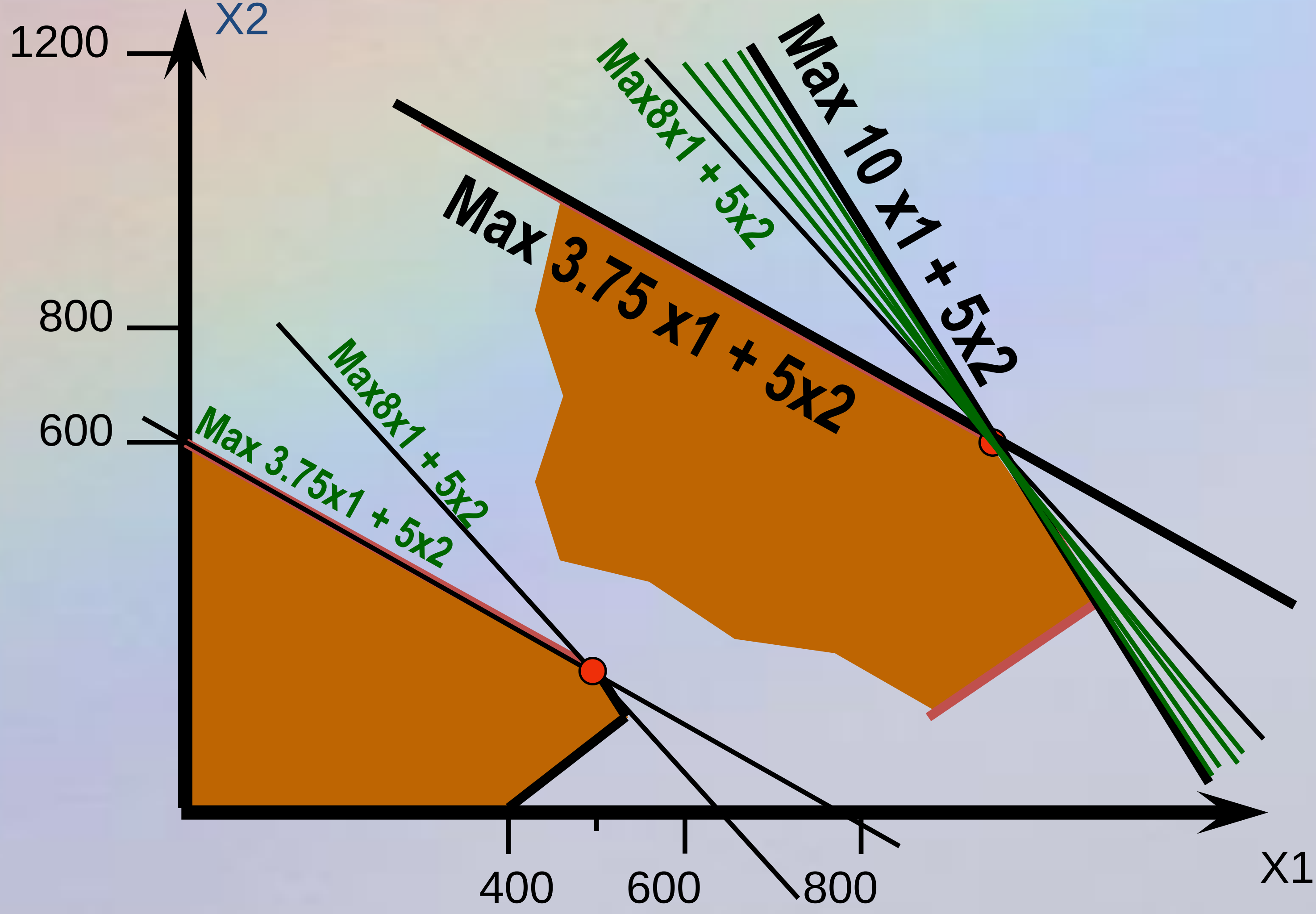
Efectos del cambio de un coeficiente de la función objetivo, sobre la solución óptima



Efectos del cambio de un coeficiente de la función objetivo, sobre la solución óptima

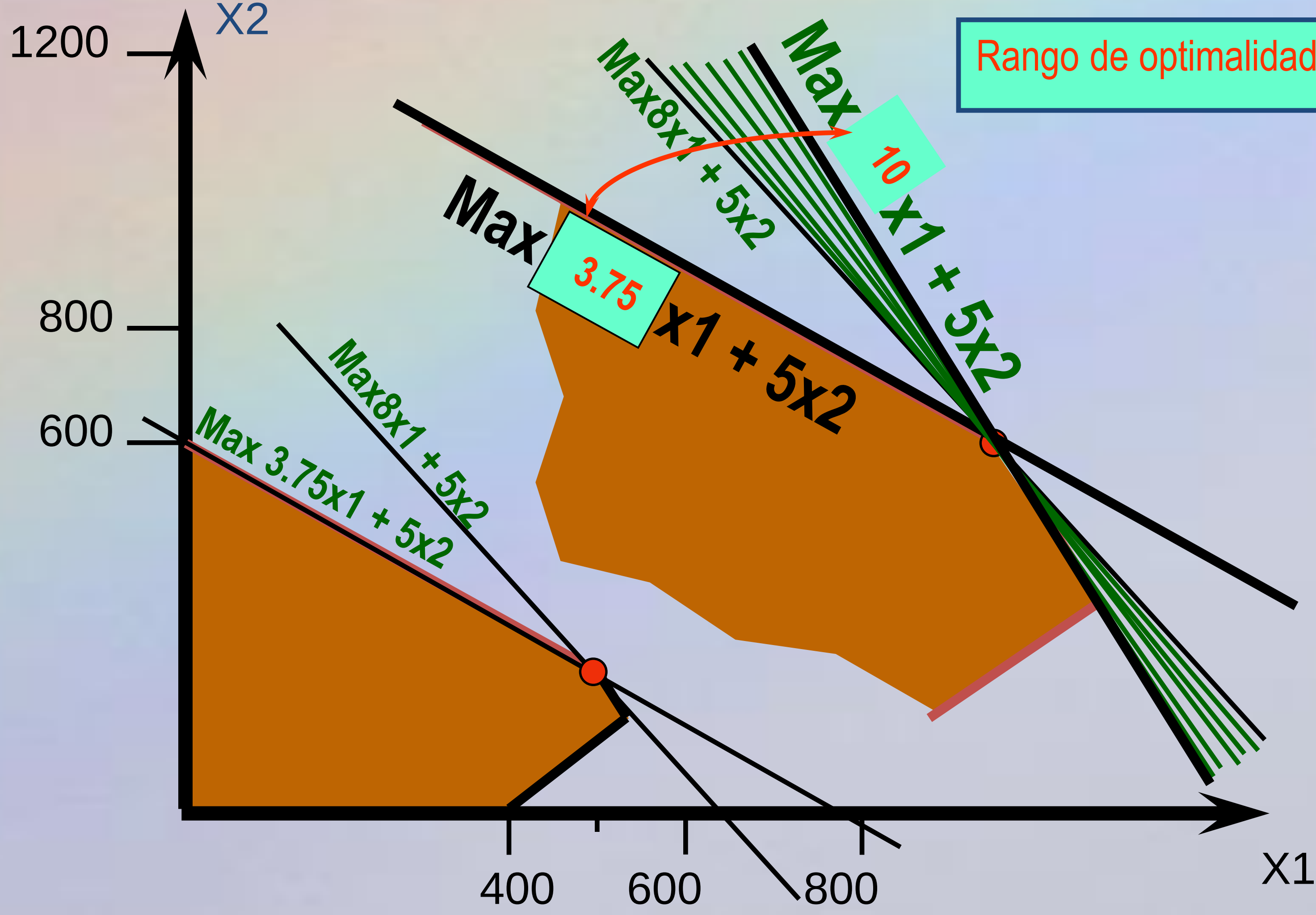


Efectos del cambio de un coeficiente de la función objetivo, sobre la solución óptima



Efectos del cambio de un coeficiente de la función objetivo, sobre la solución óptima

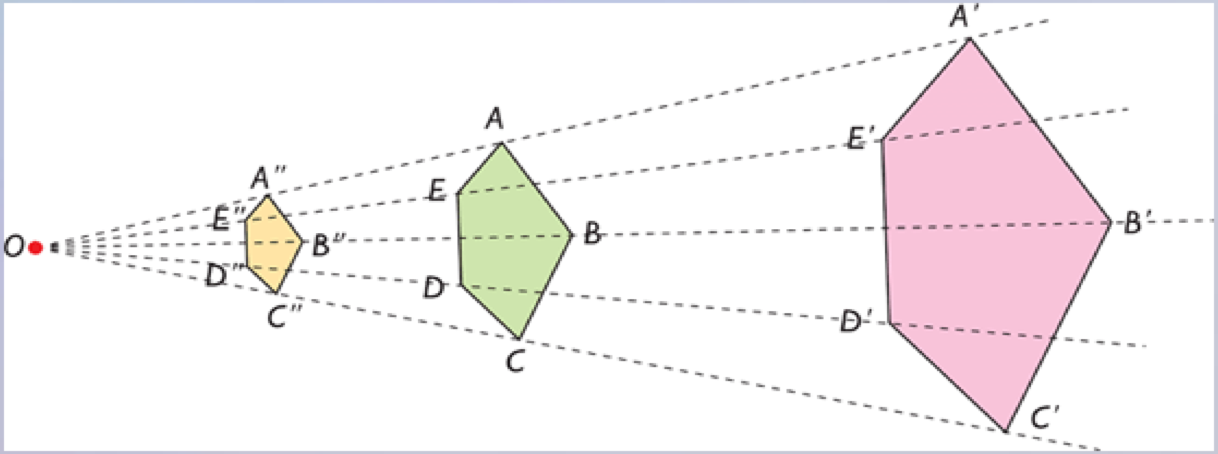
Rango de optimalidad



Cambios Múltìples

Rango de optimalidad:

- El rango de optimalidad es válido cuando un único coeficiente de la función objetivo cambia.
- Cuando cambia más de una variable se utiliza la regla del 100%.



Cambios Múltìples

Regla del 100%:

- Para cada aumento (disminución) en un coeficiente de la función objetivo calcular (y expresar como un porcentaje) la relación de cambio del coeficiente al máximo aumento posible (disminución) determinada por los límites del rango de optimalidad.
- Sumar todos los cambios de porcentaje. Si el total es menor que 100%, la solución óptima no cambiará. Si este total es mayor que 100%, la solución óptima puede cambiar.

Cambios Múltìples

Reducción de costos:

La reducción de costos de una variable a su cota inferior (comúnmente cero) implica que:

- Los coeficientes de la función objetivo deben cambiar antes que la variable pueda tomar un valor sobre la cota inferior.
- Con lo anterior la cantidad de ganancia óptima cambiará según las variables aumentadas desde la cota inferior.

Holgura complementaria:

Existe holgura en la solución óptima, cuando cada variable está en su cota inferior o el costo reducido es 0.

Análisis de sensibilidad del coeficiente del lado derecho.

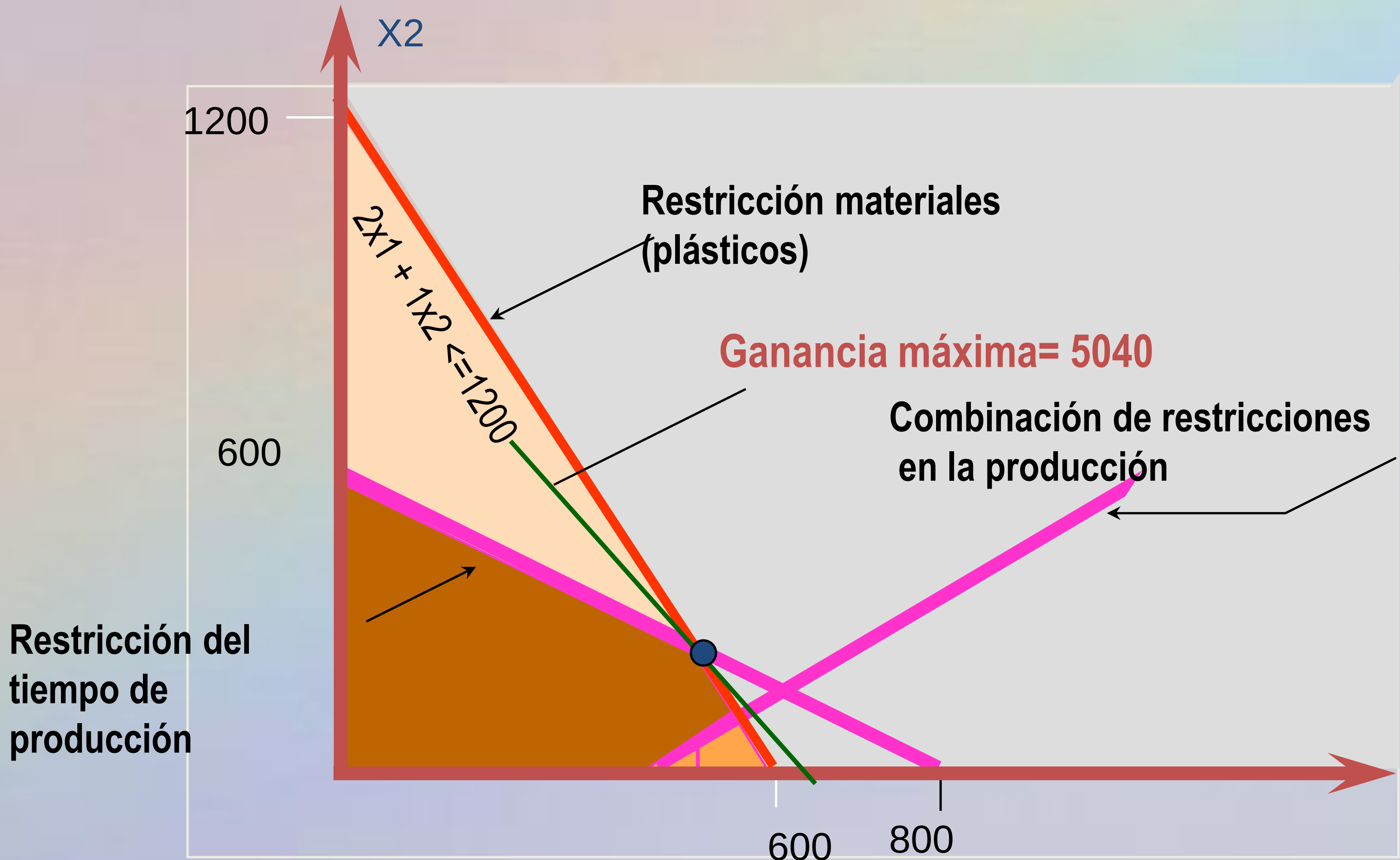
- Cualquier cambio en el lado derecho (bi) de una restricción activa cambiará la solución óptima.
- Cualquier cambio en el lado derecho de una restricción no activa que sea menor que la holgura o el exceso, no produce ningún cambio en la solución óptima.

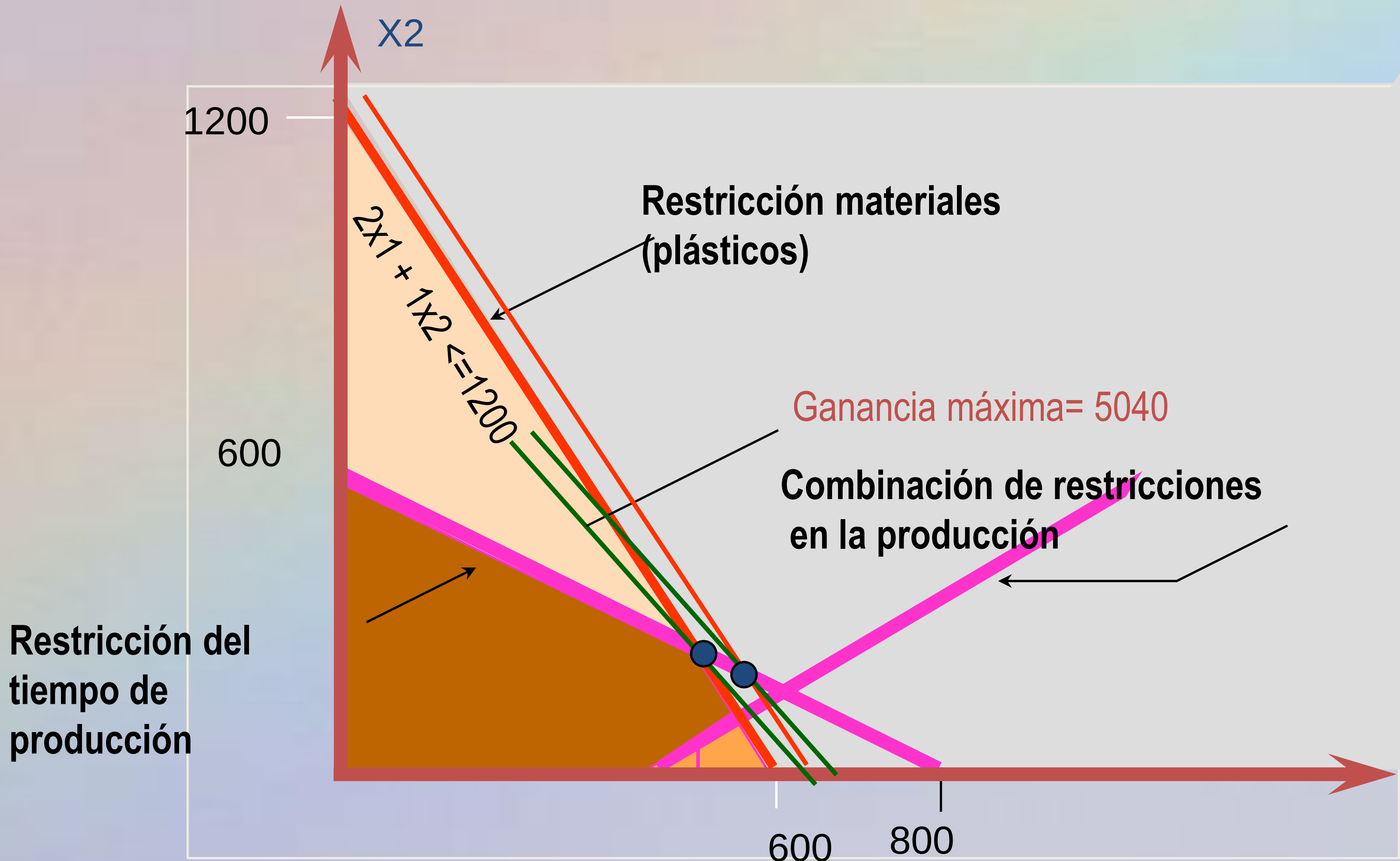
Para el análisis de sensibilidad de la validez de los coeficiente del lado derecho nos interesa responder las siguientes preguntas

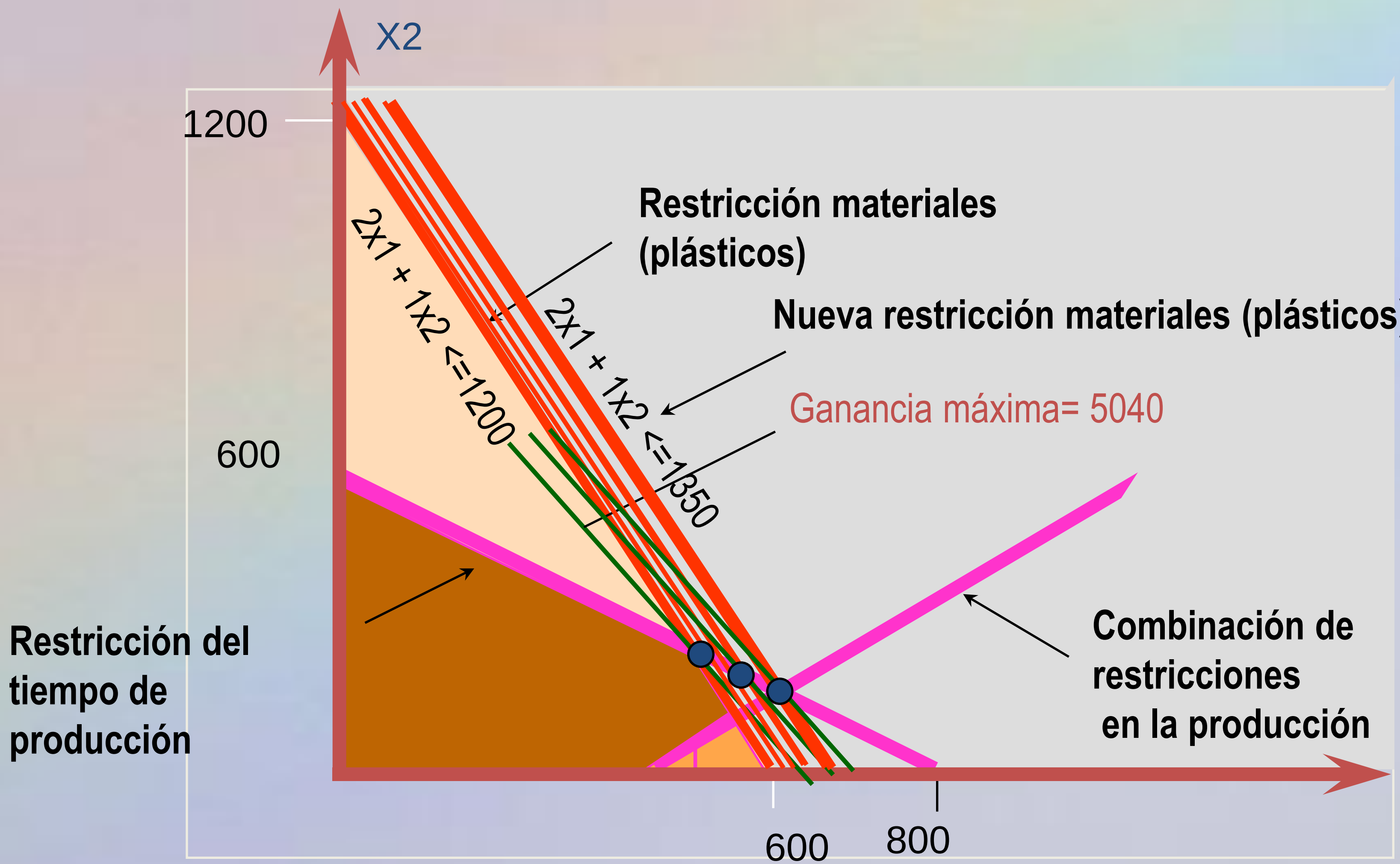
¿ ……. ?

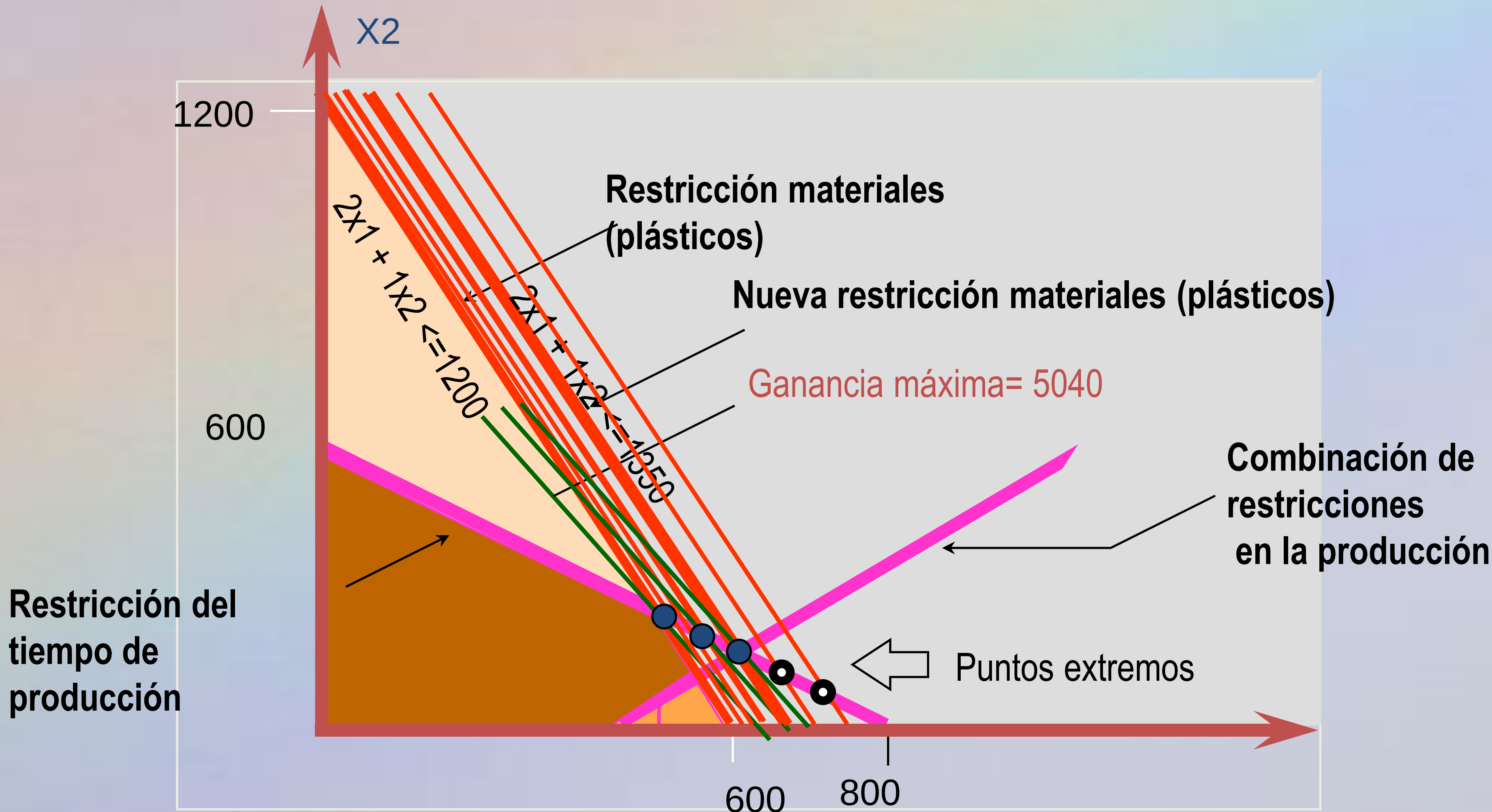
- ¿ Manteniendo todos los otros coeficientes , en cuánto cambiaría el valor óptimo de la función objetivo (p.e., la ganancia) si el coeficiente del lado derecho de una restricción cambia en una unidad?

- ¿ Hasta cuántas unidades se puede agregar o disminuir para que la solución siga siendo válida?


X2
1200
2x1 + 1x2 <=1200
Restricción materiales
(plásticos)
Ganancia máxima= 5040
Combinación de restricciones
en la producción
600
Restricción del
tiempo de
producción
600
800

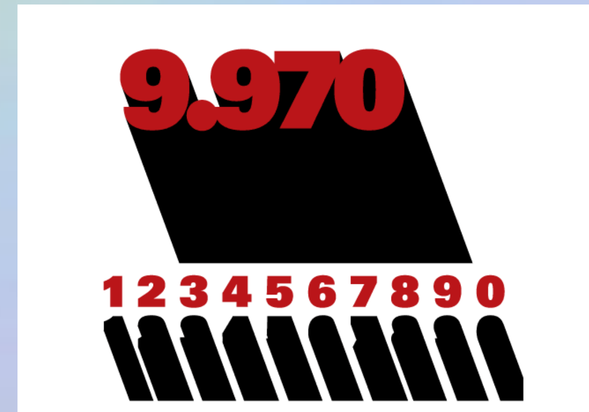

X2
1200
600
Restricción materiales
(plásticos)
2x1 + 1x2 <=1200
Ganancia máxima= 5040
Combinación de restricciones
en la producción
Restricción del
tiempo de
producción
600
800


X2
1200
600
Restricción materiales
(plásticos)
2x1 + 1x2 <=1200
2x1 + 1x2 <=1350
Nueva restricción materiales (plásticos)
Ganancia máxima= 5040
Restricción del
tiempo de
producción
Combinación de
restricciones
en la producción
600
800


X2
1200
600
2x1 + 1x2 <=1200
2x1 + 1x2 <=1350
Restricción materiales (plásticos)
Nueva restricción materiales (plásticos)
Ganancia máxima= 5040
Combinación de restricciones en la producción
Restricción del tiempo de producción
Puntos extremos
600
800

Interpretación correcta del precio sombra

- Costos amortizados: El precio sombra es el valor por una unidad extra del recurso, ya que el costo del recurso no está incluido en el cálculo de los coeficientes de la función objetivo.



- Costos incluidos: El precio sombra es el valor superior por unidad del recurso, el costo del recurso se incluye en el cálculo del coeficiente de la función objetivo.

El rango de factibilidad

- El conjunto de los coeficientes del lado derecho entregan el rango para que el mismo conjunto de restricciones determine el punto óptimo.
- Dentro del rango de factibilidad, los precios sombras permanecen constante; sin embargo, la solución óptima cambiará.

Otros cambios para optimizar la función objetivo

1. La incorporación de una restricción.
2. La eliminación de una restricción.
3. La incorporación de un variable.
4. La eliminación de un variable.
5. Cambio en el lado izquierdo de los coeficientes.

Solución para problemas lineales con muchas variables de decisión usando ordenador.

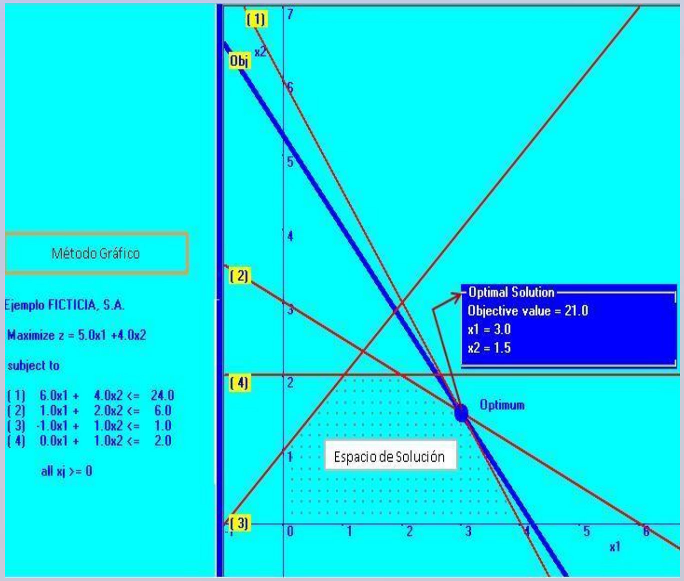
- Los paquetes de programas lineales resuelven grandes modelos lineales.
- La mayoría de los software usan la técnica algebraica llamada algoritmo Simplex.

- Los paquetes incluyen:

– El criterio de la función objetivo (Max o Min).

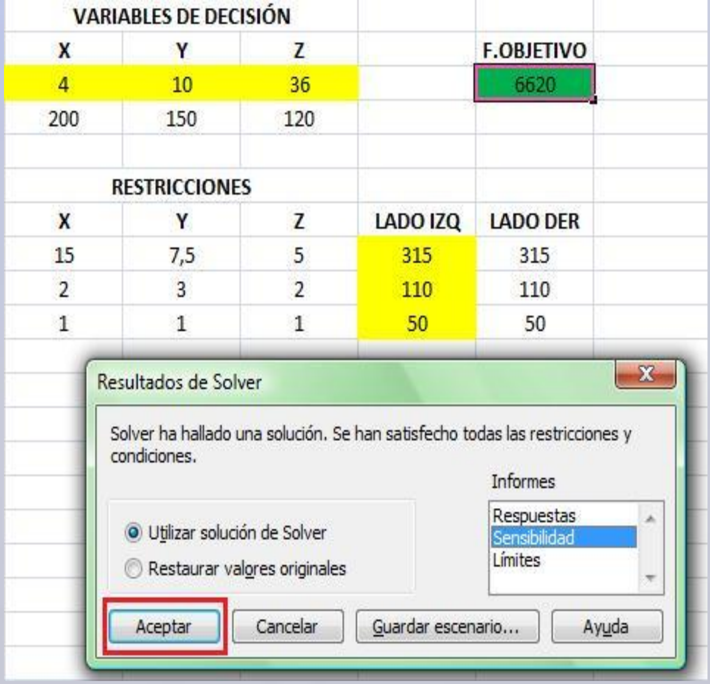
– El tipo de cada restricción: $\leq, =, \geq$

– Los coeficientes reales para el problema.



La solución generada por un software de programación lineal incluye:

- Los valores óptimos de la función objetivo.
- Los valores óptimos de las variables de decisión.
- La minimización del costo para los coeficientes de la función objetivo.
- Los rangos de optimización para los coeficientes de la función objetivo.
- La cantidad de holgura o exceso sobre cada restricción.
- Los precios sombra (o dual) para las restricciones.
- Los rangos de factibilidad para el coeficiente del lado derecho.



Ejemplo: Dieta Marina

Un problema de minimización del costo de la dieta:

- Mezclar dos productos:
  Texfoods, Calration.
- Minimizar el costo total de la mezcla.
- Mantener los requerimientos mínimos de Vitamina A, Vitamina D, y hierro.

Variables de decisión:

X1 (X2) = Cantidad de Texfoods (Calration) que se usó en cada porción (cada 2 onzas).

- El modelo

minimizar $0.60X1 + 0.50X2$

Costo por 2 oz.

sujeto a

% Vitamina A por 2 oz.

$$20X1 + 50X2 \geq 100$$

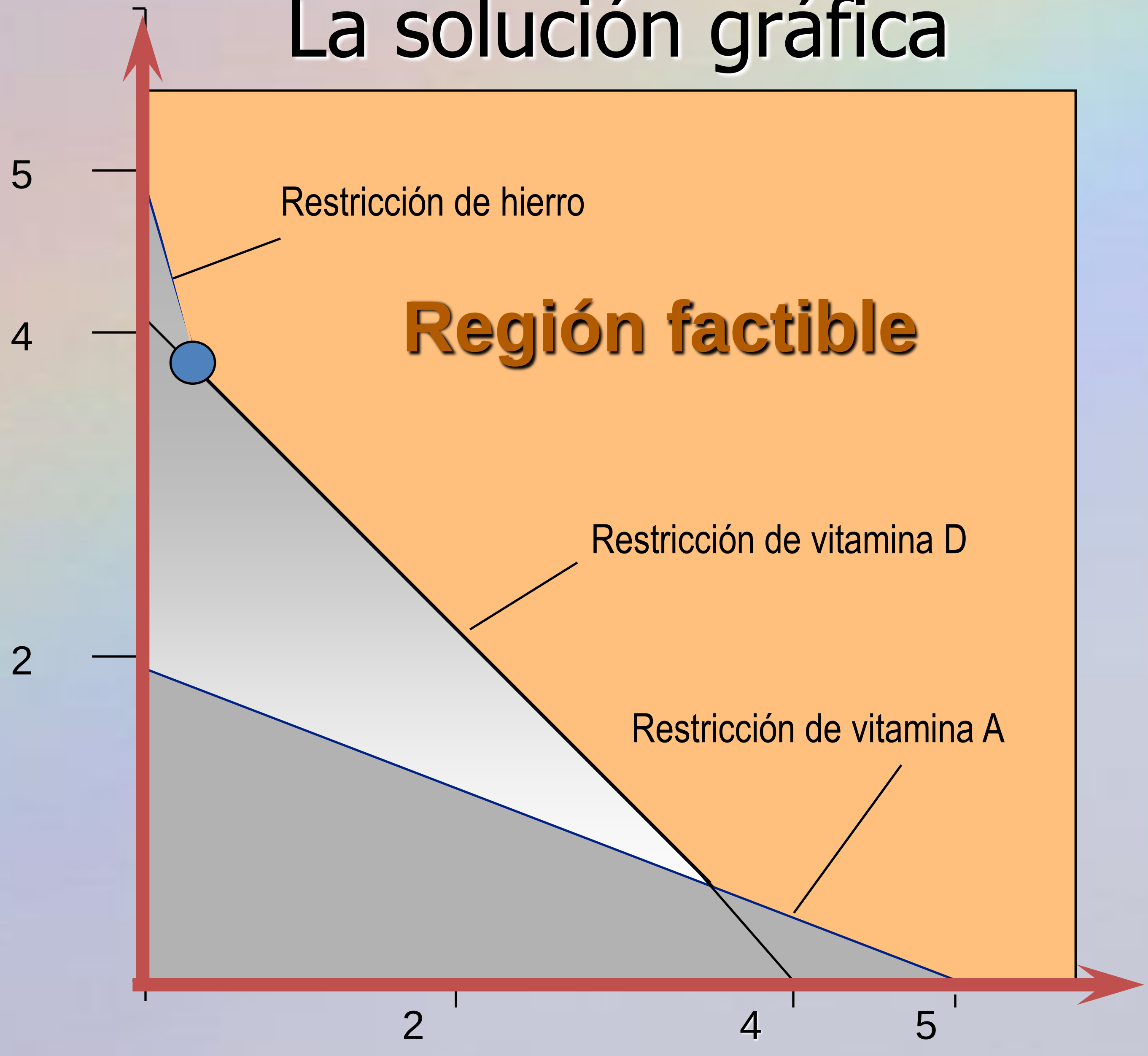
$$25X1 + 25X2 \geq 100 \quad \text{Vitamina D}$$

$$50X1 + 10X2 \geq 100 \quad \text{hierro}$$

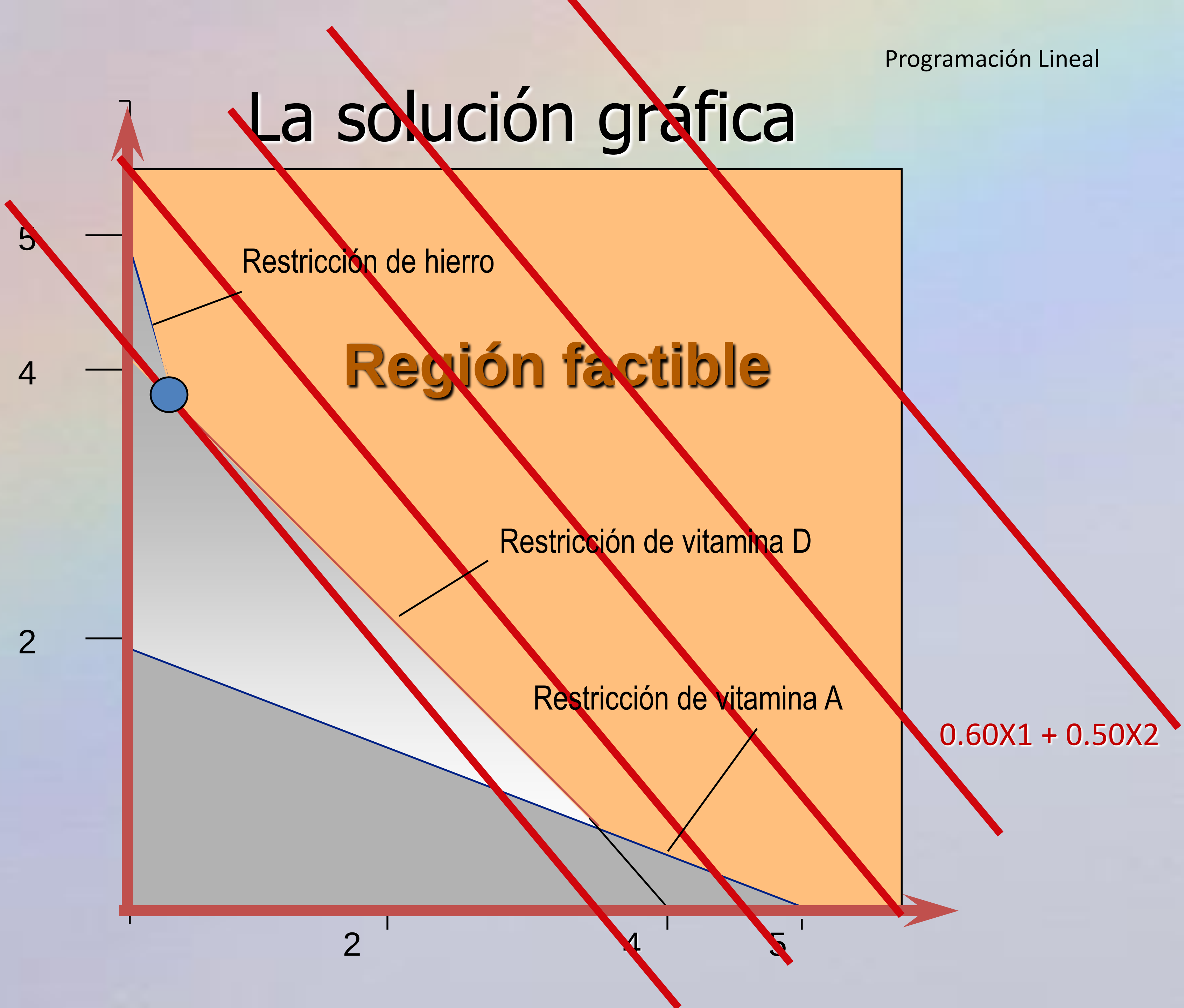
% requerido

$$X1,\ X2 \geq 0$$

La solución gráfica



La solución gráfica



Resumen de la solución óptima

- Producto Texfood = repartir 1.5 (= 3 onzas)
- Producto Calration = repartir 2.5 (= 5 onzas)
- Costo = 2.15 euros por porción servida.
- El requisito mínimo para la Vitamina D y el hierro no se encuentren en superávit.
- La mezcla provee 155% del requerimiento para Vitamina A.

Referencias y web

Contenidos de Programación lineal
http://www.programacionlineal.net/

Modelado y resolución de problemas de organización industrial mediante programación matemática lineal, García Sabater y Maheut, 2015
http://personales.upv.es/jpgarcia/LinkedDocuments/modeladomatematico.pdf

Ejercicios resueltos de Programación lineal, Albornoz Salazar
http://www.academia.edu/6754984/EJERCICIOS_RESUELTOS_DE_PROGRAMACI%C3%93N_LINEAL

A la sala, Álvaro Pérez, 2016
http://www.alasala.cl/wp-content/uploads/2015/04/Problemas-resueltos-de-Programaci%C3%B3n-Lineal.pdf