Ejercicios de formas bilineales y formas cuadráticas

Tema 7

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1. Siendo q una forma cuadrática definida sobre un $\boldsymbol{K}-$ espacio vectorial V y f su forma polar asociada, demuestre que

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\right), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V.$$

2. Considere la forma cuadrática $q : V \to \boldsymbol{R}$ definida por

$$q(\mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3,$$

   en donde (x_1, x_2, x_3) son las coordendas de los vectores de V en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

   1. Exprese matricialmente q en la base B.
   2. Exprese matricialmente q en la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sabiendo que

$$\begin{array}{lcrrr} \mathbf{u}_1 & = & \mathbf{e}_1 & & \\ \mathbf{u}_2 & = & -2\mathbf{e}_1 & +3\mathbf{e}_2 & \\ \mathbf{u}_2 & = & 9\mathbf{e}_1 & -18\mathbf{e}_2 & +9\mathbf{e}_3 \end{array}$$

3. Dada la forma cuadrática

$$q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + (x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

en donde (x_1, x_2, x_3) son las coordendas de los vectores de V en una cierta base B, determine una base de $\ker q$ e indique si q es degenerada o no.

4. Sea $q : V \to \boldsymbol{R}$ una forma cuadrática cuya expresión en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V es

$$q(\mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Obtenga, utilizando operaciones elementales en su matriz asociada, una base de V en la que la matriz de q sea una matriz diagonal. Clasifique q indicando su signatura.

5. Sea $q : V \to \boldsymbol{R}$ una forma cuadrática cuya expresión en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V es

$$q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + \frac{3}{2}(x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_3)^2 - x_2 x_3.$$

   1. Obtenga mediante diagonalización ortogonal una base de V en la que la matriz de q sea una matriz diagonal. Clasifique q, especificando su signatura.
   2. Indique cuál es la forma canónica de q. Obtenga una base de V respecto a la cual la expresión de q sea la de su forma canónica.