Pregunta 1

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea f una aplicación lineal $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales, V de dimensión 2 y W de dimensión 3. Indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

- a. f no puede ser sobreyectiva porque siempre se cumple $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(W)$.
- b. f puede ser sobreyectiva porque siempre se cumple $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(W)$.
- c. f no puede ser sobreyectiva porque $\dim(V) < \dim(W)$. ✔
- d. f puede ser sobreyectiva porque $\dim(V) < \dim(W)$.

Explicación: como $\dim(V) < \dim(W)$, es imposible que exista una aplicación lineal f para la que la dimensión de $\operatorname{Im} f$ pueda ser igual a $\dim(W)$ ($\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(V)$). Por lo tanto f no puede ser sobreyectiva.

La respuesta correcta es: f no puede ser sobreyectiva porque $\dim(V) < \dim(W)$.

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Suponga que entre los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V de dimensión 3 y W de dimensión 3 se define la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccl} f: & V & \to & W \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} & \to & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \end{array}$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ de V y $\{\mathbf{u}_i\}$ de W. Si se tiene otra base, $\{\mathbf{e}'_i\}$, del espacio V, cuya relación con $\{\mathbf{e}_i\}$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + s_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + s_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= s_{13}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

y otra base, $\{\mathbf{u}'_i\}$, del espacio W, cuya relación con $\{\mathbf{u}_i\}$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= t_{11}\mathbf{u}'_1 + t_{21}\mathbf{u}'_2 + t_{31}\mathbf{u}'_3, \\ \mathbf{u}_2 &= t_{12}\mathbf{u}'_1 + t_{22}\mathbf{u}'_2 + t_{32}\mathbf{u}'_3, \\ \mathbf{u}_3 &= t_{13}\mathbf{u}'_1 + t_{23}\mathbf{u}'_2 + t_{33}\mathbf{u}'_3. \end{aligned}$$

¿Cuál es la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{u}'_i\}$? Se recuerda que

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

- a. $A' = T^{-1}AS$.
- b. $A' = TAS$. ✔
- c. $A' = TAS^t$.
- d. $A' = TAS^{-1}$.

Explicación: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} = (v'_1, v'_2, v'_3)^t_{\{\mathbf{e}'_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = (w'_1, w'_2, w'_3)^t_{\{\mathbf{u}'_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}.$$

Del enunciado se tiene que:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

Del cambio de base en V:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i'\}}$$

y del cambio de base en W:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i'\}}.$$

Sustituyendo las tres últimas igualdades en la anterior se obtiene

$$T^{-1} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = TAS \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

De donde se concluye que la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i'\}$ y $\{\mathbf{u}_i'\}$ es:

$$A' = TAS.$$

La respuesta correcta es: $A' = TAS.$

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Considere la aplicación lineal $f : V \to W$, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿Cuánto valen $\operatorname{rg}(f)$ y $\dim(\ker(f))$?

- a. $\operatorname{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 2.$
- b. $\operatorname{rg}(f) = 1, \dim(\ker(f)) = 3.$
- c. $\operatorname{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 1.$ ✔
- d. $\operatorname{rg}(f) = 2, \dim(\ker(f)) = 2.$

Explicación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -0 & 0 & 18 & 20 \end{pmatrix},$$

De donde se deduce que $\operatorname{rg}(A) = 3$ y por lo tanto $\operatorname{rg}(f) = 3$. Por otro lado $\dim(V) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 4$, lo que implica que $\dim(\ker(f)) = 1$.

La respuesta correcta es: $\operatorname{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 1.$

Pregunta 4

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{matrix} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \end{matrix},$$

en donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\overline{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y B^*, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ✔

d. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Explicación: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B:

$$P = (\,\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2\,)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que la matriz asociada a f en las bases $\overline{B}$ y B^* es:

$$A' = AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea la aplicación lineal

$$f : V \to W \quad \text{tal que} \quad f(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)^t,$$

donde $(y_1, y_2, y_3)^t$ son las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ en una cierta base de W y $(x_1, x_2)^t$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en una cierta base de V. Respecto a f se puede afirmar lo siguiente.

- a. f es inyectiva pero no biyectiva. ✔
- b. f es biyectiva.
- c. f es sobreyectiva pero no biyectiva.
- d. f no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Explicación: la matriz asociada a f en las bases de W y V es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

cuyo rango es dos. Por lo tanto $\dim(\text{ Im } f) = 2$ y entonces $\dim(\text{ Im } f) = \dim(V)$ con lo que la aplicación es inyectiva. No puede ser biyectiva porque $\dim(V) < \dim(W)$.

La respuesta correcta es: f es inyectiva pero no biyectiva.

Pregunta **6**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \end{aligned},$$

en donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. ¿Existen vectores de W que no tengan antecedente por f?

- a. Sí, por ejemplo $(2, -1, 1)^t_{B^*}$.
- b. No porque la aplicación es sobreyectiva
- c. No porque la aplicación es inyectiva
- d. Sí, por ejemplo $(0, 0, 1)^t_{B^*}$. ✔

Explicación: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\operatorname{rg}(A) = 2$ se verifica $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 < \dim(W) = 3$ y, por lo tanto, f no es sobreyectiva. Al no ser sobreyectiva, existen vectores de W que no tienen antecedente por f: todos aquellos $\mathbf{b} \in W$ que hagan incompatible el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^t$, ya que es linealmente independiente con respecto a $(1, 1, 1)^t_{B^*}$ y $(1, -2, 0)^t_{B^*}$.

La respuesta correcta es: Sí, por ejemplo $(0, 0, 1)^t_{B^*}$.

Pregunta 7

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{llll} f: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \to & (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)^t \end{array}$$

referida a las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2$, determine la expresión de $f(\mathbf{z})$ en la base B^*, sabiendo que la relación entre las bases $\overline{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y B es la siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

- a. $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$.
- b. $\mathbf{u}_1 + 10\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$.
- c. $5\mathbf{u}_1 + 20\mathbf{u}_2 + 10\mathbf{u}_3$. ✔
- d. $9/5\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 11/5\mathbf{u}_3$.

Explicación: matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B:

$$P = (\,\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2\,)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que $\mathbf{z} = 10\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$ y, teniendo en cuenta que la matriz asociada a f en las bases B y B^* es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se llega a

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}_{B^*}.$$

La respuesta correcta es: $5\mathbf{u}_1 + 20\mathbf{u}_2 + 10\mathbf{u}_3$.