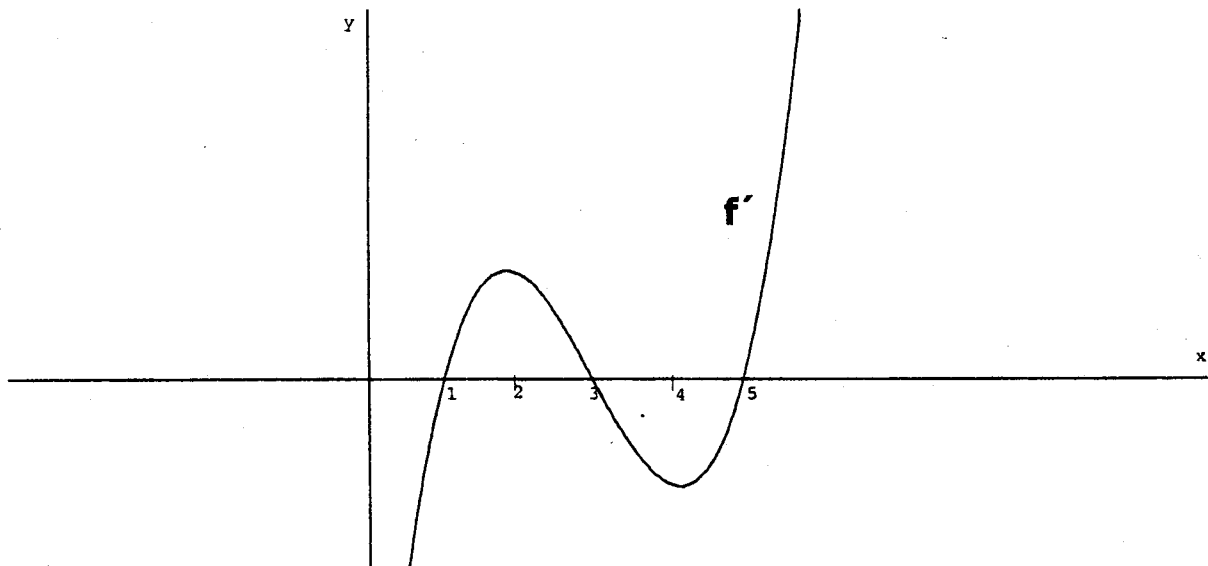


ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
8 de febrero de 2003

PRIMERA PARTE

Tiempo: 1 hora 45 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 6 de marzo de 2003.
Fecha revisión: 10 marzo de 2003.

1.- Sabiendo que la gráfica representa la derivada f' de una función f



- ¿En qué intervalos la función f crece o decrece?
- ¿En qué puntos la función tiene extremos locales? ¿De qué tipo son?
- ¿Dónde la función f es cóncava o convexa?
- Si $f(0) = 1$, dibuje una gráfica posible de f .
- Dibuje una posible gráfica de f'' indicando alguna característica.

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS.

(Sigue detrás)

2.- A.- Calcule, **utilizando coordenadas polares**, el área interior a las dos elipses:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

B.- Calcule el volumen de revolución resultante del giro del área R , alrededor del eje x (plantearlo por tubos y discos y hacerlo de una de las dos formas).

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 1; y \geq 0 \right\}$$

3.- Determine la posición $y(t)$ y la velocidad en cualquier instante t , de un determinado sistema masa-resorte amortiguado y libre que verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0,$$

sabiendo que en $t = 0$ la masa se suelta de la posición de equilibrio ($y(0) = 0$) con una velocidad hacia arriba de 2 cm/seg.

Calcule los valores de t en los que se produce el desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio y la velocidad máxima de la masa e indicar estos valores.

Represente la función $y = y(t)$.

Puntuación Primera Parte:

Problema 1: 2'5 pts. Problema 2: 2 pts. Problema 3: 3 pts.

Puntuación Segunda Parte: 2'5 pts.

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
8 de febrero de 2003

SEGUNDA PARTE

Tiempo: 45 minutos

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 6 de marzo de 2003.

Fecha revisión: 10 marzo de 2003.

A.- Demuestre el teorema del valor medio o de los incrementos finitos:

“Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ ”.

Aplíquelo a la función $f(x) = x^2$ con $a = 0$ y $b = 2$, calculando el punto c del intervalo $(0, 2)$ que verifica el teorema.

B.- Calcule $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

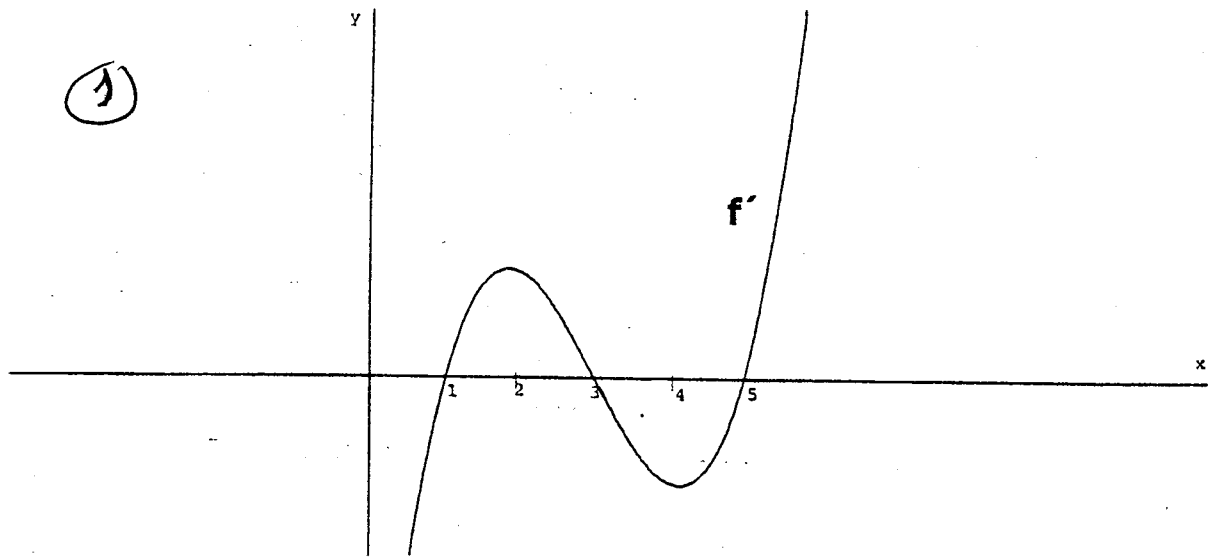
C.- Represente los números complejos z que verifican:

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2\sqrt{2}$$

D.- Utilice las reglas del trapecio y de Simpson para estimar $\int_0^1 f(x)dx$ a partir de los siguientes datos:

| | | | | | |
|--------|---|------|-----|------|-----|
| x | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 |
| $f(x)$ | 1 | 0.8 | 1.3 | 1.1 | 1.6 |

1)



A la vista de la gráfica la función $f'(x)$

es continua y:

negativa $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, 5)$

positiva $\forall x \in (1, 3) \cup (5, \infty)$

a) como f es derivable $\Rightarrow f$ es continua y:
si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ entonces $f(x)$ es creciente en I
si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ entonces $f(x)$ es decreciente en I

Entonces:

f es creciente en $(1, 3) \cup (5, \infty)$

f es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 5)$

b) f' es continua y se anula en los puntos
 $x=1, x=3, x=5$, además

$\left. \begin{array}{l} f'(1-\epsilon) < 0 \\ f'(1+\epsilon) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow f$ cambia de decreciente a creciente \Rightarrow
en $x=1$ presenta un mínimo local

$\left. \begin{array}{l} f'(3-\epsilon) > 0 \\ f'(3+\epsilon) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow f$ cambia de creciente a decreciente
 \Rightarrow en $x=3$ presenta un máximo local

$\left. \begin{array}{l} f'(5-\epsilon) < 0 \\ f'(5+\epsilon) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow f$ cambia de decreciente a creciente
 \Rightarrow en $x=5$ presenta un mínimo local

c) da función f' es derivable y presenta extremos locales en $x=2$ y $x=4$, por tanto $f''(2) = 0 = f''(4)$. Por otro lado f' es

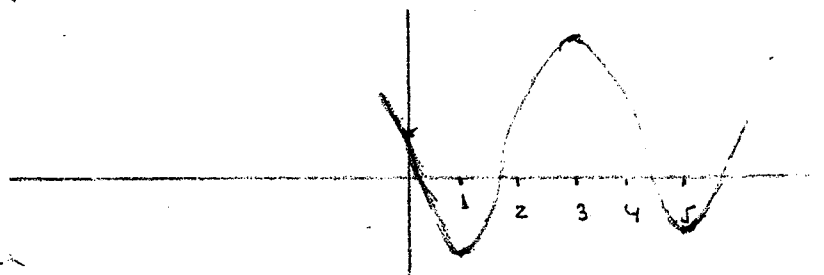
creciente $\forall x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ y
decreciente $\forall x \in (2, 4)$, es decir:

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \text{ y}$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (2, 4)$$

Conclusion: f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$
 f convexa en $(2, 4)$

d) da función f tendrá una forma:



nota: se ha tenido en cuenta todo el estudio anterior + $f(0) = 3$.

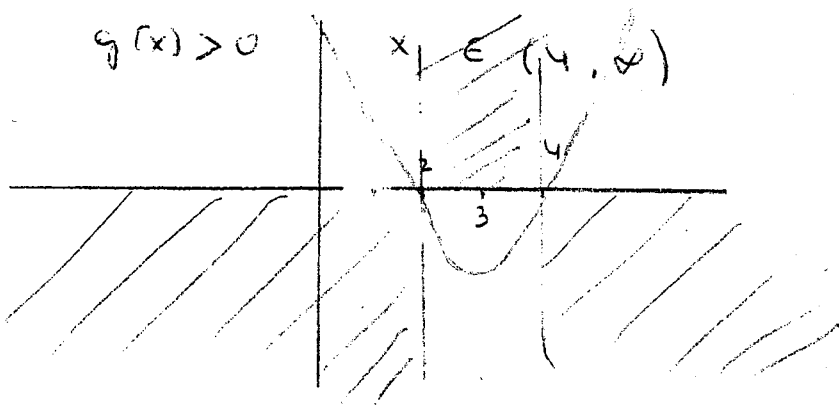
e)

Sea $g(x) = f''(x)$; $f'(x)$ es derivable $\forall x$.

$g(x) > 0 \quad \forall x < 2$; $g(2) = 0$, ya que f' tiene un extremo en $x=2$

$g(x) < 0 \quad x \in (2, 4)$; $g(4) = 0$, f' tiene un extremo en $x=4$

$g(x) > 0 \quad x \in (4, \infty)$



f' tiene un punto de inflexión en $x=3$, entonces, si f'' tiene $f''(3) = 0$, es decir $g(x)$ tiene un punto crítico en $x=3$

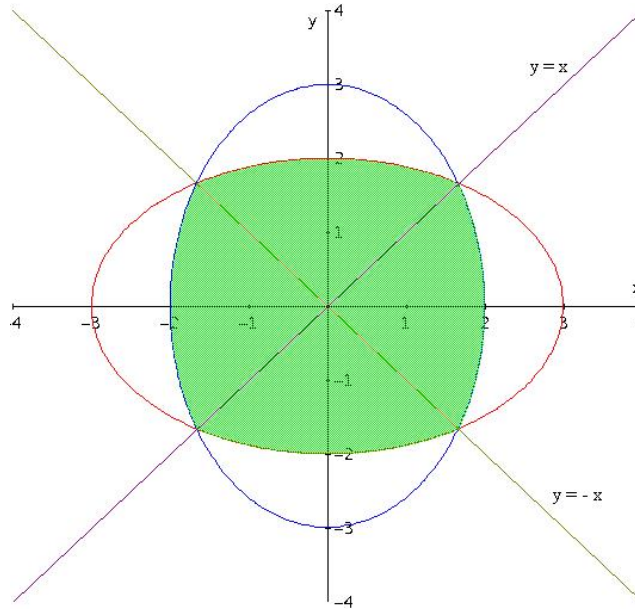
PROBLEMA 2

A

Pasamos las elipses a coordenadas polares

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{r^2 \cos^2 \theta}{9} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{4} = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{36}{4 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{r^2 \cos^2 \theta}{4} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{9} = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{36}{9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}$$



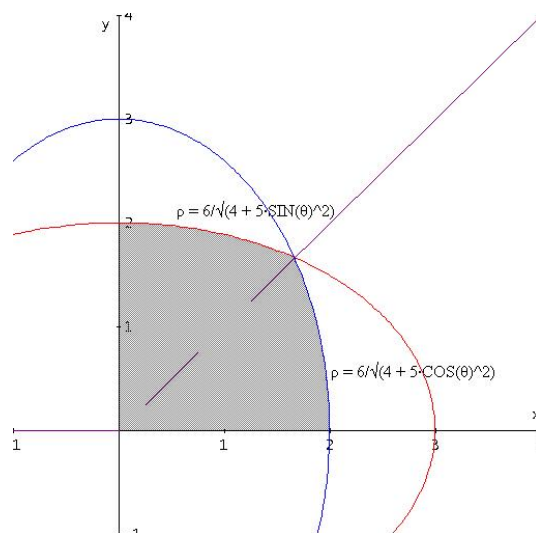
Buscamos los puntos de intersección entre ellas:

$$\frac{36}{9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} = \frac{36}{4 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}; \theta \in [0, 2\pi]$$

Dada la simetría planteamos las integrales que proporcionan el área en un cuadrante:

$$\frac{A}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{36}{9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{36}{4 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} d\theta$$



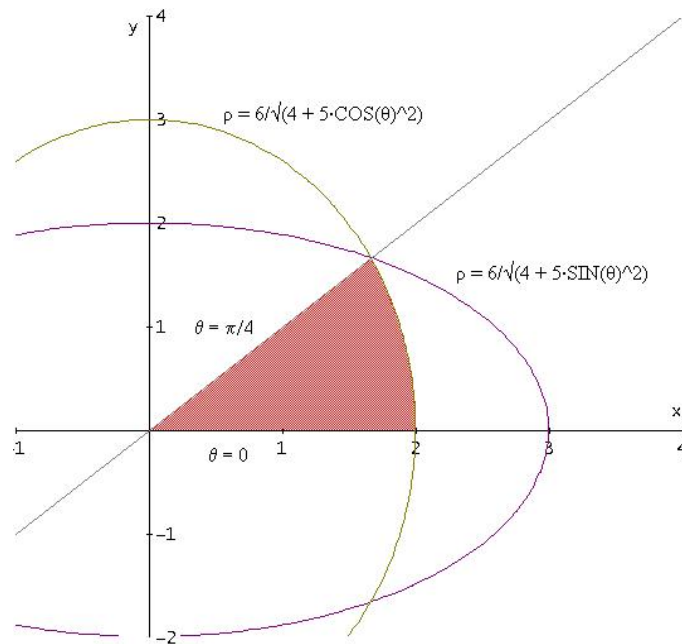
El valor de las dos integrales es el mismo, por la simetría de las dos elipses respecto de los dos ejes coordenados, luego para el área total bastaría con:

$$\frac{A}{8} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{36}{9 \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

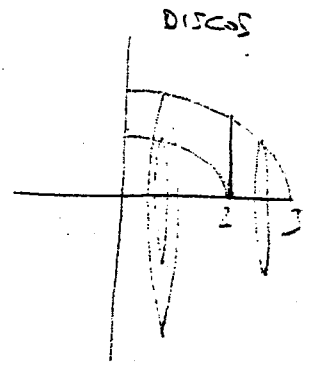
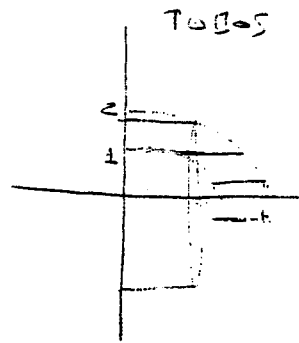
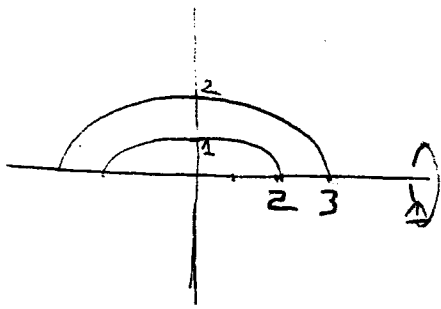
Haciendo el cambio de variable

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = t \\ \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2} \\ \theta' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \theta = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 144 \int_0^1 \frac{1}{9 \frac{1}{1+t^2} + 4 \frac{t^2}{1+t^2}} dt = 144 \int_0^1 \frac{1}{9+4t^2} dt$$

$$A = \frac{72}{3} \left[\arctan \left(\frac{2}{3} t \right) \right]_{t=0}^{t=1} = 24 \arctan \frac{2}{3} (u^2)$$



17



TUBOS

$$V = 2 \int_0^1 2\pi \left(\underbrace{\sqrt{7\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)}}_{\text{altura}} - \underbrace{\sqrt{4\left(1 - y^2\right)}}_{\text{radio}} \right) y \, dy + 2\pi \int_1^2 y \sqrt{7\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)} \, dy$$

DISCOS

$$V = 2 \left(\pi \int_0^2 \left(\left(\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)} \right)^2 - \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)^2 \right) dx + \pi \int_2^3 \left(\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)} \right)^2 dx \right) =$$

$$= 2 \left(\pi \int_0^2 \left(4 - \frac{4x^2}{9} - 1 + \frac{x^2}{4} \right) dx + \pi \int_2^3 \left(4 - \frac{4x^2}{9} \right) dx \right) = \frac{40\pi}{3}$$

PROBLEMA 3

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

① Ecuación característica: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ doble.

Sistema fundamental de soluciones: $\{e^{-3t}, te^{-3t}\}$

Solución general de la E.D. $y = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$

Condiciones iniciales: $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{0 = C_1}$

$$y'(0) = -2 \quad + y' = -3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-3t} - 3C_2 t e^{-3t}$$

$$-2 = -3C_1 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -2}$$

• Luego la posición: $\boxed{y(t) = -2te^{-3t}}$

• La velocidad: $y'(t) = v(t) = 6te^{-3t} - 2e^{-3t} = \boxed{(6t-2)e^{-3t}}$

② • El desplazamiento máximo: $y_{\max} \Rightarrow y'(t) = 0 \Rightarrow v(t) = 0$

$$(6t-2)e^{-3t} = 0 \Rightarrow 6t-2=0 \quad t = \frac{1}{3} \text{ seg. En este instante}$$

$v(t) = 0$ Luego se produce el desplazamiento máximo, que corresponde a un mínimo de la función $y(t)$. Desplazamiento máx.: $|y(\frac{1}{3})| = \left| -\frac{2}{3} e^{-1} \right|$

→ Desplazamiento máximo: $\frac{2}{3} e^{-1}$ cm.

Velocidad máxima: $v(t) = (6t-2)e^{-3t}$, sus extremos son $v'(t) = 0$

$$v'(t) = 6e^{-3t} - 3(6t-2)e^{-3t} = (12-18t)e^{-3t}$$

$v'(t) = 0$ [Únicos puntos críticos ya que es función derivable]

$$(12-18t)e^{-3t} = 0 \Rightarrow 12 = 18t \quad t = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ seg.}$$

• El valor máximo de la velocidad: $v\left(\frac{2}{3}\right) = 2e^{-2}$ cm/seg.

$$y'(t) = 2(3t-1)e^{-3t}$$

$y' < 0$ si $t < \frac{1}{3}$ $y(t)$ decrece \Rightarrow mínimo en $t = \frac{1}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} v'(t) = 6(2-3t)e^{-3t} \\ t < \frac{2}{3} \quad v(t) \text{ crece. } \Rightarrow t = \frac{2}{3} \\ t \geq \frac{2}{3} \quad v(t) \text{ decrece máx.} \end{array} \right\}$$

⑤ Representamos $y = y(t)$ * $y = -2t e^{-3t}$

• Función continua.

• En $t = \frac{1}{3}$ tiene un mínimo. $\left\{ \begin{array}{l} t < \frac{1}{3} \quad y(t) \text{ decrece.} \\ t > \frac{1}{3} \quad y(t) \text{ crece.} \end{array} \right.$

• En $t = \frac{2}{3}$ $y''(t) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} t > \frac{2}{3} \quad y'' < 0 \text{ concava hacia } \textit{abajo} \\ t < \frac{2}{3} \quad y'' > 0 \text{ concava hacia } \textit{arriba} \end{array} \right.$

En $t = \frac{2}{3}$ tenemos punto de inflexión.

• Asíntotas:

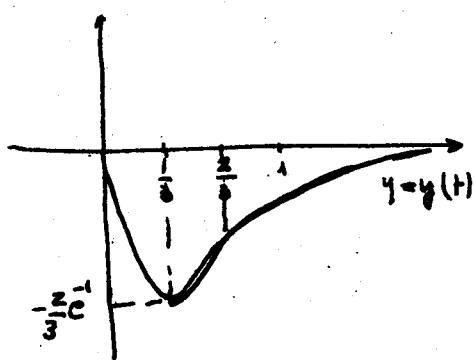
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -2t e^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{e^{3t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{3e^{3t}} = 0$$

↓
0.∞.

Es decir si $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 0$ Asíntota $y=0$. horizontal.

El móvil tiende a alcanzar su posición de equilibrio.

No existen otros tipos de asíntotas.



SEGUNDA PARTE

A.- Demuestre el teorema del valor medio o de los incrementos finitos:

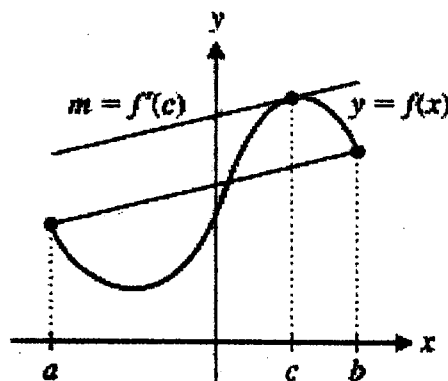
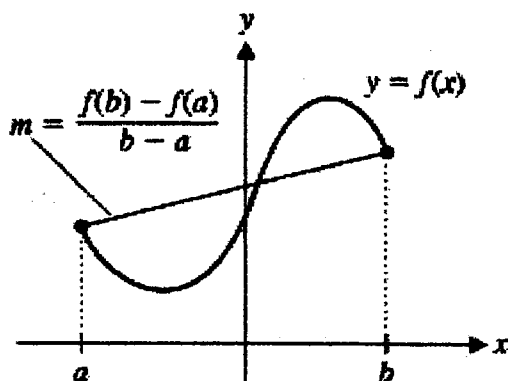
“Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ ”.

Aplíquelo a la función $f(x) = x^2$ con $a=0$ y $b=2$, calculando el punto c del intervalo $(0,2)$ que verifica el teorema.

SOLUCIÓN

Demstración

El teorema establece que existe una recta tangente a la curva $y = f(x)$ en algún punto $(c, f(c))$, con $c \in (a,b)$, con la misma pendiente m que la secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



La recta secante que pasa por los puntos inicial y final del arco de curva tiene una pendiente:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La ecuación de la recta secante es entonces:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

Se define una función auxiliar $g(x)$ como la diferencia entre la función f y la recta secante:

$$g(x) = f(x) - [f(a) + m(x - a)]$$

La función g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por serlo f . Además se verifica:

$$g(a) = f(a) - [f(a) + m(a - a)] = 0$$

$$g(b) = f(b) - [f(a) + m(b - a)] = [f(b) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

dado que $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Como g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y además $g(b) = g(a)$, la función g verifica las condiciones del teorema de Rollé en el intervalo $[a, b]$, por lo que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Pero, derivando $g(x)$ en $x = c$, se tiene:

$$g'(c) = f'(c) - m = 0$$

Finalmente, despejando $f'(c)$ se obtiene:

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

como queríamos demostrar. □

La función $f(x) = x^2$ verifica las condiciones del teorema en el intervalo $[0, 2]$, ya que es continua en este intervalo y derivable en $(0, 2)$, siendo $f'(x) = 2x$. Por lo tanto el teorema establece que existe $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f(2) - f(0) = (2 - 0)2c \Rightarrow c = \frac{4}{4} = 1,$$

que es el punto pedido.

B.- Calcule $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

SOLUCIÓN

Para realizar el cálculo, en primer lugar, se realiza el cociente, para lo cual se expresan los números complejos implicados en forma exponencial:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

En esta forma, el cociente se resuelve:

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}},$$

y la potencia buscada finalmente es:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12} e^{i12\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2^6}e^{i\pi} = \frac{-1}{64}$$

C.- Represente los números complejos z que verifican:

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN

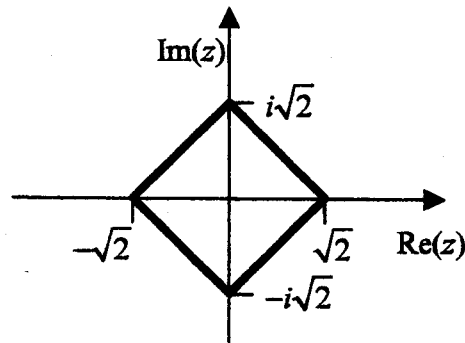
Considerando $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $\bar{z} = x - iy$, por lo que la ecuación resulta ser:

$$|2x| + |2iy| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |x| + |y| = \sqrt{2}$$

Expresando la ecuación, sin valores absolutos, se tiene:

$$\begin{cases} x \geq 0 & \begin{cases} y \geq 0 & x + y = \sqrt{2} \\ y < 0 & x - y = \sqrt{2} \end{cases} \\ x < 0 & \begin{cases} y \geq 0 & -x + y = \sqrt{2} \\ y < 0 & -x - y = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Representando los segmentos anteriores se obtiene:



D.- Utilice las reglas del trapecio y de Simpson para estimar $\int_0^1 f(x) dx$ a partir de los siguientes

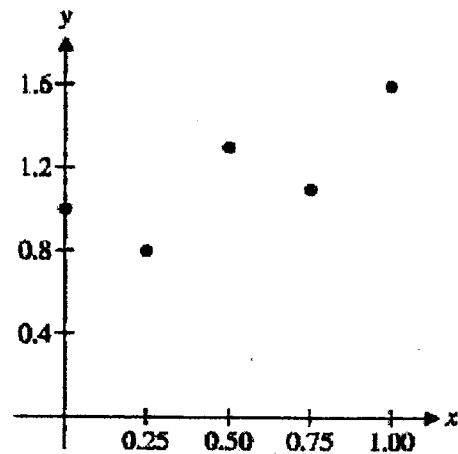
datos:

| | | | | | |
|--------|---|------|-----|------|-----|
| x | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 |
| $f(x)$ | 1 | 0.8 | 1.3 | 1.1 | 1.6 |

SOLUCIÓN

En primer lugar se comprueba que el conjunto está formado por $n=5$ puntos, que definen cuatro subintervalos de igual amplitud $h=0.25$, por lo que es posible aplicar las reglas del trapecio y de Simpson.

Se puede representar el conjunto de puntos correspondientes a una función $f(x)$ desconocida.



- **Método de trapecios.** La fórmula que permite estimar el valor de la integral es:

$$\int_0^1 f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.50) + 2f(0.75) + f(1))$$

Aplicando se llega a:

$$\int_0^1 f(x) dx \cong \frac{0.25}{2} (1 + 2 \cdot 0.8 + 2 \cdot 1.3 + 2 \cdot 1.1 + 1.6) = \frac{0.25}{2} 9 = 1.125$$

- **Método de Simpson.** La fórmula es:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} (f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.50) + 4f(0.75) + f(1))$$

Aplicando se obtiene:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{0.25}{3} (1 + 4 \cdot 0.8 + 2 \cdot 1.3 + 4 \cdot 1.1 + 1.6) = \frac{0.25}{3} 12.8 \cong 1.067$$

Para n puntos, el método de Simpson es mucho más preciso que el de trapecios, con errores de orden $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ frente a errores de orden $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en este último. Es de esperar que el valor obtenido con la regla de Simpson sea más aproximado que el obtenido con la regla de los trapecios, siendo el error cometido de orden $O\left(\frac{1}{625}\right)$.