

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I

4 de septiembre de 2003

PRIMERA PARTE

Tiempo: 1 hora 45 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 12 de septiembre de 2003.

Fecha revisión: 15 de septiembre de 2003.

1.- A.- Dibuje la gráfica de una función continua y par, tal que $f(0) = 0$, y
$$\begin{cases} f'(x) = 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ f'(x) = -1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ f'(x) = 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

B.- Demuestre que la ecuación $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz.

C.- De una función f se sabe que: $f(0) = 0$, $2 \leq f'(x) \leq 5$, $\forall x \in [0, 4]$. Demuestre que $8 \leq f(4) \leq 20$.

JUSTIFIQUE CLARAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS.

2.- A.- Calcule, mediante integración, el volumen que engendra el área interior del rombo de vértices A(3,1), B(4,2), C(3,3) y D(2,2) al girar alrededor del eje OX.

B.- Hallar, mediante integración, el volumen de sección conocida correspondiente a un cono recto de altura h , cuya base es una elipse de semiejes a y b .

3.- Desde un globo estacionario se deja caer un paracaídas con un objeto de masa $m = 10$ kg. La ecuación diferencial que describe la velocidad de caída cuando la resistencia que opone el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

donde k es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño del paracaídas.

Calcule:

a) La velocidad de caída en cualquier instante t suponiendo $v(0) = 0$ (tomar $g = 10\text{m/seg}^2$).

b) El valor de k para que la velocidad límite o terminal sea $\frac{1}{2}$ m/seg.

c) La posición del móvil: $s = s(t)$ en cualquier instante, supuesto $s(0) = 3000$ m. $\left(\frac{ds}{dt} = v\right)$

Puntuación Primera Parte: Problema 1: 1,5 pts. Problema 2: 2,5 pts. Problema 3: 3 pts.
Puntuación Segunda Parte: A:1,25 pts. B:0,5 pts. C:0,5 pts D:0,75 pts

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
4 de septiembre de 2003

SEGUNDA PARTE

Tiempo: 45 minutos

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 12 de septiembre de 2003.

Fecha revisión: 15 de septiembre de 2003.

A.- Demuestre el teorema del valor medio para integrales:

“Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, existe un número $c \in (a, b)$ para el cual

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx”.$$

B.- Identifique razonadamente y represente en el plano complejo la curva:

$$C = \{z \in \mathbb{C} / |z - 2 + 2i| = |z|\}$$

C.- Calcule y represente en el plano complejo $z = \sqrt[6]{1}$, expresando la solución en forma binómica,

D.- Sea la función $f(x) = x^3 - x + 1$. Se pide aproximar numéricamente la solución de la ecuación $f(x) = 0$ aplicando los métodos siguientes:

- Método de iteración de punto fijo, con un punto inicial $x_0 = -1$.
- Realice 2 iteraciones con punto inicial $x_0 = -1$, del método de Newton-Raphson.
- Realice 2 iteraciones con intervalo inicial $[-2, 0]$, del método de bisección.

(Represente gráficamente y justifique adecuadamente los resultados obtenidos.)

Δ A)

①

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) = 2x & 0 < x < 1 \\ f'(x) = -1 & 1 < x < 3 \\ f'(x) = 1 & x > 3 \end{cases}$$

La función $F'(x)$ es integrable en los intervalos dados, ya que es continua en ellos.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + c_1 & 0 < x < 1 \\ -x + c_2 & 1 < x < 3 \\ x + c_3 & x > 3 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es continua debe cumplir:

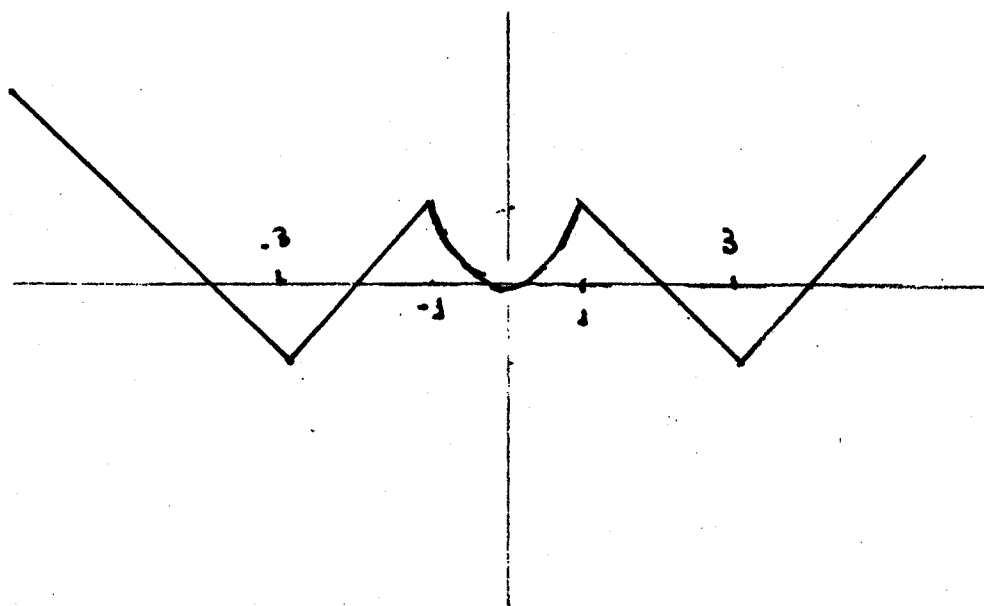
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + c_1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + c_2) \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + c_3) \Leftrightarrow \boxed{c_3 = -4}$$

Por ser la función par:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & x < -3 \\ x + 2 & -3 \leq x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 < x \leq 3 \\ x - 4 & x > 3 \end{cases}$$



Sea $f(x) = x^{101} + x^{51} + x - 1$.

$f(x)$ es una función de C^{∞} , entonces: $f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1$

$f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. por tanto $f(x)$ es siempre creciente y cortará como máximo una vez al eje Ox .

El número total de raíces de la ecuación es un número impar (101), además como los coeficientes son reales, el número de raíces reales será también un número impar.

de ecuación tiene una y solamente una raíz real.

Sea c de función $f(x)$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$, por el teorema de Lagrange $\exists c \in (0, 4)$ /

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \rightarrow f'(c) = \frac{f(4)}{4} \quad \text{Como } 2 \leq f'(x) \leq 5 \quad \forall x \in [0, 4]$$

entonces $8 \leq f'(4) \leq 20$.

3

30-

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2$$

a)

E.D. : $\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{k}{100} v^2$ *variables separables.*

$$\frac{dv}{10 - \frac{k}{10} v^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\frac{k}{100} v^2 - 1} = -10 dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2 - \frac{100}{k}} = -\frac{k}{10} dt$$

integrando: $\frac{1}{2 \cdot \frac{10}{\sqrt{k}}} \ln \frac{v - \frac{10}{\sqrt{k}}}{v + \frac{10}{\sqrt{k}}} = -\frac{k}{10} t + C_1$

$$\ln \frac{v - \frac{10}{\sqrt{k}}}{v + \frac{10}{\sqrt{k}}} = -\frac{2 \cdot 10}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{10} t + C_2 \quad \text{tenemos que despejar } v = v(t)$$

$$\ln \frac{v - \frac{10}{\sqrt{k}}}{v + \frac{10}{\sqrt{k}}} = -2\sqrt{k} t + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v - \frac{10}{\sqrt{k}}}{v + \frac{10}{\sqrt{k}}} = e^{-2\sqrt{k} t + C_2} = e^{-2\sqrt{k} t} \cdot e^{C_2} = C e^{-2\sqrt{k} t}$$

introduciendo las condiciones iniciales: $v(0) = 0 \Rightarrow \underline{-1 = C}$

$$\frac{v - \frac{10}{\sqrt{k}}}{v + \frac{10}{\sqrt{k}}} = -e^{-2\sqrt{k} t} \quad \Rightarrow \quad v - \frac{10}{\sqrt{k}} = -\left(v + \frac{10}{\sqrt{k}}\right) e^{-2\sqrt{k} t}$$

$$v \left(1 + e^{-2\sqrt{k} t}\right) = \frac{10}{\sqrt{k}} \left(1 - e^{-2\sqrt{k} t}\right)$$

$$v = \frac{10}{\sqrt{k}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{k} t}}{1 + e^{-2\sqrt{k} t}}$$

velocidad de caída en cualquier instante

si: $t \rightarrow \infty \quad v = \frac{10}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{k} = 20 \quad k = 20^2$

$$v(t) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-40t}}{1 + e^{-40t}} = \frac{ds}{dt} \quad \text{para obtener el espacio debemos integrar de nuevo.}$$

90 c)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-40t}}{1 + e^{-40t}}$$

$$ds = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-40t}}{1 + e^{-40t}} dt \quad \Rightarrow \quad 2s = \int \frac{1 - e^{-40t}}{1 + e^{-40t}} dt$$

~~1/2~~

$$\boxed{e^{-40t} = u} \quad -40 e^{-40t} dt = du \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{40 e^{-40t}} du = -\frac{1}{40u} du$$

$$2s = \int \frac{1-u}{1+u} \cdot \frac{-1}{40u} du \Rightarrow \boxed{-80s = \int \frac{1-u}{u(1+u)} du}$$

~~1/2~~

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} = \frac{1-u}{u(1+u)} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A(1+u) + Bu &= 1-u & \boxed{A=1} \\ A+B &= -1 & \boxed{B=-2} \end{aligned} \right\} \text{integrando.}$$

$$\Rightarrow -80s = \ln u - 2 \ln(1+u) + C.$$

$$-80s = \ln e^{-40t} - 2 \ln(1 + e^{-40t}) + C$$

$$s = -\frac{1}{80} \cdot (-40t) + \frac{1}{40} \ln(1 + e^{-40t}) + C.$$

$$s = +\frac{1}{2}t + \frac{1}{40} \ln(1 + e^{-40t}) + C \quad \text{introducción condicional inicial.}$$

$$s(0) = 3000m. \quad 3000 = \frac{1}{40} \ln(1 + e^0) + C$$

$$3000 = \frac{1}{40} \ln 2 + C$$

$$C = 3000 - \frac{1}{40} \ln 2$$

$$s = \frac{1}{2}t + \frac{1}{40} \ln(1 + e^{-40t}) + \left(3000 - \frac{1}{40} \ln 2\right)$$

SEGUNDA PARTE

A.- Demuestre el teorema del valor medio para integrales:

“Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, existe un número $c \in (a, b)$ para el cual $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ”.

SOLUCIÓN en:

CÁLCULO tomo I, Smith y Minton, página 388

Demostración

Sea f cualquier función continua definida sobre $[a, b]$. El teorema del valor extremo establece que, al ser continua, la función alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M sobre $[a, b]$,

existiendo $\begin{cases} x_1 \in [a, b] / f(x_1) = m \\ x_2 \in [a, b] / f(x_2) = M \end{cases}$. Se deduce que:

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

y, en consecuencia, por las propiedades de la integración definida,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Como m y M son constantes, se obtiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Finalmente, dividiendo por $(b-a) > 0$, se obtiene

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Como la función f es continua en $[a, b]$, lo es en el intervalo $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, para $x_2 > x_1$ (o bien $[x_2, x_1] \subseteq [a, b]$, para $x_1 > x_2$). Por el teorema del valor intermedio, debe haber algún $c \in (a, b)$ para el cual

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$

como queríamos demostrar.



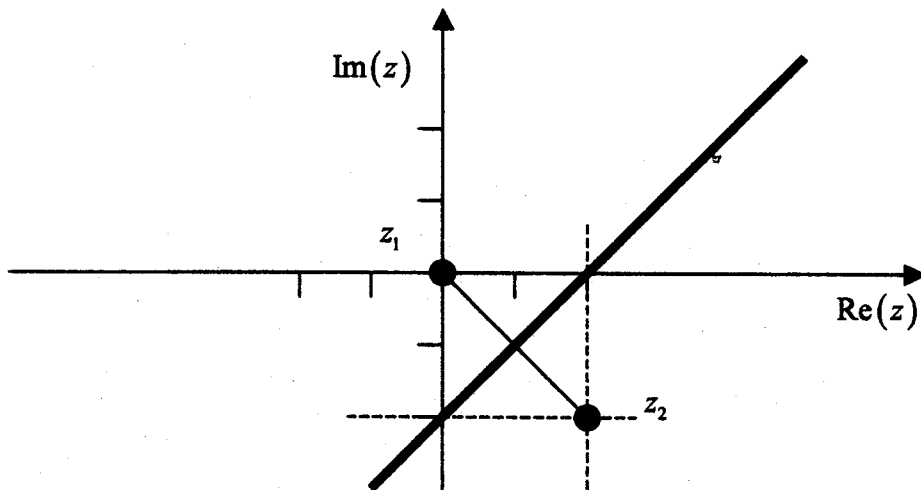
B.- Identifique razonadamente y represente en el plano complejo la curva

$$C = \{z \in \mathbb{C} / |z - 2 + 2i| = |z|\}$$

SOLUCION

Teniendo en cuenta que el módulo de un número complejo z se puede interpretar como la distancia del complejo al origen, y el módulo de la diferencia de dos complejos es la distancia entre ambos se tiene que $|z - 2 + 2i| = |z|$ son los puntos que están a igual distancia del origen $z_1 = 0$ y del punto $z_2 = 2 - 2i$.

La curva pedida es la mediatriz del segmento que une los puntos z_1 y z_2 . Expresada en coordenadas cartesianas, siendo $z = x + iy$, la curva es: $y = x - 2$.



C.- Calcule y represente en el plano complejo $z = \sqrt[6]{1}$, expresando la solución en forma binómica.

SOLUCIÓN

Expresado en forma exponencial se tiene $z = \sqrt[6]{e^{2k\pi i}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Las seis raíces son $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{6}} = e^{\frac{k\pi i}{3}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

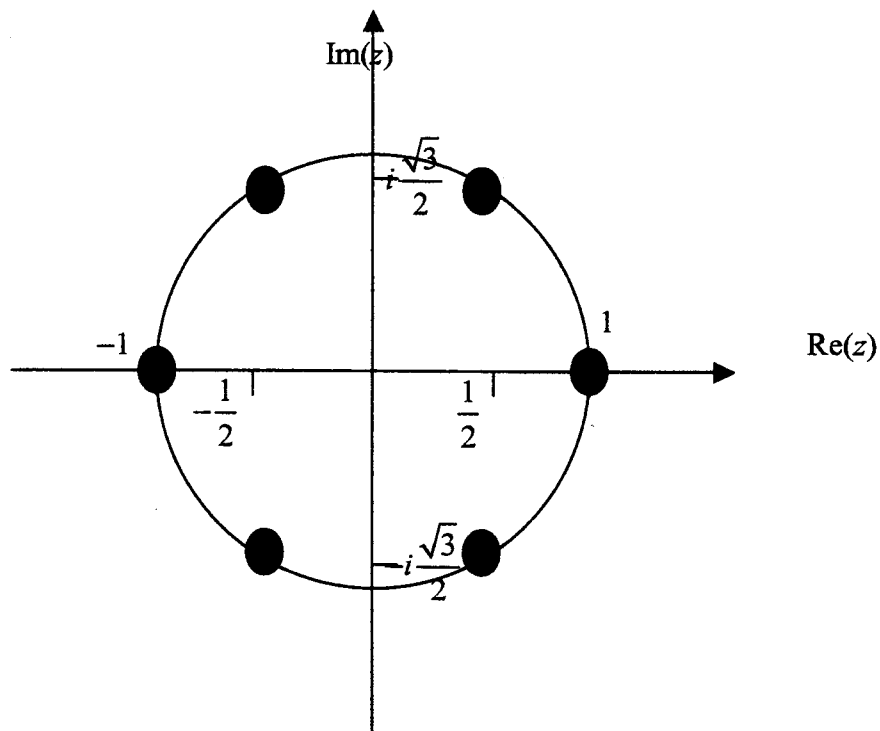
$$\begin{aligned} z_0 &= 1 & z_2 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} & z_4 &= e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ z_1 &= e^{\frac{\pi i}{3}} & z_3 &= e^{\pi i} = -1 & z_5 &= e^{\frac{5\pi i}{3}} \end{aligned}$$

En forma binómica las raíces se calculan imponiendo $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 & z_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_3 &= -1 & z_5 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Estas raíces se corresponden con los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen de radio unidad.

Representando los segmentos anteriores se obtiene:

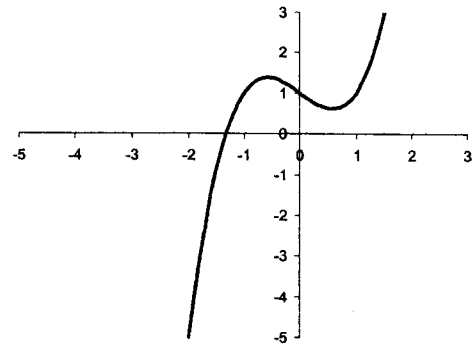


D.- Sea la función $f(x) = x^3 - x + 1$. Se pide aproximar numéricamente la solución de la ecuación $f(x) = 0$ aplicando los métodos siguientes:

- Método de punto fijo, con un punto inicial $x_0 = -1$.
- Realice 2 iteraciones con un punto inicial $x_0 = -1$, del método de Newton-Raphson.
- Realice 2 iteraciones con intervalo inicial $[-2, 0]$, del método de bisección. $x_0 = -1$, del método de Newton-Raphson.

SOLUCIÓN

La función $f(x)$ puede representarse fácilmente, al ser un polinomio, de forma aproximada, como se aprecia en la gráfica de la derecha.

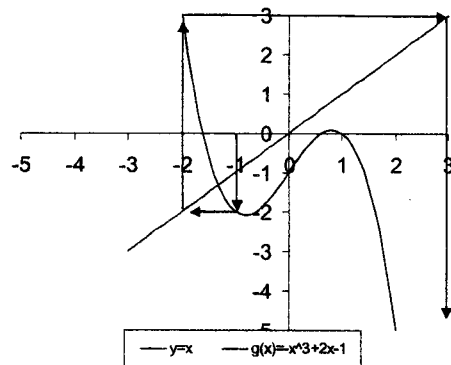


a) El método de punto fijo se basa en realizar iteraciones en la forma $x_{n+1} = g(x_n)$, donde la función g puede obtenerse, por ejemplo, en la forma $g(x) = x - f(x)$. Si se resuelve $x = g(x)$, entonces se tiene $f(x) = 0$.

Tomando $g(x) = -x^3 + 2x - 1$, se plantea la iteración $x_{n+1} = -x_n^3 + 2x_n - 1$.

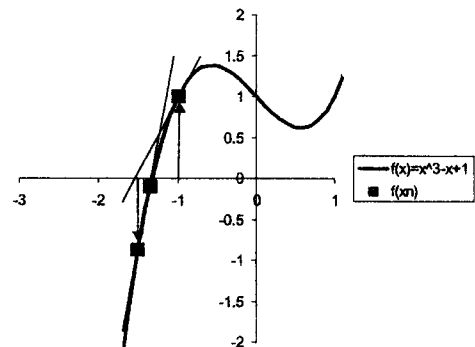
Iteración	x_n	$x_{n+1} = -x_n^3 + 2x_n - 1$
0	-1	-2
1	-2	-5
2	-5	-119
3	-119	...

El proceso iterativo diverge. Si se calcula $g'(x) = -3x^2 + 2$, se comprueba que no cumple la condición de $|g'(x)| < 1$.



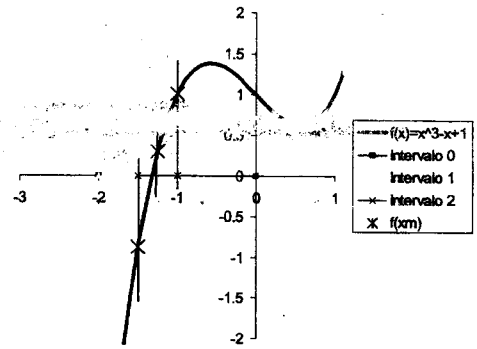
b) El método de Newton-Raphson se basa en realizar iteraciones en la forma $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. En este caso $f'(x) = 3x^2 - 1$

Iteraciones	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	1	2	-3/2
1	-3/2	-7/8	23/4	-31/23
2	-31/23



c) El método de bisección se basa en definir una sucesión de intervalos encajados $[x_1^n, x_2^n]$ donde en cada iteración se sustituye uno de los extremos, en función del signo, por el punto medio del intervalo en

la iteración anterior:
$$x_m^{n-1} = \frac{x_2^{n-1} - x_1^{n-1}}{2}.$$



Iteraciones						
n	x_1	x_2	x_m	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_m)$
0	-2	0	-1	-5	1	1
1	-2	-1	- 3/2	-5	1	- 7/8
2	- 3/2	-1	- 5/4	- 7/8	1	19/64

Solución - 5/4