ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

7 de febrero de 2004

Tiempo: 2 hora 45 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 19 de febrero de 2004.
Fecha revisión: 20 febrero de 2004.

PROBLEMA 1. Calcula el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3_{\frac{\pi}{3}} & -\sqrt{3}+i \\ e^{i\frac{\pi}{6}} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i \end{pmatrix}$, dando el resultado en forma binómica.

PROBLEMA 2. Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$:

a) Un rectángulo tiene su base sobre el eje OX y dos vértices sobre la función dada. Demuestra que dicho rectángulo tiene la máxima área cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la función.

b) Calcula el volumen generado cuando el área encerrada por la curva y los semiejes coordenados de orientación positiva gira alrededor del eje OY.

PROBLEMA 3.

Sea C la lemniscata de ecuación $\quad (x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2) = 0$

a) Calcula la pendiente en cada punto de la curva. Calcula los puntos de C situados en el primer cuadrante con tangente horizontal.

b) Deduce la ecuación $r = f(\theta)$ en coordenadas polares de C. Demuestra que C es simétrica respecto del eje polar y respecto de la recta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Desde la ecuación en polares. Calcula los puntos de C situados en el primer cuadrante con tangente horizontal. ¿Son los mismos que en el apartado a)?

d) Calcula el área interior de C.

PROBLEMA 4. Resolver $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2y+\cos^2 y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

PROBLEMA 5.

Demuestra que la longitud de arco de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada exactamente por la integral definida $s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2,75 ptos. Problema 3: 3,25 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos.

PROBLEMA 1. Calcula el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3_{\frac{\pi}{3}} & -\sqrt{3}+i \\ e^{i\frac{\pi}{6}} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix}$, dando el resultado en forma binómica.

SOLUCIÓN.

Expresamos todos los complejos en forma exponencial, para realizar los productos:

$$3_{\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad -\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

Operando:

$$\det\begin{pmatrix} 3e^{i\frac{\pi}{3}} & 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ e^{i\frac{\pi}{6}} & 3e^{-i\frac{5\pi}{6}} \end{pmatrix} = \left(3e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right) - \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = 9e^{-i\frac{\pi}{2}} - 2e^{i\pi} = 2-9i$$

$f(x) = e^{-x^2}$

Características de la función

$f(-x) = e^{-x^2} = f(x) \rightarrow$ función par (simétrica respecto OY)

- Continua y derivable.

- Asíntota: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$.

- Extremos: $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ $\begin{cases} x > 0 \rightarrow f'(x) < 0, \ f(x) \text{ decrece.} \\ x < 0 \rightarrow f'(x) > 0, \ f(x) \text{ crece.} \end{cases}$

en $x = 0$ posee un máximo

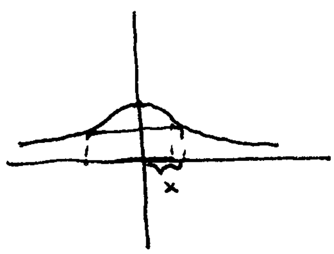
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f''(x) < 0$ convexa

$x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$; $f''(x) > 0$ cóncava.

posee puntos de inflexión en $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

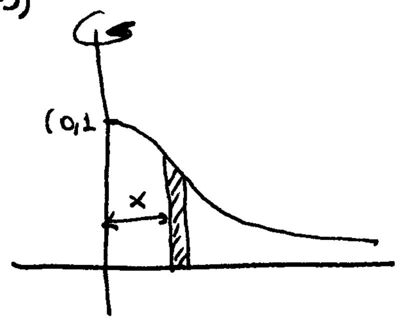


Por ser la función par: $A = 2x e^{-x^2}$

$A'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$; $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

por tanto el área máxima $A = \left|2x e^{-x^2}\right| = \sqrt{2}\, e^{-1/2}\ u^2$.

b)



volumen por tubos:

$$V = 2\pi \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = 2\pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{-x^2}\,dx$$

$$= -\pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b -2x e^{-x^2}\,dx = -\pi \lim_{b\to\infty} \left[e^{-x^2}\right]_0^b$$

$$= -\pi \left[\cancelto{0}{\lim_{b\to 0} e^{-b^2}} - 1 \right] = \pi \ u^3$$

PROBLEMA 3

(a) DERIVANDO IMPLICITAMENTE

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') - 8x + 8yy' = 0$$

DESPEJANDO: $$y' = -\frac{x^3+xy^2-2x}{x^2y+y^3+2y} \qquad (1)$$

LOS PTOS. DE TANGENTE HORIZONTAL SON LOS PUNTOS QUE VERIFIQUEN $y'=0$ $\Rightarrow$ SON LOS PTOS. DE C QUE VERIFIQUEN $x(x^2+y^2-2)=0$

PARA $x=0$ $\Rightarrow$ SUSTITUYENDO EN C $y^4+y^2 = y^2(y^2+1)=0$

SERÍA EL PTO. $(0,0)$ PERO HACE CERO EL DENOMINADOR DE (1), LUEGO NO SERÍA TANGENTE HORIZONTAL

PARA $$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2=0 \\ (x^2+y^2)^2-4(x^2-y^2)=0 \end{array}\right| \quad x=\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad y=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(YA ELEGIDOS LOS DEL 1º CUADRANTE

(b) HACIENDO $\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \end{array}$ EN C

$$(R^2)^2 - 4(R^2\cos^2\theta - R^2\,\text{sen}^2\theta) = 0$$

$$R^2 = 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 4\cos 2\theta$$

$$R^2 = 4\cos 2\theta$$

ECUACIÓN DE LA LEMNISCATA EN COOR POLARES

- SIMÉTRICA RESPECTO DEL EJE POLAR: $f(\theta) = f(-\theta)$

$$f(\theta) = \sqrt{4\cos(2\theta)} = \sqrt{4\cos(2(-\theta))} = f(-\theta)$$

- SIMÉTRICA RESPECTO DE LA RECTA $\theta = \frac{\pi}{2}$: $f(\theta) = f(\pi-\theta)$

$$f(\pi-\theta) = \sqrt{4\cos(2(\pi-\theta))} = \sqrt{4\cos(2\pi-2\theta)} = \sqrt{4\cos(-2\theta)} = \underbrace{\sqrt{4\cos 2\theta}}_{f(\theta)}$$

c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4\cos 2\theta}\cos\theta + \dfrac{(-4\,\text{sen}\,2\theta)}{\sqrt{4\cos 2\theta}}\cdot\text{sen}\,\theta}{-\sqrt{4\cos 2\theta}\,\text{sen}\,\theta + \dfrac{(-4\,\text{sen}\,2\theta)}{\sqrt{4\cos 2\theta}}\cos\theta} =$$

$$= \frac{\cos 2\theta\cos\theta - \text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta}{-\cos 2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta\cos\theta} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \implies \cos 2\theta\cos\theta - \text{sen}\,2\theta\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\cos\theta = 2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\cos^2\theta = 3\,\text{sen}^2\theta$$

$$\text{Tg}^2\,\theta = \frac{1}{3} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$R = \sqrt{4\cos 2\tfrac{\pi}{6}} \implies R = \sqrt{2}$$

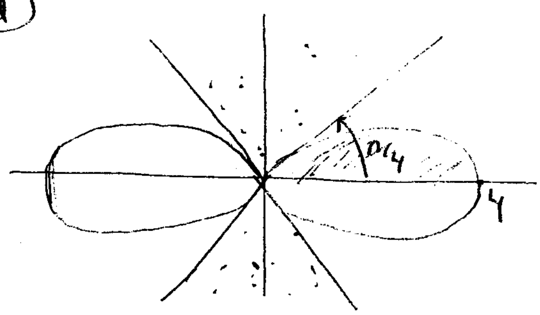
(VALOR QUE NO ANULA EL DENOMINADOR DE (2)

QUE ES EL MISMO PUNTO QUE EN EL APARTADO a

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d



EN EL 1er CUADRANTE:

$R = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4}$

LA LEMNISCATA NO EXISTE PARA VALORES $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

QUE HACEN NEGATIVO $\cos 2\theta$

POR LAS SIMETRÍAS VISTAS EN EL APARTADO b) LO MISMO PASA EN EL RESTO DE LOS CUADRANTES

LUEGO $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{4\cos 2\theta}\right)^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta \, d\theta =$

$$= 4 \left[\operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{\pi/4} = 4 \, u^2.$$

4

$$y' = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2y+\cos^2 y} \quad \text{— E.D. Variables separadas}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2y+\cos^2 y} \quad ; \quad (2y+\cos^2 y)\,dy = \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Integrando: *) $\displaystyle\int (2y+\cos^2 y)\,dy = y^2 + \int \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy =$

$$= y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y + C_1$$

**) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\substack{x=2\operatorname{sen}t \\ dx = 2\cos t\,dt}}{=} \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\;.\,2\cos t\,dt =$

$$= \int 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\;.\,2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = 2t + \operatorname{sen} 2t + C_2 \underset{\frac{x}{2} = \operatorname{sen} t}{=} 2\arcsen\frac{x}{2} +$$

$$+ \cancel{2}\,\frac{x}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C = 2\arcsen\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$$

Solución E.D: $\quad y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y = 2\arcsen\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C.$

Con la condición: $y(2)=0 \Rightarrow$

$$0 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 0 = 2\arcsen 1 + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4-4}}_{=0} + C$$

$$0 = 2\cdot\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow \boxed{C = -\pi}$$

Solución pedida: $\quad \boxed{y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2y = 2\arcsen\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} - \pi.}$

PROBLEMA 5.

Demuestra que la longitud de arco de $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ viene dada exactamente por la integral definida $s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

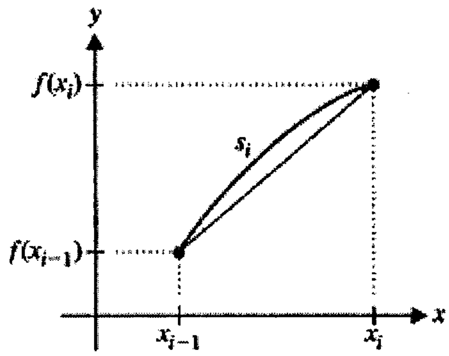
SOLUCIÓN.

Suponemos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Realizamos una **partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos** de igual longitud:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\text{, donde } x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = x_0 + i\Delta x$$

para $i = 1,2,\ldots,n$.



Entre cada par de puntos consecutivos de la curva, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, **aproximamos la longitud de arco s_i por la distancia recta** entre dos puntos.

$$s_i \cong \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Como f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) también es continua en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y derivable en (x_i, x_{i-1}). **Por el teorema de Lagrange del valor medio** existe algún $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$.

Introduciendo este resultado en la aproximación se tiene:

$$s_i \cong \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

$$s_i \cong \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

Sumando las longitudes de los n segmentos rectos, se obtiene como aproximación de la longitud de arco:

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

Al tomar el límite $n \to \infty$, se tiene $\Delta x \to 0$ y $c_i \to x_i$, resultando:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(x_i)]^2}\,\Delta x$$

El límite se corresponde con el de una suma de Riemann para la función $1+[f'(x)]^2$, en el intervalo $[a,b]$, **así que, siempre que el límite exista, la longitud de arco viene dada exactamente por una integral definida:**

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$