ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

24 de Junio de 2004

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 29 de junio de 2004.
Fecha revisión: 30 de junio de 2004.

PROBLEMA 1.

Utilizar la fórmula de De Moivre para obtener una expresión del $\cos 3\theta$ en términos de potencias de $\cos\theta$.

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$, estudiar el crecimiento de $f(x)$ y de $f'(x)$ $\forall x > 1$.

PROBLEMA 3.

Calcular mediante integración, el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor del eje $y = -1$, el área interior a la circunferencia de centro (0,3) y radio 1.

PROBLEMA 4.

a) Representar razonadamente la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$.

b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

PROBLEMA 5.

Resolver: $\begin{cases} xy' = y + x^3 \operatorname{sen} x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

PROBLEMA 6.

Demostrar el siguiente teorema:

si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

Problemas 1: 1 pto. Problemas 2: 1,5 ptos. Problemas 3: 2 ptos. Problemas 4: 2,5 ptos.

Problemas 5: 1,5 ptos. Problemas 6: 1,5 ptos.

Problema 1

Fórmula de Moivre: $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, i + 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\, i^2 + i^3\,\mathrm{sen}^3\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + i\,(3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta)$$

Por otro lado $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$

Por tanto:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$$

$$\boxed{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$$

Problema 2

$$f(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

$g(t) = \dfrac{e^{-t^2}}{t^2}$ es una función continua $\forall t \neq 0$.

$h(x) = x^2$ es una función con 1ª derivada continua

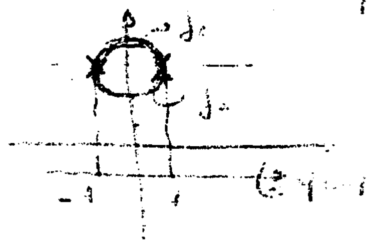
Entonces se puede aplicar el teorema Fundamental del cálculo, y por tanto $\exists f'(x)$ y es continua ~~en~~

$$f'(x) = \frac{e^{-(x^2)^2}}{(x^2)^2}(2x) = \frac{2e^{-x^4}}{x^3} > 0 \quad \forall x > 0. \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{-x^4}(6 + 8x^4)}{x^4} < 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f'(x) \text{ es decreciente}$$

Problema nº3

Calcular mediante integración el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje $y=-1$, el área interior a la circunferencia de centro $(0,3)$ y radio 1.



Ec. circunferencia: $x^2+(y-3)^2=1$

Volumen calculado por discos:

Sea $y_1(x)=3+\sqrt{1-x^2}$

$y_2(x)=3-\sqrt{1-x^2}$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(y_1(x)+1)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(y_2(x)+1)^2dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(3+\sqrt{1-x^2}+1\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}+1\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[4^2+8(\sqrt{1-x^2})+(1-x^2)\right]dx-\pi\int_{-1}^{1}\left[4^2-8\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\right]$$

$$\pi\int_{-1}^{1}16\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}16\sqrt{1-\sin^2t}\cdot\cos t\,dt=$$

$x=\sin t$ $\quad x=1$ $\quad \sin t=1$ $\quad t=\frac{\pi}{2}$

$dx=\cos t\,dt$ $\quad x=-1$ $\quad \sin t=-1$ $\quad t=-\frac{\pi}{2}$

$$=16\pi\cdot2\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt=16\pi\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2t}{2}=16\pi\left[t+\frac{1}{2}\sin2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=16\pi\left[\frac{\pi}{2}\right]=\underline{8\pi^2}\ u^3$$

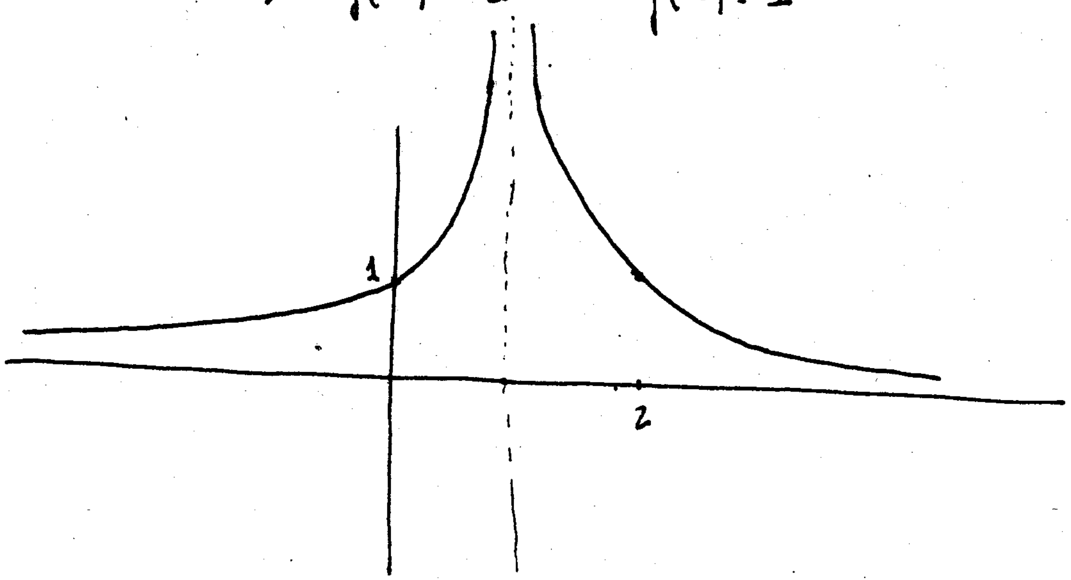
PROBLEMA 4

(a) Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-x+1}} & x < 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow$ Asíntota vertical $x = 1$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow$ Asíntota horizontal $y = 0$
- $\forall x > 1 \quad f'(x) = -\dfrac{1}{2(x-1)^{3/2}} < 0 \Rightarrow$ decreciente
- $\forall x < 1 \quad f'(x) = \dfrac{1}{2(-x+1)^{3/2}} > 0 \Rightarrow$ creciente

  (Sin extremos $f'(x) \neq 0$)
- $\forall x > 1$, $\forall x < 1 \quad f''(x) = \dfrac{3}{4(x-1)^{5/2}} > 0 \Rightarrow$ Cóncava hacia arriba
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \qquad f(2) = 1$



(5) $$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$$= \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \left[2(x-1)^{1/2}\right]_1^2 + \left[2(x-1)^{1/2}\right]_2^\infty =$$

$$= +2 + \underbrace{\lim_{x\to 1^-} (-2\sqrt{1-x})}_{=0} + 2 - \underbrace{\lim_{x\to 1^+} 2(x-1)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} 2(x-1)^{1/2}}_{=\infty} - 2$$

Las dos primeras integrales son convergentes, pero la 3ª es divergente, luego

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \quad \text{es divergente}$$

PROBLEMA 5 Resolver: $\begin{cases} xy' = y + x^3 \operatorname{sen} x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

La ecuación diferencial es una E.D.O. lineal con condiciones iniciales. Se hallará la solución general de la ecuación completa y_G como suma de la solución general de la ecuación homogénea y_H más una solución particular de la ecuación completa, y_P.

$$y_G = y_H + y_P$$

La solución particular se determinará aplicando el método de variación de las constantes.

La solución del problema de Cauchy se encontrará imponiendo las condiciones iniciales a la solución general obtenida $y_G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

- Ecuación homogénea: $xy' - y = 0$. Es de variables separadas:

$$xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|, C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_H = Cx,\ C \in \mathbb{R}}$$

- Método de variación de las constantes. $y_P = C(x)x$

  Sustituyendo en la ecuación completa:

$$x(xC' + C) - Cx = x^3 \operatorname{sen} x \Rightarrow x^2C' = x^3 \operatorname{sen} x \Rightarrow C' = x \operatorname{sen} x$$

  Integrando por partes $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \operatorname{sen} x & v = -\cos x \end{cases}$, se tiene:

$$C(x) = \int x \operatorname{sen} x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + K, K \in \mathbb{R}$$

  Eligiendo K=0, $C(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x$, con lo que:

$$\boxed{y_P = x(\operatorname{sen} x - x\cos x)}$$

- Solución general de la ecuación completa $y_G = y_H + y_P$

$$\boxed{y_G = x(C + \operatorname{sen} x - x\cos x), C \in \mathbb{R}}$$

- Solución del problema de Cauchy, imposición de las condiciones iniciales:

$$y_G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(C+1) = 0 \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

Finalmente la solución del problema es:

$$\boxed{y = x(-1 + \operatorname{sen} x - x\cos x)}$$

PROBLEMA 6

Demostrar el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es derivable en $x=a$, entonces $f(x)$ es continua en $x=a$"

SOLUCIÓN.

Para demostrar que f es continua en $x=a$ debemos probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Para ello basta considerar:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right]$$

Multiplicando y dividiendo por $(x-a)$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\lim_{x\to a}(x-a)$$

El límite del producto es el producto de los límites ya que ambos límites existen.

$$=f'(a)0=0$$

Con lo que queda demostrada la proposición.