ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

3 de Septiembre de 2004

Tiempo: 2 hora 30 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 13 de septiembre de 2004.
Fecha revisión: 14 de septiembre de 2004.

PROBLEMA 1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son las raíces del polinomio
$P(z) = z^3 - (7+4i)z^2 + (10+18i)z + (2-16i)$, sabiendo que $z = 3+2i$ es una raíz.

PROBLEMA 2.

I. Dada la función $f(x) = xe^{-2x}$, se pide:

a) Determinar los extremos absolutos, relativos y puntos de inflexión de la función, si los hubiera.

b) Representar razonadamente la función.

II. Sea la función $g(x) = \dfrac{1}{16}e^{-2x}(x+2)$. Se pide:

a) Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 3 de la función, expresando el resto en la forma de Lagrange.

b) Aproximar el valor de $g(1)$ utilizando el polinomio anterior y estimar el error cometido.

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geq 1, \quad 4x^2+y^2 \leq 4\}$

a) Dibujar la región.

b) Haciendo un cambio a coordenadas polares comprobar las simetrías de R y calcular su área.

c) Plantear las integrales que permitirían obtener el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar R en torno al eje $y = 2$.

PROBLEMA 4. Representar la familia de curvas $y^2 = 4(x-C)$. Calcular y representar las trayectorias ortogonales de dicha familia.

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema.

Sea f una función derivable en un intervalo I, se verifica:

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.

Problemas 1: 1 pto. Probl. 2: 3,5 ptos. Probl. 3: 2,5 ptos. Probl. 4: 1,5 ptos. Probl. 5: 1,5 ptos.

PROBLEMA 1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son las raíces del polinomio $P(z)=z^3-(7+4i)z^2+(10+18i)z+(2-16i)$, sabiendo que $z=3+2i$ es una raíz.

SOLUCIÓN

Como $z=3+2i$ es raíz del polinomio *P*, el polinomio es divisible por $z-(3+2i)$, siendo $C(z)=\dfrac{P(z)}{z-(3+2i)}$ un polinomio de grado 2. Las raíces del cociente $C(z)$ son también raíces del polinomio *P* y pueden obtenerse directamente.

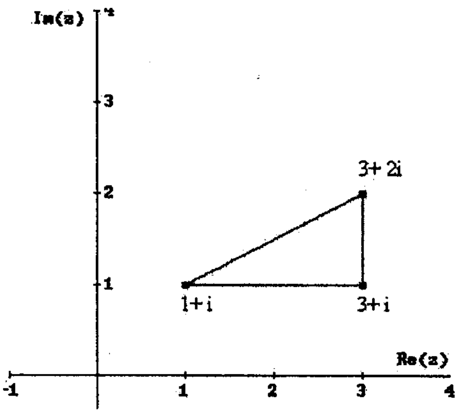
Dividiendo se tiene:

$$\begin{array}{l|l}
z^3-(7+4i)z^2+(10+18i)z+(2-16i) & z-(3+2i) \\ \cline{2-2}
-z^3+(3+2i)z^2 & z^2-(4+2i)z+(2+4i) \\ \cline{1-1}
\quad (-4-2i)z^2+(10+18i)z & \\
\quad (4+2i)z^2-(8+14i)z & \\ \cline{1-1}
\qquad (2+4i)z+(2-16i) & \\
\qquad -(2+4i)z-(2-16i) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Nota: $\begin{array}{l} (4+2i)(3+2i)=8+14i \\ (2+4i)(-3-2i)=2-16i \end{array}$

Las raíces de $C(z)=z^2-(4+2i)z+(2+4i)$ son $z_{1,2}=\dfrac{(4+2i)\pm\sqrt{(4+2i)^2-4(2+4i)}}{2}$.

Operando $z_{1,2}=\dfrac{(4+2i)\pm\sqrt{(12+16i)-(8+16i)}}{2}=\dfrac{(4+2i)\pm 2}{2}=\begin{cases}3+i\\1+i\end{cases}$



En resumen las tres raíces del polinomio son: $z_1=3+i$, $z_2=1+i$, $z_3=3+2i$, que definen un triángulo rectángulo de área:

$$A=1$$

Problema nº 2

I) $f(x) = x e^{-2x}$

a) b) f es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$. Analizamos su 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$$

$$f''(x) = 4e^{-2x}(-1+x)$$

Extremos: Por ser derivable $\forall \mathbb{R}$ sólo pueden estar en los puntos que anulen la 1ª derivada

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ " $x<\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ creciente $\Rightarrow$

$x>\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decreciente

en $x=\frac{1}{2}$ existe un valor máximo de la función: $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{e}$

En $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e})$ existe un máximo. Como a la izquierda de $x=\frac{1}{2}$ la función siempre crece y a la derecha siempre decrece el máximo será absoluto.

Si $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow$ El eje positivo de las abscisas es una asíntota.

Si $x \to -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{2x} = -\infty$

Luego efectivamente el valor $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{e}$ es máximo absoluto.

Puntos inflexión:

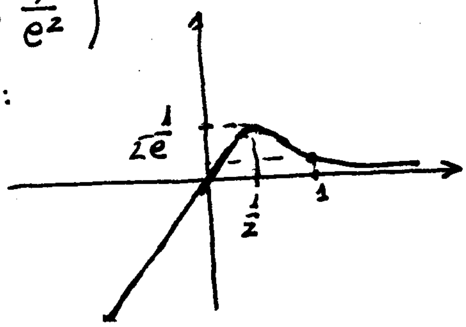
$f''(x)=0$ si $x=1$. " si $x>1$ $f''>0$ cóncava hacia abajo

si $x<1$ $f''<0$ " " arriba.

se produce en $x=1$ un cambio de concavidad $\Rightarrow$ En $x=1$ hay punto de inflexión: $P=(1, e^{-2}) = (1, \frac{1}{e^2})$

La gráfica de la función será:

[ya que el único punto de corte con el eje será $(0,0)$]



II) $g(x) = \frac{1}{16} e^{-2x} (x+2)$

El polinomio de McLaurin de grado 3: $G(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!} g''(0)x^2 + \frac{1}{3!} g'''(0) x^3$

El resto del polinomio: $R(x) = \frac{g^{IV}(z)}{4!}(x^4) = \frac{g^{IV}(z)}{4!} x^4$ donde $0 < z < x$

$g(x) = \frac{1}{16} e^{-2x}(x+2)$ $\quad \underline{g(0) = \frac{1}{8}}$

$g'(x) = \frac{1}{16}(-2x-3)e^{-2x}$ $\quad \underline{g'(0) = \frac{-3}{16}}$

$g''(x) = \frac{-2}{16} e^{-2x}(-2x-3) - \frac{2}{16} e^{-2x} = \frac{1}{4} e^{-2x}(x+1)$ $\quad g''(0) = +\frac{1}{4}$

$g'''(x) = \frac{1}{4} \cdot -2 e^{-2x}(x+1) + \frac{1}{4} e^{-2x} = \frac{1}{4} e^{-2x}(-2x-1)$ $\quad g'''(0) = -\frac{1}{4}$

$g^{IV}(x) = \frac{1}{4} \cdot -2 e^{-2x}(-2x-1) - 2\frac{1}{4} e^{-2x} = x e^{-2x}$

Polinomio de Mc Laurin de $g(x)$: $G(x) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3$

$$R(x) = \frac{z e^{-2z}}{4!} x^4$$

b) $g(1) \approx G(1) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$

Error: $\left\{ \begin{array}{l} R(1) = \frac{z e^{-2z}}{4!} \\ 0 < z < 1 \end{array} \right.$ una cota del error vendrá dada por una

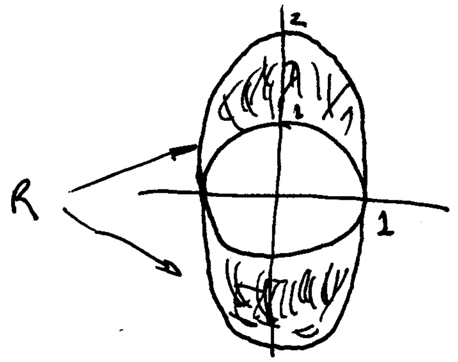
cota de la función $z e^{-2z}$ en el intervalo $(0,1)$

$$\varepsilon < \left| \frac{\mathrm{Max}(z e^{-2z})}{4!} \right| \underset{z \in (0,1)}{=} \frac{\frac{1}{2e}}{4!} = \frac{1}{4!\, e \cdot 2}$$

por el resultado de la parte I del problema

$e > 2'7 > 2'5 = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ $\varepsilon < \frac{1}{4!} \frac{2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{60 \cdot 2}$ $\quad g(1) = \frac{1}{48}$ con $\varepsilon < \frac{1}{120}$

PROBLEMA 3



circunferencia: $x^2+y^2=1 \rightarrow \rho=1$

elipse: $4x^2+y^2=4 \rightarrow \rho=\sqrt{\dfrac{4}{4\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}}$

$x^2+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

- Simétrica respecto al eje polar $\rho(\theta)=\rho(-\theta)$

$$\rho(-\theta)=\sqrt{\frac{4}{4\cos^2(-\theta)+\operatorname{sen}^2(-\theta)}}=\sqrt{\frac{4}{4\cos^2(\theta)+(-\operatorname{sen}(\theta))^2}}=\rho(\theta)$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

- Simétrica respecto a la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\rho(\theta)=\rho(\pi-\theta)$

$$\rho(\pi-\theta)=\sqrt{\frac{4}{4\cos^2(\pi-\theta)+\operatorname{sen}^2(\pi-\theta)}}=\sqrt{\frac{4}{4(-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta}}=\rho(\theta)$$

$\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\theta$

- Por las simetrías anteriores calculamos la cuarta parte del área

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{\frac{4}{4\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}}\right)^2-1^2\right)d\theta$$

Calculamos aparte la integral

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{4}{4\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{4}{4\,\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

Integral racional de
funciones trigonométricas
con exponentes pares
luego el cambio será:

$$\operatorname{tg}\theta = t \Rightarrow d\theta = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}$$

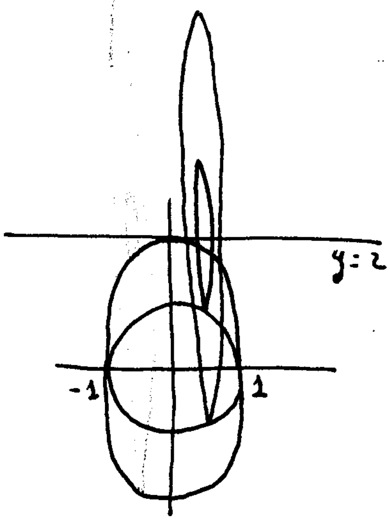
$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{4+t^2} = \int \frac{1/2}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt = \operatorname{arctg}\frac{t}{2}$$

deshaciendo el cambio: $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Area}(R) = 4\,\frac{\pi}{4} = \pi\ u^2$$

(c)



Por discos:

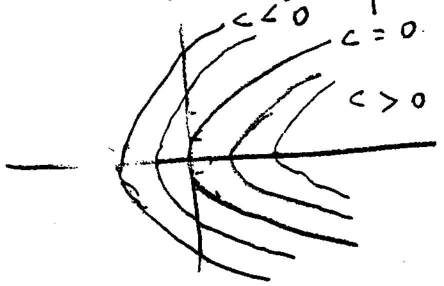
$$V = V_{ELIPSE} - V_{CIRC.}$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(\left(2 + \sqrt{4-4x^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{4-4x^2}\right)^2 \right) dx \; -$$

$$- \pi \int_{-1}^{1} \left(\left(2 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \right) dx$$

Problema 4

* Representar $y^2 = 4(x-c) \rightarrow$ familia de parábolas, de vértice $(c,0)$ y eje de simetría OX



* Pendientes de las rectas tangente a la familia de curvas:

$2yy' = 4 \quad \rightarrow y' = \frac{2}{y}$

* Pendiente de las rectas tangente del haz ortogonal a la familia dada:

$y' = -\frac{y}{2}$

* Haz ortogonal:

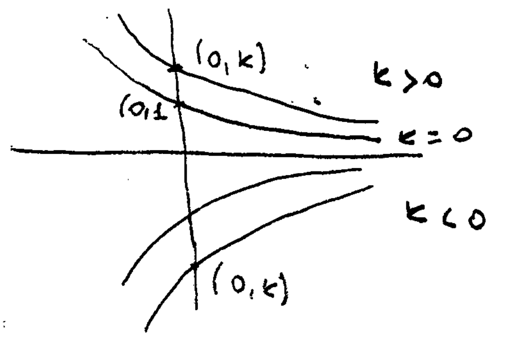
$y' = -y/2 \rightarrow$ E.D.O. de variables separable.

$\ln y = -\frac{1}{2}x + k_1 \quad \rightarrow \boxed{y = k e^{-\frac{1}{2}x} \quad k \neq 0} \rightarrow$ haz ortogonal

* Representación del haz ortogonal:

$\lim_{x\to\infty} k e^{-\frac{1}{2}x} = \begin{cases} k>0 \rightarrow \lim \rightarrow 0 \\ k<0 \rightarrow \lim \rightarrow 0 \end{cases}$; $\lim_{x\to -\infty} k e^{-\frac{1}{2}x} \begin{cases} k>0 \rightarrow \lim \rightarrow \infty \\ k<0 \rightarrow \lim \rightarrow -\infty \end{cases}$

Es continua, ox es una asíntota, no corta al eje OX, no tiene extremos y corta al eje OY en $(0,k)$ $(k\neq 0)$



PROBLEMA 5. Demostrar el siguiente teorema.
Sea *f* una función derivable en un intervalo *I*, severifica:

i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces *f* es creciente en *I*.

ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces *f* es decreciente en *I*.

SOLUCIÓN

Consideremos dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Aplicando **el teorema del valor medio de Lagrange** a *f* en el intervalo (x_1, x_2) obtenemos

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

para algún número $c \in (x_1, x_2) \subset I$.

i) Si es $f'(x) > 0, x \in I$ entonces $f'(c) > 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$ entonces se deduce que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, o sea, $f(x_2) > f(x_1)$. Al ser válido para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, *f* es creciente en *I*.

ii) Si es $f'(x) < 0, x \in I$ entonces $f'(c) < 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$ entonces se deduce que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, o sea, $f(x_2) < f(x_1)$. Al ser válido para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, *f* es decreciente en *I*.