

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
EXAMEN DE CÁLCULO I
1 de septiembre de 2005

Tiempo: 2 hora 15 minutos
Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado
No se permite el uso de calculadoras.
El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.
Fecha prevista de publicación de notas: 7 de septiembre de 2005.
Fecha revisión: 8 septiembre de 2005.

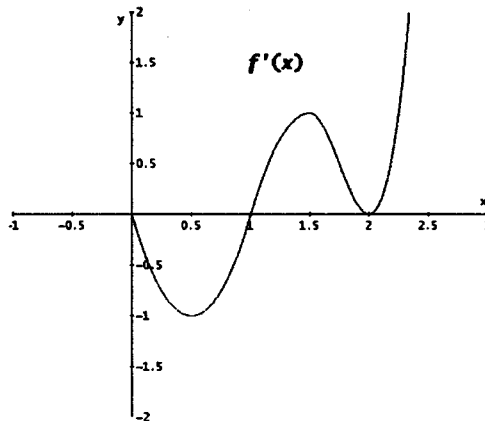
PROBLEMA 1.

Representar gráficamente los valores de z que verifican la ecuación:

$$|z - 3| = 2|z + 3|$$

PROBLEMA 2.

Sea $f(x)$ una función derivable en \mathbf{R} donde su derivada $f'(x)$ para $x \in [0, 3]$, presenta la siguiente gráfica:



- Hallar los intervalos de crecimiento, estudiar la concavidad y deducir máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x)$ para $x \in (0, 3)$.
- Trazar una posible gráfica de la función $f(x)$ para $x \in [-3, 3]$ sabiendo que es impar y que $f(0) = 0$ y $f(2) = 0$.
- Derivando implícitamente demostrar que si una función cualquiera $g(x)$ es impar entonces $g'(x)$ es par.

PROBLEMA 3.

Sea $f(x) = \sqrt{x+3}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$. Dibujar $f(x)$ y la recta tangente. Mediante una aproximación lineal estimar $\sqrt{3,98}$.

PROBLEMA 4.

Un cable con forma de catenaria $y = Chx$ con $-2m \leq x \leq 2m$ cuelga de postes de altura 3,76m.

- Obtener la longitud del cable.
- Obtener el área de la región R del plano delimitado por las siguientes curvas: $y = Chx$; $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.
- Obtener el volumen del cuerpo de revolución que resulta al girar la región R en torno al eje $x = 2$.

Nota: Tomar la siguientes aproximaciones $Ch2 \approx 3,76$; $Sh2 \approx 3,63$.

PROBLEMA 5.

Resolver:

$$\begin{cases} y - 4x = xy' \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 6.

Demostrar el Teorema fundamental del Cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Problema 1: 1 pto. Problema 2: 2 ptos. Problema 3: 1 pto. Problema 4: 3 ptos.

Problema 5: 1,5 ptos. Problema 6: 1,5 ptos.

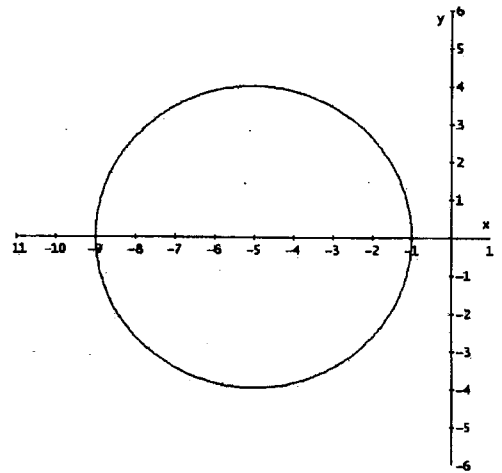
Problema 1 (1 punto)

Para encontrar la curva que representa la ecuación $|z-3|=2|z+3|$ expresamos z en forma binómica $z=x+iy$ y operamos:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + y^2] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$$

Completamos cuadrados para llegar a $(x+5)^2 + y^2 = 16$,
circunferencia de centro $(-5,0)$ y radio 4.



Problema 2 (2 puntos)

a) Los intervalos de crecimiento de la función $f(x)$ para $x \in (0,3)$ se obtienen a partir de la gráfica,

aplicando $\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente} \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente} \end{cases}$

$f(x)$ estrictamente decreciente.	$f(x)$ estrictamente creciente.
Intervalo $(0,1)$	Intervalos $(1,2)$ y $(2,3)$

• En el punto $x = 2$ la función es también estrictamente creciente, ya que en las proximidades del punto se tiene: $\exists \delta > 0 \mid x - 2 \mid < \delta \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 2, f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(2) \\ x > 2, f'(x) > 0 \Rightarrow f(2) < f(x) \end{cases}$

En resumen: $f(x)$ estrictamente decreciente en $(0,1)$ y estrictamente creciente en $(1,3)$.

La concavidad de la función se obtiene aplicando: $\begin{cases} f'(x) \text{ creciente} \Rightarrow f(x) \text{ cóncava hacia arriba} \\ f'(x) \text{ decreciente} \Rightarrow f(x) \text{ cóncava hacia abajo} \end{cases}$

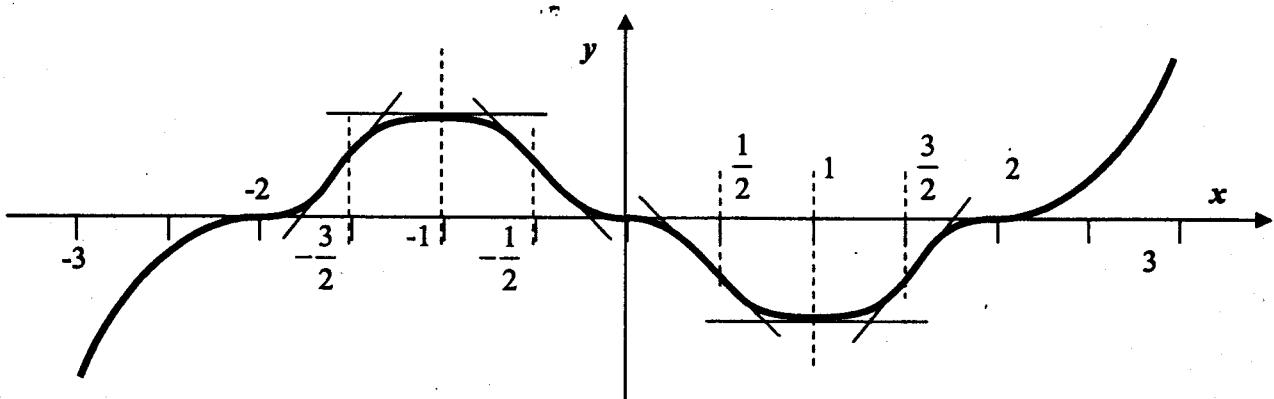
$f(x)$ cóncava hacia abajo	$f(x)$ cóncava hacia arriba.
Intervalos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	Intervalos $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $(2,3)$

Al ser derivable $f(x)$ en el intervalo $(0,3)$ la función presenta extremos relativos en los puntos donde $f'(x)$ cambia de signo. A partir de la gráfica $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en $x = 1$ ya que la función pasa de decrecer ($f'(x) < 0$) a crecer ($f'(x) > 0$).

Los puntos de inflexión de la función $f(x)$ se alcanzan en los puntos donde la función $f(x)$ cambia de concavidad, ya que $f(x)$ es derivable. Puntos de inflexión:

$x = \frac{1}{2}$, la función.	$x = \frac{3}{2}$ la función	$x = 2$, la función.
pendiente $f'(x) = -1$	pendiente $f'(x) = 1$,	tangente horizontal
pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba	pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo	pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba

b) A partir de los resultados del apartado anterior e imponiendo que $f(x)$ es impar:



c) Sea $g(x)$ una función derivable e impar. Al ser impar se cumple $g(x) = -g(-x)$, con lo que derivando la ecuación, aplicando la regla de la cadena, se tiene $g'(x) = g'(-x)$, con lo que se demuestra que la función derivada es par.

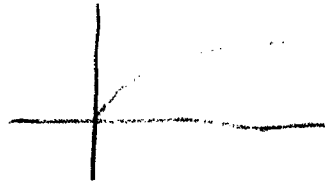
PROBLEMA 3

⊛ Ecuación de la recta tangente:

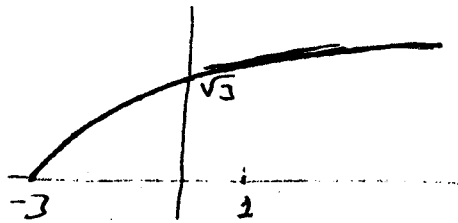
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \quad f'(1) = \frac{1}{4} \quad f(1) = 2 \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

⊛ La función \sqrt{x} tiene la gráfica:



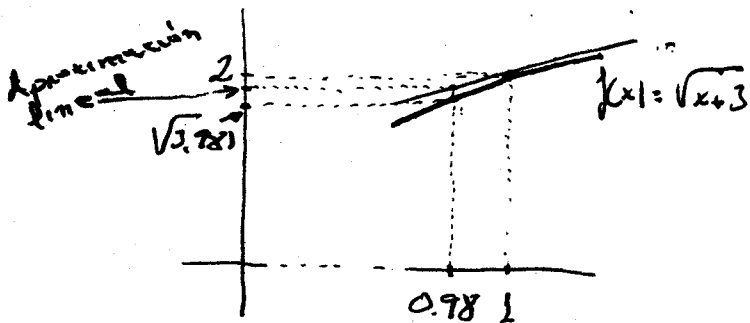
luego $\sqrt{x+3}$ será la misma desplazada 3 unidades a la izquierda



Don $f(x) = [-2, +\infty)$

⊛ Aproximación lineal de $\sqrt{3.98}$; será el valor de

la recta tangente para $x = 0.98$



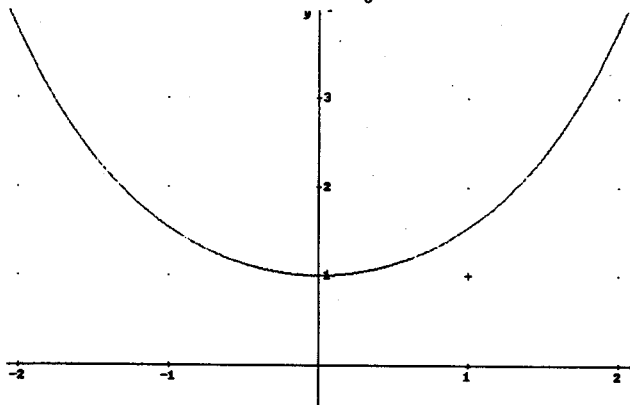
$$y = \frac{0.98}{4} + \frac{7}{4} = \underline{\underline{1.995}} \approx \sqrt{3.98}$$

Problema 4

Solución

a) La longitud de arco de la función coseno hiperbólico ya que es una

función par es: $L = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + ch^2(x)} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + sh^2(x)} dx$



Por la fórmula fundamental de las funciones hiperbólicas: $1 + sh^2(x) = ch^2(x)$ tenemos:

$$L = 2 \int_0^2 \sqrt{ch^2(x)} dx = 2 \int_0^2 chx dx = 2sh(x) \Big|_0^2 = 2(sh(2) - sh(-2)) = 2sh(2)$$

Con la aproximación indicada: $L = 2sh(2) \approx 2.3,63 = 7,26m$

b) El área delimitada por la función coseno hiperbólico entre -2 y 2 por ser simétrica respecto del eje OY es:

$$A = 2 \int_0^2 chx dx = 2sh(x) \Big|_0^2 = 2(sh(2) - sh(-2)) = 2sh(2), \text{ con la aproximación :}$$

$$A = 2sh(2) \approx 2.3,63 = 7,26m^2$$

c) El volumen de girar la región anterior en torno al eje $x=2$ la realizamos por tubos: $V = \int_{-2}^2 2\pi(2-x)ch(x)dx$, que calculamos por integración por partes:

$$V = 2\pi \int_{-2}^2 (2-x)ch(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2-x \quad du = -dx \\ dv = chx dx \quad v = shx \end{array} \right\} = 2\pi \left((2-x)sh(x) \Big|_{-2}^2 - \int_{-2}^2 sh(x) dx \right)$$

$$V = 2\pi \left(0sh(2) - 4sh(-2) - ch(x) \Big|_{-2}^2 \right) = 2\pi (-4sh(-2)) = -8\pi sh(-2)$$

Como la función seno hiperbólico es impar:

$$V = -8\pi sh(-2) = 8\pi sh(2) \approx 8.3,63\pi = 29,04\pi m^3$$

PROBLEMA 5

$$y - 4x = xy' \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = -4 \text{ EC. DIF. LINEAL DE 1º ORDEN}$$

CON EL FACTOR INTEGRANTE $\mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx}$ SE PUEDE CONVERTIR EL PRIMER MIEMBRO DE LA ECUACIÓN EN LA DERIVADA DEL PRODUCTO $\mu \cdot y$

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

EFFECTIVAMENTE MULTIPLICANDO TODA LA EC. POR $\frac{1}{x}$:

$$y' \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} = -\frac{4}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot y \right) = -\frac{4}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \int -\frac{4}{x} dx \Rightarrow \frac{y}{x} = -4 \ln x + C$$

$$\text{Sol. GENERAL: } y = x(C - 4 \ln x)$$

$$\text{como } y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1(C - 4 \ln 1) \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Sol PARTICULAR: } y = x(1 - 4 \ln x)$$

PROBLEMA 6.

Demostrar el Teorema fundamental del Cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

$F'(x)$, si existe, vendrá dado por: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

Sea Δx arbitrario / $x+\Delta x \in [a, b]$

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\Delta F = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales de funciones continuas:

$$\exists \xi \in (x, x+\Delta x) / \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)[x+\Delta x - x]$$

$$\text{entonces } \Delta F = f(\xi)\Delta x, \quad x < \xi < x+\Delta x$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi)$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow x$, entonces $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$

Como $f(x)$ es continua $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$

Por tanto $F'(x) = f(x)$