ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

1 de febrero de 2006

<u>Tiempo: 2 horas 30 minutos</u>

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de <u>publicación de notas</u>: jueves 16 de febrero de 2006

Fecha prevista de <u>revisión de exámenes</u>: lunes 20 de febrero de 2006

PROBLEMA 1.

Sea $z_0 = -8 + 8\sqrt{3}\, i$. Representar z_0 . Calcular y representar z_0^4 y $\sqrt[4]{z_0}$.

(1 punto)

PROBLEMA 2.

Dada la función $f(x) = 2(x-1)^2 e^{-(x-1)}$, se pide:

a) Calcular el polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ y de grado 3 de la función, expresando el resto en forma de Lagrange. Utilizando el polinomio anterior aproximar el valor de $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función $f(x)$, los extremos y puntos de inflexión (si los hubiera), así como las asíntotas y puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Representar la función utilizando los resultados del apartado anterior.

(3 puntos)

PROBLEMA 3.

Sea la región $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y \le x^2 \wedge y \le (x-2)^2 \wedge y \ge 0 \wedge 0 \le x \le 2\right\}$. Se pide:

a) Plantear las integrales respecto de *x* y respecto de *y* que calcularían el área de *R*. Calcular el área de la región integrando una de las anteriores.

b) Calcular la longitud del perímetro de *R*.

c) Calcular el volumen de un sólido de base *R* donde las secciones perpendiculares al eje *OY* son cuadrados con un lado situado en la base del sólido.

d) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar *R* alrededor de la recta $x = 2$.

(3 puntos)

PROBLEMA 4.

Resolver:

$$\begin{cases} (1+x^2)\, y' + 2xy = 3\sqrt{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

PROBLEMA 5.

Demostrar el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces $f(x)$ es continua en $x = a$ "

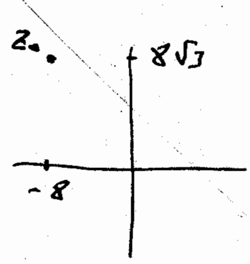
(1,5 puntos)

PROBLEMA 1

$z_0 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$ $\qquad R = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$

$\theta = \arctg \frac{8\sqrt{3}}{-8} = \arctg(-\sqrt{3}) = \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{3} \\ \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

2º CUADRANTE



$16_{\frac{2\pi}{3}} = z_0$ (FORMA MÓDULO - ARGUMENTAL)

FÓRMULA DE MOIVRE: $(R(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta))^n = R^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$

$z_0^4 = 16^4_{4\cdot\frac{2\pi}{3}} = 16^4_{\frac{8\pi}{3}} = 16^4_{\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad \left(\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

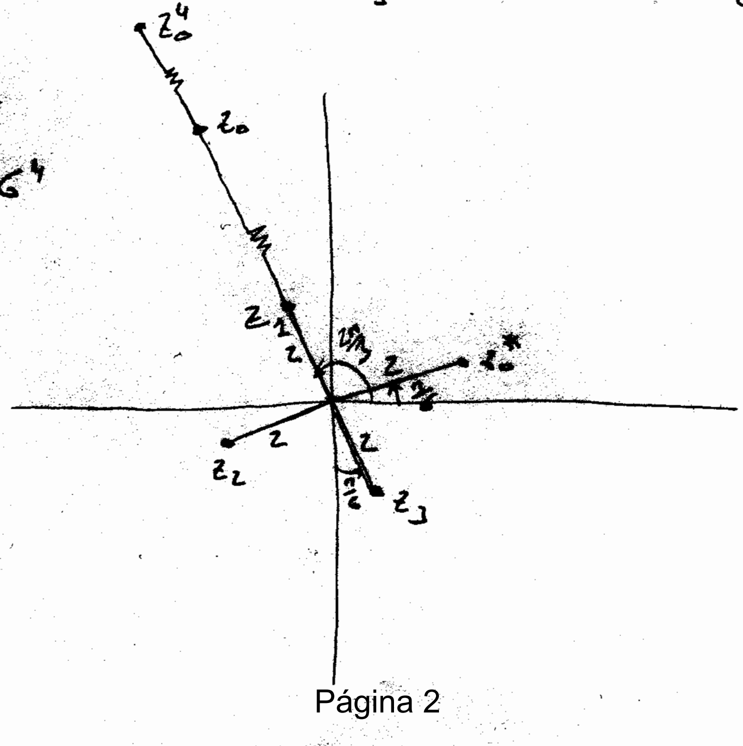
$\sqrt[4]{z_0} = \sqrt[4]{16}_{\frac{\theta + 2k\pi}{4}}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

$z_0^* = 2_{\frac{2\pi}{3}:4} = 2_{\frac{\pi}{6}}$ $\qquad z_2 = 2_{\frac{\pi}{6} + \pi} = 2_{\frac{7\pi}{6}}$

$z_1 = 2_{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad z_3 = 2_{\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}} = 2_{\frac{10\pi}{6}}$

$|z_0| = 16$

$|z_0^4| = 16^4$



PROBLEMA 2.

(3 puntos)

SOLUCIÓN

a) El polinomio de Taylor centrado en $x=1$ y de grado 3 de la función $f(x)$ tiene la forma:

$$P_3(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Se calculan las derivadas de la función necesarias:

Orden de derivación n	$f^{(n}(x)$	$f^{(n}(1)$
0	$f(x)=2(x-1)^2e^{-(x-1)}$	$f(1)=0$
1	$f'(x)=\left[4(x-1)-2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}$	$f'(1)=0$
2	$f''(x)=\left[4-8(x-1)+2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}$	$f''(1)=4$
3	$f'''(x)=\left[-12+12(x-1)-2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}$	$f'''(1)=-12$
4	$f^{(4}(x)=\left[24-16(x-1)+2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}$	

Sustituyendo se tiene:

$$P_3(x)=2(x-1)^2-2(x-1)^3$$

El resto expresado mediante la formulación de Lagrange es:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4}(z)}{4!}(x-1)^4=\frac{\left[24-16(z-1)+2(z-1)^2\right]e^{-(z-1)}}{4!}(x-1)^4;\, z\in(1,x)$$

El valor aproximado por el polinomio es:

$$f\left(\frac{4}{3}\right)\cong P_3\left(\frac{4}{3}\right)=2\left(\frac{4}{3}-1\right)^2-2\left(\frac{4}{3}-1\right)^3=\frac{4}{27}$$

b) La función es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, por tanto el crecimiento de la función se deduce del signo de la primera derivada y la función presenta extremos relativos en los puntos críticos que impliquen cambio de signo de la derivada. De forma análoga la concavidad de la función se deduce del signo de la segunda derivada, existiendo puntos de inflexión donde cambie este signo.

<u>Cortes con los ejes coordenados</u>

Cortes con el eje OX, $f(x)=0$, $f(x)=2(x-1)^2e^{-(x-1)}=0\Rightarrow\begin{cases}2(x-1)^2=0\Rightarrow x=1\\ e^{-(x-1)}\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Corte con el eje OY, $y=f(0)$, $f(0)=2(-1)^2e^{-(-1)}=2e$

<u>Asíntotas verticales</u>

Como la función es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ no presenta asíntotas verticales.

<u>Asíntotas horizontales</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2(x-1)^2e^{-(x-1)}=\infty$, no tiene asíntota horizontal $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2(x-1)^2e^{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\frac{(x-1)^2}{e^{(x-1)}}\to\frac{\infty}{\infty}$. La indeterminación se resuelve aplicando L'Hôpital 2 veces consecutivas.

$$\lim_{x\to+\infty}2\frac{(x-1)^2}{e^{(x-1)}}\overset{L'Hôpital}{\overbrace{=}}\lim_{x\to+\infty}4\frac{(x-1)}{e^{(x-1)}}\overset{L'Hôpital}{\overbrace{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{(x-1)}}=0.$$

La función tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas, ya que si $x\to\infty$ entonces $f(x)\to 0$.

Criterio de la primera derivada

Puntos críticos $f'(x)=0$

$$f'(x)=\left[4(x-1)-2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}=0\Rightarrow\begin{cases}\left[4(x-1)-2(x-1)^2\right]=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=3\end{cases}\\ e^{-(x-1)}\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Signo de $f'(x)$*, crecimiento y extremos relativos*

$$\left.\begin{array}{r}x<1\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ decrece}\\ 1<x<3\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\text{ crece}\\ 3<x\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ decrece}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\ f(1)=0\text{ mínimo relativo}\\ x=3,\ f(3)=\dfrac{8}{e^2}\text{ máximo relativo}\end{cases}$$

Criterio de la segunda derivada

Puntos candidatos a puntos de inflexión $f''(x)=0$

$$f''(x)=\left[4-8(x-1)+2(x-1)^2\right]e^{-(x-1)}=0\Rightarrow\begin{cases}4-8(x-1)+2(x-1)^2=0\\ e^{-(x-1)}\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

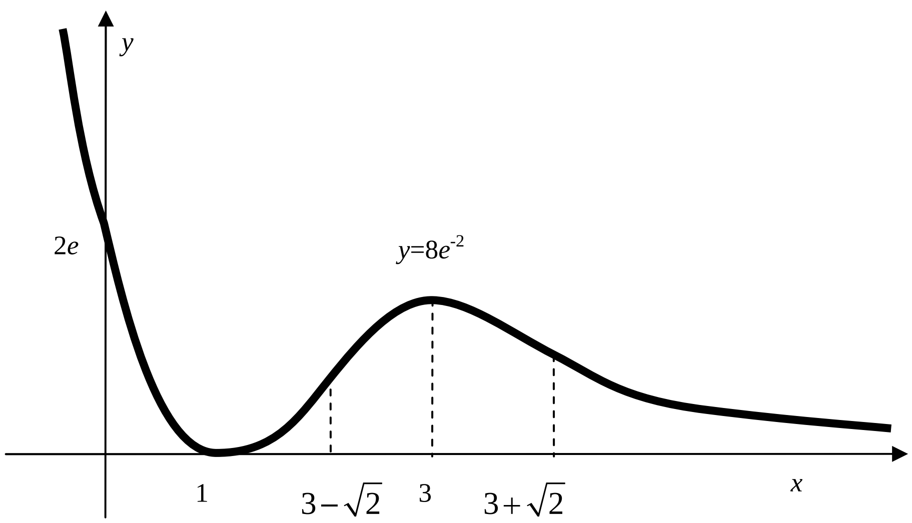
$$f''(x)=0\Leftrightarrow 4-8(x-1)+2(x-1)^2=0\Rightarrow(x-1)=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=3-\sqrt{2}\\x=3+\sqrt{2}\end{cases}$$

Signo de $f''(x)$*, concavidad y puntos de inflexión*

Aplicamos la factorización del polinomio por comodidad $f''(x)=2\left[x-\left(3-\sqrt{2}\right)\right]\left[x-\left(3+\sqrt{2}\right)\right]e^{-(x-1)}$.

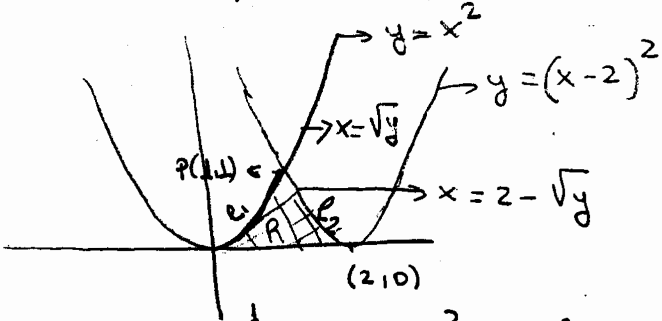
$$\left.\begin{array}{r}x<3-\sqrt{2}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f(x)\text{ cóncava hacia arriba}\\ 3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ cóncava hacia abajo}\\ 3+\sqrt{2}<x\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f(x)\text{ cóncava hacia arriba}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{ puntos de inflexión }\begin{cases}f\left(3-\sqrt{2}\right)=\dfrac{4\left(3-2\sqrt{2}\right)}{e^{2-\sqrt{2}}}\\ f\left(3+\sqrt{2}\right)=\dfrac{4\left(3+2\sqrt{2}\right)}{e^{2+\sqrt{2}}}\end{cases}$$

c) Representación gráfica aproximada de la función



problema 3

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2 \wedge y \leq (x-2)^2 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 2$$



$y = x^2 \rightarrow$ parábola $V(0,0)$, eje OY

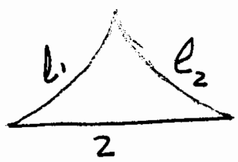
$y=(x-2)^2 \rightarrow$ parábola $V(2,0)$, eje $\parallel$ a OY $(x=2)$

punto de corte entre parábolas $\left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=(x-2)^2 \end{array}\right\} \; x=1,\; y=1$

a) $\ast$ $A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x-2)^2\,dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left.\dfrac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 = \dfrac{2}{3}\,u^2$ //

$\ast$ $A = \int_0^1 \left[(2-\sqrt{y})-\sqrt{y}\right]dy = \left[2y - \dfrac{4y}{3}\sqrt{y}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}\,u^2$ //

b) $P = 2 + \ell_1 + \ell_2 = 2 + 2\ell_1$



$$\ell_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$\ell_1 = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx \underset{\text{cambio}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} ch^2 t\,dt =$$

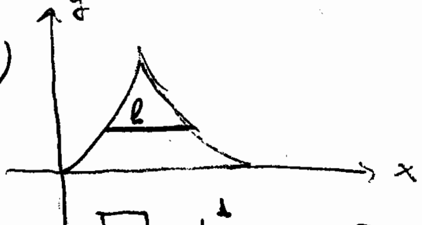
cambio $\left\{\begin{array}{l} 2x = sh\,t \\ dx = \frac{1}{2} ch\,t \end{array}\right. \quad \left\|\begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=\operatorname{argsh} 2 \end{array}\right.$

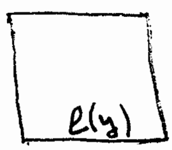
$$\ell_1 = \frac{1}{8}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} \left[e^{4t}+e^{-4t}+2\right]dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}e^{4t} - \frac{e^{-4t}}{4} + 2t\right]_0^{\operatorname{argsh} 2} =$$

$$= \left[\frac{1}{16}\,sh\,2t + \frac{1}{4}t\right]_0^{\operatorname{argsh} 2} = \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \left[\frac{1}{8}\,sh\,t\sqrt{1+sh^2 t}\right]_0^{\operatorname{argsh} 2}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \frac{1}{4}\sqrt{5} \quad ; \quad \boxed{P = 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{e^2-e^{-2}}{2} + \sqrt{5}\right]\,u}$$

c)





$\ell(y) = (2-\sqrt{y}) - \sqrt{y} = 2(1-\sqrt{y})$

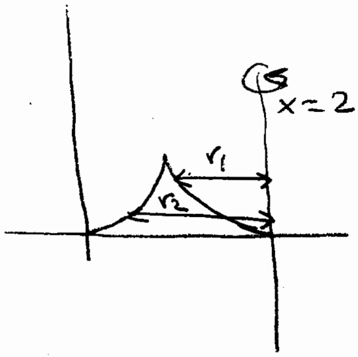
$A(y) = 4\,(1-\sqrt{y})^2$

$V = \int_{y_1}^{y_2} A(y)\,dy$

$$\boxed{V} = \int_0^1 4(1-\sqrt{y})^2\,dy = \boxed{\frac{2}{3}u^3}$$

continuación problema 3

d)

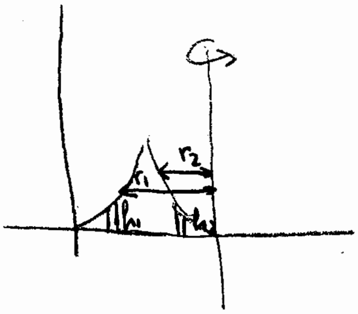


* Por discos: $V = \pi \left[\int_0^1 r_2^2\, dy - \int_0^1 r_1^2\, dy \right]$

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2-\sqrt{y})^2 - (2-(2-\sqrt{y}))^2 \right] dy$$

$$V = \pi \cdot 4 \cdot \int_0^1 (1-\sqrt{y})\, dy = \frac{4}{3}\pi\ u^3$$

* Por tubos



$$V = 2\pi \left[\int_0^1 h_1(x)\, r_1(x)\, dx + \int_1^2 h_2(x)\, r_2(x)\, dx \right]$$

$$V = 2\pi \left[\int_0^1 x^2 (2-x)\, dx + \int_1^2 (x-2)^2 (2-x)\, dx \right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi\ u^3$$

PROBLEMA 4

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{3\sqrt{x}}{1+x^2}$$ ec. dif. lineal $y' + P(x)y = Q(x)$ con $P(x)$ y $Q(x)$ continuas

calculamos el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$

luego $\frac{d}{dx}(y \cdot \mu) = \frac{3\sqrt{x}}{\cancel{1+x^2}} \cdot \cancel{(1+x^2)}$

$$y(1+x^2) = \int 3\sqrt{x}\, dx + C = 2x^{3/2} + C$$

$$y = \frac{2x^{3/2} + C}{1+x^2}$$ solución general

Condición inicial $y(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2 \cdot 0 + C}{1+0} \Rightarrow C = 2$

$$y = \frac{2x^{3/2} + 2}{1+x^2}$$ solución particular

Problema 5

Si f es derivable en x=a entonces f en continua en x=a

Demostración.

¿f es continua en x=a? $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *?* $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=0$?

Si f es derivable en x=a entonces debe ***existir*** *el límite* $\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a} = f'(a)$

Entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)$$

Como ***existen*** *los límites:*

$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a} = f'(a)$ *y* $\lim_{x\to a}(x-a)=0$ *entonces el límite de un producto es el producto de los límites:*

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)$$

Luego

$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = f'(a).0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ *f es continua en x=a.*