

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA  
**EXAMEN DE CÁLCULO I**  
1 de septiembre de 2006

***Tiempo: 2 horas 30 minutos***

**Los problemas deben entregarse separados.**

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: martes 12 de septiembre de 2006

Fecha prevista de revisión de exámenes: martes 19 de septiembre de 2006

**Si se desea revisión de examen, ésta deberá solicitarse señalándolo en la lista dispuesta en el despacho 405 UNA VEZ PUBLICADAS LAS NOTAS.**

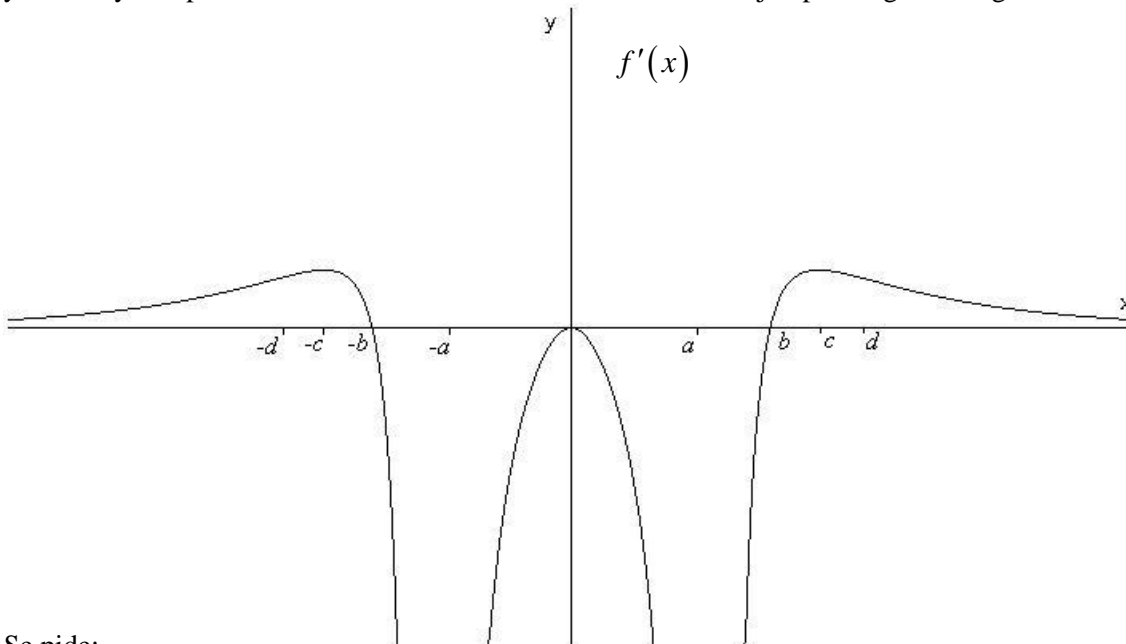
**PROBLEMA 1.**

Dado el polinomio  $P(z) = 2z^4 - 2z^3 - 2z^2 - 2z - 4$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , se pide representar el polígono cuyos vértices son las raíces del polinomio, sabiendo que  $z = \pm i$  son raíces del mismo. Calcular el **perímetro** del polígono obtenido.

**(1 punto)**

**PROBLEMA 2.**

La derivada  $f'(x)$  de una cierta función continua  $f(x)$  tiene una gráfica que es simétrica respecto del eje de ordenadas, con asíntotas verticales en  $x = \pm a$ , máximos relativos en  $x = \pm c$  y  $x = 0$ , y con puntos de inflexión en  $x = \pm d$ . Tómese, como ejemplo, la gráfica siguiente:



Se pide:

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x)$ . ¿En qué puntos la función  $f(x)$  alcanza extremos relativos? ¿De qué tipo son?
- Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función  $f(x)$ .
- Dibujar una posible gráfica de  $f(x)$  sabiendo que es continua.
- Dibujar una posible gráfica de la función  $f''(x)$ .

**(3 puntos)**

**PROBLEMA 3.**

Dada la región  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq |x^2 - 1|\}$ , se pide:

- Calcular el área de  $R$ .
- Calcular el volumen de revolución obtenido al girar  $R$  alrededor de la recta  $x = 2$ .

**(1,5 puntos)**

**PROBLEMA 4.**

$$\text{Sean } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ 3-x & 2 < x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases} \text{ y } g(x) = \int_0^x f(t) dt. \text{ Se pide}$$

- Representar  $f(x)$ . Encontrar una expresión para  $g(x)$  análoga a la de  $f(x)$ .
- Determinar la continuidad y derivabilidad de la función  $g(x)$ .

**(1,5 puntos)****PROBLEMA 5.**

Dada la ecuación diferencial  $y' = 0.005y - 0.0005y^2$ , se pide:

- Hallar la solución general de la ecuación diferencial, expresándola en forma explícita  $y = y(x; C), C \in \mathbb{R}$ .

- Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que verifica  $y(20) = \frac{100}{1-e}$ .

**(1,5 puntos)****PROBLEMA 6.**

Demostrar el teorema del valor medio o de los incrementos finitos:

“Si  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe un

$$c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ,”}$$

**(1,5 puntos)**

---

## PROBLEMA 1

Al ser  $z = \pm i$  las raíces de  $P(z)$

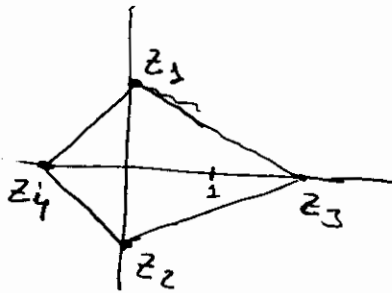
$$P(z) = (z-i)(z+i)(az^2 + bz + c) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^4 + bz^3 + (d+az^2 + bz + d)$$

$$\text{luego } \left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -2 \\ d + a = -2 \\ b = -2 \\ d = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(z) = (z^2 + 1)(2z^2 - 2z - 4)$$

$$2z^2 - 2z - 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$$

luego las 4 raíces de  $P(z)$  son  $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2, z_4 = -1$



$$\text{Perímetro} = 2(\sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{1^2 + 1^2}) = 2(\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

## PROBLEMA 2

Para resolver el problema se tiene en cuenta:

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente ;  $f'(x)$  es creciente  $\Rightarrow f(x)$  es cóncava hacia arriba

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  es decreciente ;  $f'(x)$  es decreciente  $\Rightarrow f(x)$  es cóncava hacia abajo

**Extremos relativos:** se alcanzan en los puntos de cambio de crecimiento de la función, por ser continua.

**Puntos de inflexión:** se alcanzan en los puntos de cambio de concavidad si existe recta tangente.

**Se estudia la gráfica de la función derivada**  $f'(x)$ :

*Intervalos del signo de la derivada*

- Positiva  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, b) \cup (b, \infty)$
- Negativa  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-b, -a) \cup (-a, 0) \cup (0, a) \cup (a, b)$

*Intervalos de crecimiento de la derivada*

- Creciente  $\forall x \in (-\infty, -c) \cup (-a, 0) \cup (a, c)$
- Decreciente  $\forall x \in (-c, -a) \cup (0, a) \cup (c, \infty)$

a) A partir del **signo de la función derivada** se determinan los **intervalos de crecimiento de**  $f(x)$ :

$f(x)$  es decreciente  $\forall x \in (-b, -a) \cup (-a, 0) \cup (0, a) \cup (a, b)$

**En los puntos**  $x = \pm a$  **la función**  $f(x)$  **también es decreciente** ya que es continua en estos puntos y es decreciente en un entorno de los puntos  $x = \pm a$ .

**Los extremos relativos** de la función  $f(x)$  se encuentran en los puntos donde cambia el crecimiento, por ser la función continua

*Crecimiento y extremos relativos*

$f(x)$  es decreciente  $\forall x \in (-b, b)$  y  $f(x)$  es creciente  $\forall x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$

$x = -b$ ,  $f(x)$  pasa de crecer a decrecer  $\Rightarrow f(-b)$  es un **máximo relativo**

$x = b$ ,  $f(x)$  pasa de decrecer a crecer  $\Rightarrow f(b)$  es un **mínimo relativo**

b) A partir de los intervalos de crecimiento de la función derivada, se tienen los **intervalos de concavidad**.

**Los puntos de inflexión** se encuentran en aquellos puntos donde la gráfica de la función  $f(x)$  tenga recta tangente y presente un cambio de concavidad. En los puntos donde  $f'(x)$  tiene extremos relativos existen

puntos de inflexión de  $f(x)$ :  $x = \pm c$ ,  $x = 0$ . Además, en  $x = \pm a$  también hay puntos de inflexión, ya que

la función  $f(x)$  es continua, cambia de concavidad y tiene recta tangente vertical ya que  $f'(x)$  verifica

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} f'(x) = -\infty.$$

*Concavidad y puntos de inflexión*

$f(x)$  es cóncava hacia arriba  $\forall x \in (-\infty, -c) \cup (-a, 0) \cup (a, c)$

$f(x)$  es cóncava hacia abajo  $\forall x \in (-c, -a) \cup (0, a) \cup (c, \infty)$

$x = \pm c$ , **inflexión**  $f(x)$  pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo con  $f'(\pm c) > 0$ .

$x = 0$ ,  $f(x)$  pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo con  $f'(0) = 0$

$x = \pm a$ ,  $f(x)$  pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, con  $\lim_{x \rightarrow \pm a} f'(x) = -\infty$ , tangente vertical

c) Únicamente falta por considerar la condición de **simetría de la función derivada:  $f'(x)$  es PAR.**

Esta condición implica que se cumple  $f'(x) = f'(-x)$ , e **integrando:  $f(x) = -f(-x) + C$ .**

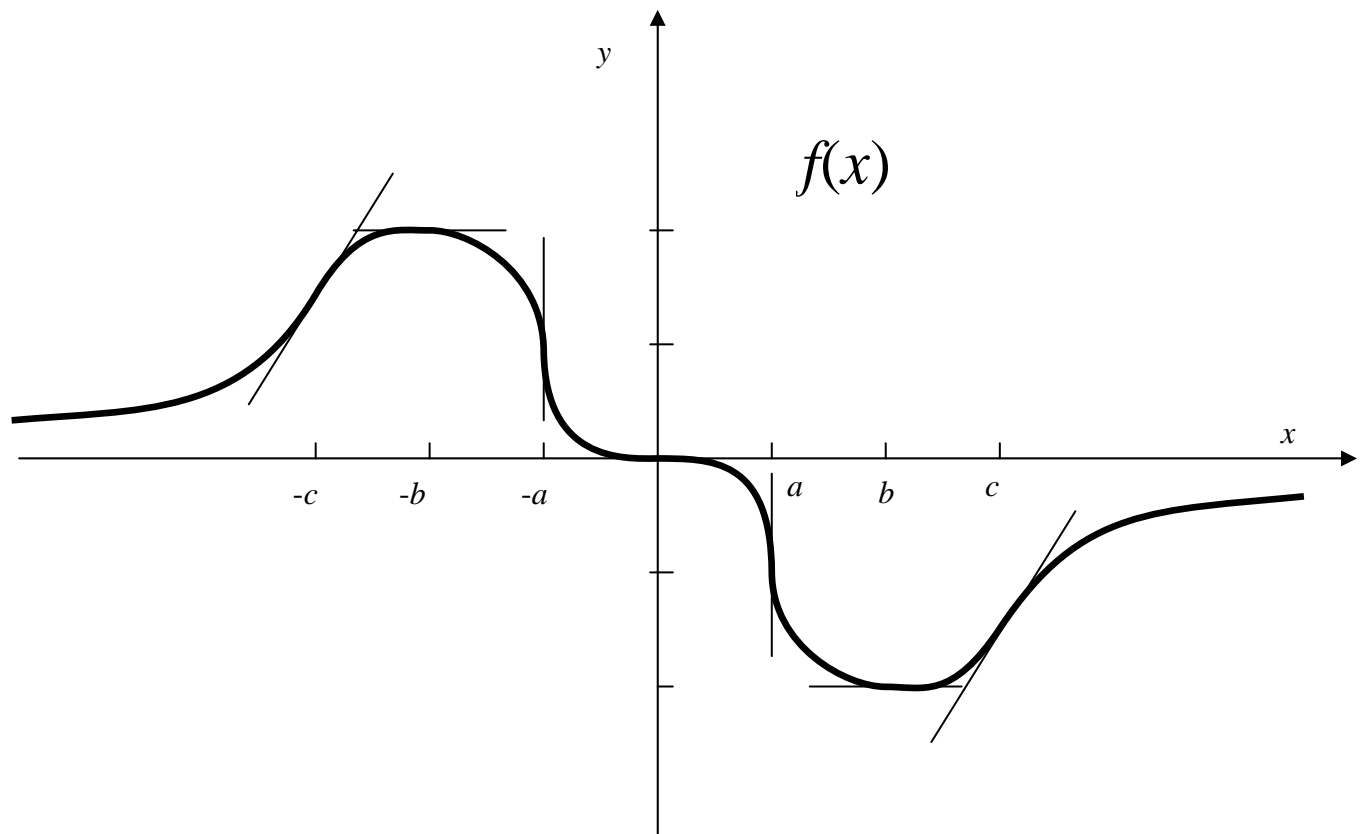
**La función  $f(x)$  es IMPAR, salvo una traslación de valor  $C = 2f(0)$ .**

Represento una posible función  $f(x)$  **eligiendo  $C=0$** , con lo que la función representada es efectivamente impar.

*Simetría de la función*

La función  $f(x)$  es **IMPAR salvo una traslación vertical.**

Utilizando todo lo anterior, una posible gráfica de  $f(x)$  continua es:



d) Para representar una posible gráfica de  $f''(x)$  tendremos en cuenta:

$f'(x)$  es creciente  $\Rightarrow f''(x) > 0$  ;  $f'(x)$  es cóncava hacia arriba  $\Rightarrow f''(x)$  es creciente  
 $f'(x)$  es decreciente  $\Rightarrow f''(x) < 0$  ;  $f'(x)$  es cóncava hacia abajo  $\Rightarrow f''(x)$  es decreciente

**Extremos relativos de  $f'(x)$ :**  $f''(x) = 0$  corte con el eje de abscisas de  $f''(x)$ .

**Puntos de inflexión de  $f'(x)$ :** **Extremos relativos de  $f''(x)$**

**La función  $f''(x)$  es IMPAR** debido a la condición de **simetría de la función derivada:**  $f'(x)$  **es PAR**. Esta condición implica que se cumple  $f'(x) = f'(-x)$ , **y derivando:**  $f''(x) = -f''(-x)$ .

Las asíntotas de la función  $f''(x)$  en  $x = \pm a$ , **se traducen en asíntotas en los mismos puntos de  $f''(x)$**

**En resumen:**

*Signo de la función y cortes con los ejes*

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -c) \cup (-a, 0) \cup (a, c)$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-c, -a) \cup (0, a) \cup (c, \infty)$$

$$x = \pm c$$

,  $f'(x)$  tiene extremos relativos  $\Rightarrow f''(\pm c) = f''(0) = 0$  son **cortes con el eje de abscisas**  
 $x = 0$

*Crecimiento y extremos relativos de la función*

$$f''(x) \text{ es decreciente } \forall x \in (-d, -a) \cup (-a, a) \cup (a, d)$$

$$f''(x) \text{ es creciente } \forall x \in (-\infty, -d) \cup (d, \infty)$$

$x = -d$ ,  $f''(x)$  tiene punto de inflexión  $\Rightarrow f''(-d)$  es un **máximo relativo**.

$x = +d$ ,  $f''(x)$  tiene punto de inflexión  $\Rightarrow f''(d)$  es un **mínimo relativo**.

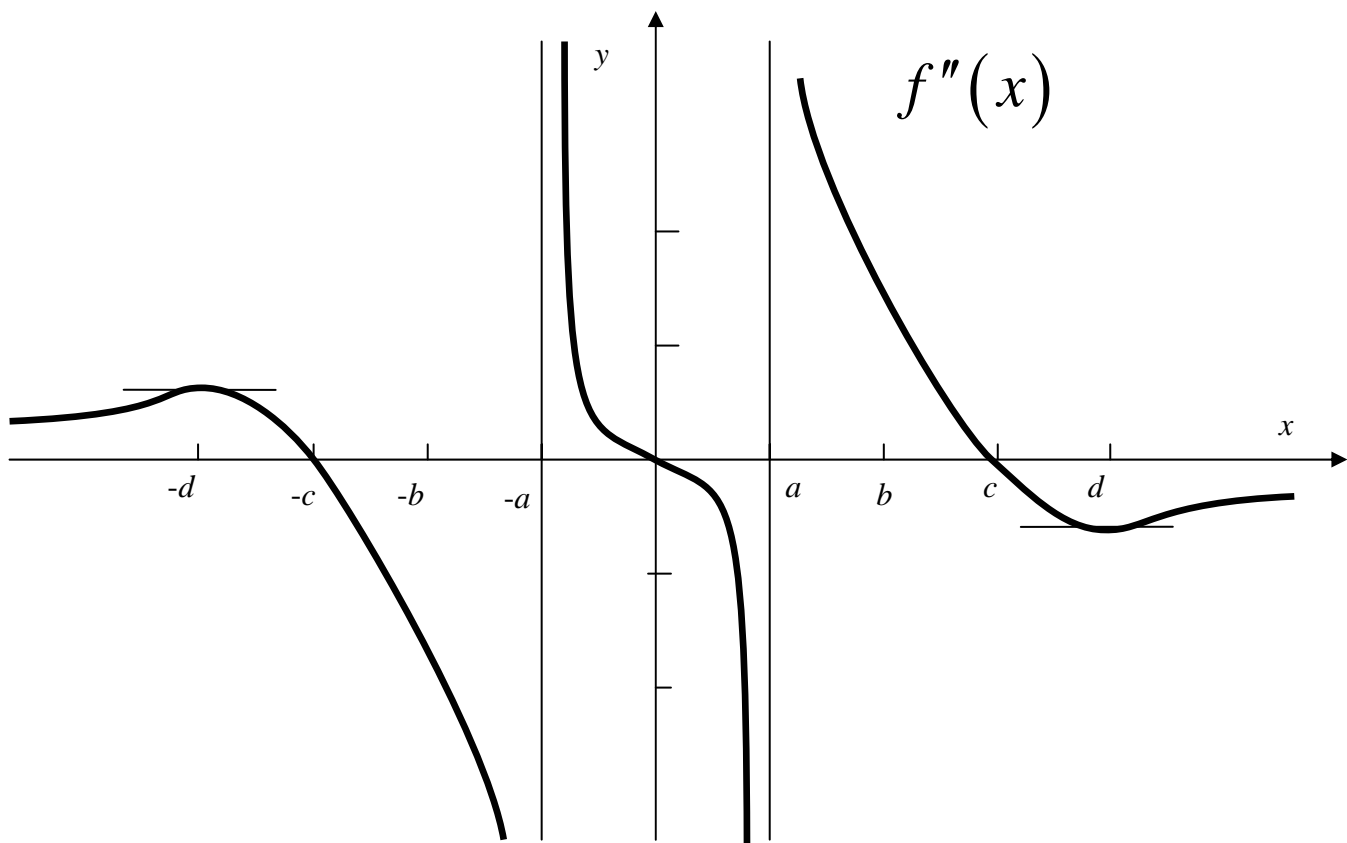
*Asíntotas verticales de la función*

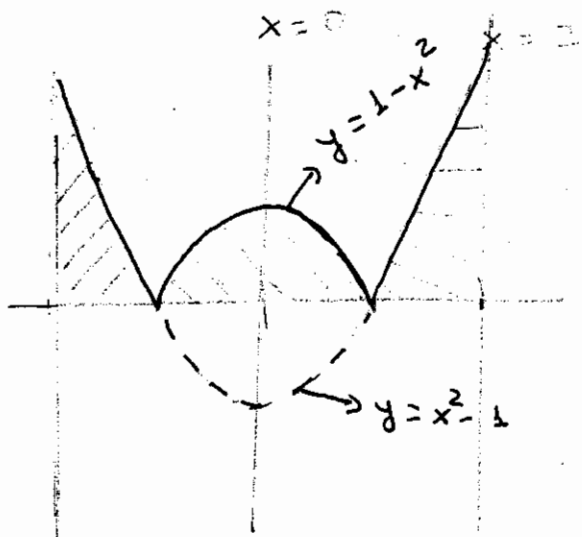
$x = \pm a$ ,  $f''(x)$  tiene asíntotas verticales  $\Rightarrow x = \pm a$  **son asíntotas verticales de  $f''(x)$**

*Simetría de la función*

La función  $f''(x)$  es **IMPAR**.

Utilizando todo lo anterior, una posible gráfica de  $f''(x)$  es:





$$f(x) = |x^2 - 1| = f(-x) \rightarrow \text{f. par}$$

↓  
Simétrica respecto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \text{ o } 1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

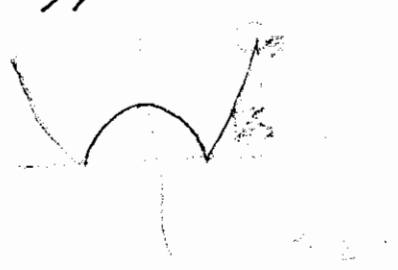
$x \in [-2, 2] \rightarrow$  intervalo simétrico respecto  $x=0$ .

$$a) \quad A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = 4 \text{ u}^2 //$$

Otra forma: Teniendo en cuenta la paridad de la función y la simetría del intervalo

$$A = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx + 2 \int_1^2 (x^2 - 1) dx = 4 \text{ u}^2 //$$

$$b) \quad \text{Volumen por tubos: } V = \int_a^b r y_i dx$$



radio de giro:  $(2-x)$

altura:  $y_i$

$$V = 2\pi \left[ \int_{-2}^{-1} (2-x)(x^2-1) dx + \int_{-1}^1 (2-x)(1-x^2) dx + \int_1^2 (2-x)(x^2-1) dx \right]$$

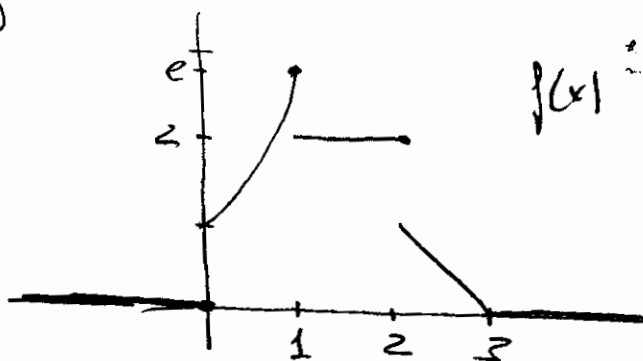
$$V = 2\pi \left[ \int_{-2}^{-1} (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx \right]$$

$$V = 2\pi \left\{ \left[ \frac{2x^3}{3} - 2x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \left[ -\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 + \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 \right\}$$

$$V = 16\pi \text{ u}^3 //$$

# PROBLEMA 4

(a)



$$\forall x \leq 0 \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$$

$$\forall 0 < x \leq 1 \quad g(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \quad (g(1) = \int_0^1 e^t dt = e - 1)$$

$$\forall 1 < x \leq 2 \quad g(x) = \int_0^1 e^t dt + \int_1^x 2 dt = e - 1 + 2x - 2 = 2x + e - 3$$

$$\forall 2 < x \leq 3 \quad g(x) = \int_0^1 e^t dt + \int_1^2 2 dt + \int_2^x (3-t) dt = 3x - \frac{x^2}{2} + e - 3$$

$$\forall x > 3 \quad g(x) = \int_0^1 e^t dt + \int_1^2 2 dt + \int_2^3 (3-t) dt + \int_3^x 0 dt = e + \frac{7}{2}$$

luego

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^x - 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2x + e - 3 & 1 < x \leq 2 \\ e - 3 + 3x - \frac{x^2}{2} & 2 < x \leq 3 \\ e + \frac{7}{2} & x > 3 \end{cases}$$

(b)  $g(x)$  es el área bajo la función  $f(x)$ , que solo tiene 3 discontinuidades de 1ª especie (escalones) luego  $g(x)$  siempre será creciente y continua ( $f(x)$  continua a trozos, integrable)

Para estudiar la derivabilidad de  $f(x)$ :

$f(x)$  es derivable en un principio  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$

En  $x=0$   $f'(0^-) = 0$   $f'(0^+) = 1 \Rightarrow$  No derivable

En  $x=1$   $f'(1^-) = 2$   $f'(1^+) = 1 \Rightarrow$  "

En  $x=2$   $f'(2^-) = 1$   $f'(2^+) = 2 \Rightarrow$  "

En  $x=3$   $f'(3^-) = 0$   $f'(3^+) = 0 \Rightarrow$  Si derivable

### Problema 5

#### Solución

a) La ecuación es una ecuación diferencial de primer orden en variables separables:

$$y' = 0.005y - 0.0005y^2 \Rightarrow \frac{y'}{5 \cdot 10^{-4} y(10-y)} = 1$$

Integrando respecto de x:

$$\int \frac{y'}{5 \cdot 10^{-4} y(10-y)} dx = \int 1 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{5 \cdot 10^{-4} y(10-y)} dy = x + C$$

$$\frac{1}{y(10-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{10-y} \Rightarrow A(10-y) + By = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 = 10A \\ 0 = -A + B \end{cases}$$

La solución general:

$$\int \frac{1/10}{y} + \frac{1/10}{10-y} dy = 5 \cdot 10^{-4} x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{10} (\ln|y| - \ln|10-y|) = 5 \cdot 10^{-4} x + C_1$$

$$\ln \left| \frac{y}{10-y} \right| = 5 \cdot 10^{-3} x + C_2 \Rightarrow \frac{y}{10-y} = e^{5 \cdot 10^{-3} x + C_2} = Ke^{5 \cdot 10^{-3} x}$$

La solución en forma explícita es:

$$y = Ke^{5 \cdot 10^{-3} x} (10-y) \Rightarrow (1 + Ke^{5 \cdot 10^{-3} x}) y = 10Ke^{5 \cdot 10^{-3} x} \Rightarrow y = \frac{10Ke^{5 \cdot 10^{-3} x}}{(1 + Ke^{5 \cdot 10^{-3} x})}$$

b) La solución particular con la condición inicial  $y(20) = \frac{100}{1-e}$  es:

$$\frac{100/(1-e)}{10 - (100/(1-e))} = Ke^{5 \cdot 10^{-3} \cdot 20} \Rightarrow k = \frac{100e^{0.1}}{10(1-e) - 100} = \frac{10e^{0.1}}{-e-9}$$

$$y = \frac{10 \left( 100 \left( \frac{10e^{0.1}}{-e-9} \right) \right) e^{5 \cdot 10^{-3} x}}{\left( 1 + \left( \frac{10e^{0.1}}{-e-9} \right) e^{5 \cdot 10^{-3} x} \right)}$$

### Problema 6

Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange)

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , derivable sobre  $(a, b)$ . Entonces existe un número  $c \in (a, b)$

$$\text{tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Demostración

Aplicamos el teorema de Rolle a la siguiente función:

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

ya que

$$g(a) = f(a) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) \right] = 0 \text{ y}$$

$$g(b) = f(b) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) \right] = 0 \text{ coinciden}$$

y  $g$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

Teorema de Rolle

$f$  es continua en  $[a, b]$ , derivable sobre  $(a, b)$  y  $f(a) = f(b)$  Entonces existe un número

$$c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

Por tanto existe un  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$

Derivando  $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  y sustituyendo

$$g'(c) = f'(c) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$