ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

31 de enero de 2008

Tiempo: 2 horas y 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: **jueves 14 de febrero de 2008**

Fecha prevista de revisión de exámenes: **martes 19 de febrero de 2008**

PROBLEMA 1.

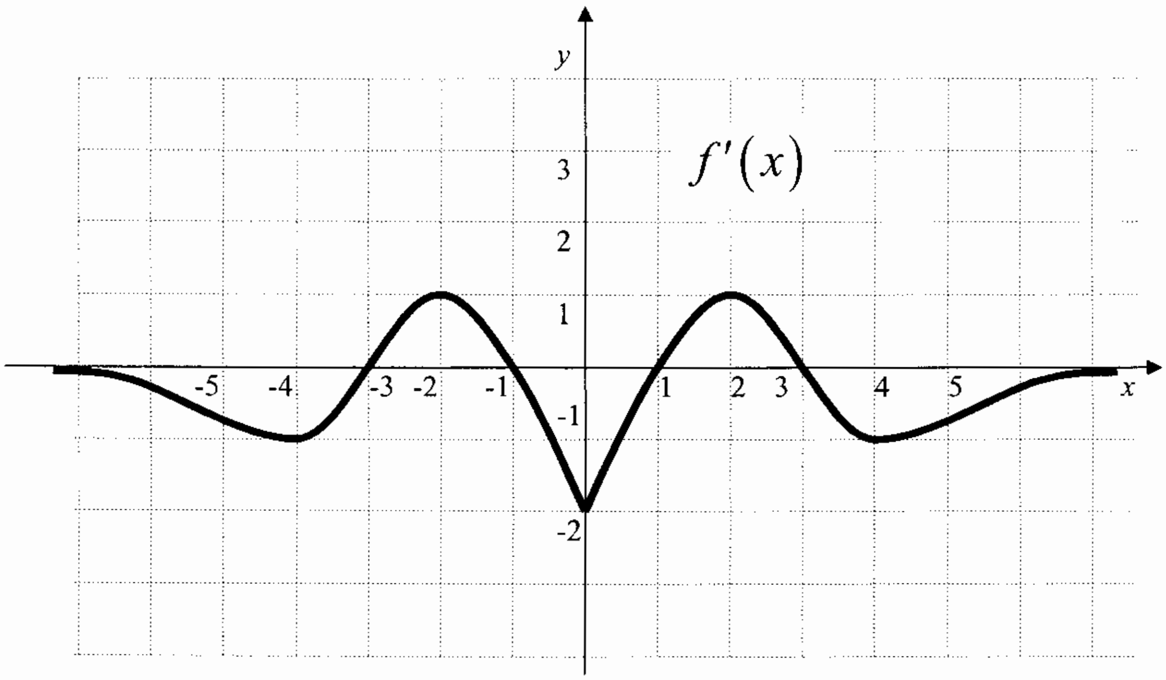
a) Resolver la ecuación $z^2+\bar{z}^2=2$, $z\in\mathbb{C}$. Identificar y representar en $\mathbb{R}^2$ la curva solución.

b) Calcular y representar en el plano complejo $z=\sqrt[3]{i}$ expresando la solución en forma binómica.

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 2.

La siguiente gráfica representa la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ de la que se conoce que $f(0)=0$.



La función derivada $f'(x)$ es una función par y presenta en $x=0,\pm2,\pm4$ extremos relativos, en $x=\pm3,\pm5$ puntos de inflexión e $y=0$ es asíntota horizontal.

A partir de la gráfica, se pide:

a) Representar justificadamente de forma aproximada la función $f(x)$ en un entorno de $x=0$.

b) Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f(x)$, indicando los intervalos correspondientes y deduciendo los extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Demostrar que la función $f(x)$ presenta alguna simetría.

d) Dibujar una posible gráfica de la función $f(x)$.

e) Representar justificadamente de forma aproximada la función $f''(x)$ en un entorno de $x=0$.

2,5 PUNTOS

PROBLEMA 3.

Sea $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. Se pide:

a) Hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcular el área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x = \dfrac{\pi}{2}, y = 0$.

c) Plantear las integrales que calcularían por el método de discos el volumen de revolución obtenido al girar el área del apartado b) alrededor del eje *OX*.

d) Plantear la integral que calcularía el área de la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le f(x) \wedge 0 \le x \le \pi\right\}$

¿Es impropia? Estudiar su convergencia.

3,5 PUNTOS

PROBLEMA 4.

Determinar el haz ortogonal a la familia de curvas $\operatorname{sen} x \cosh y = C, C \in \mathbb{R}$. Encontrar las curvas de ambos haces que se cortan en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

1,5 PUNTOS

PROBLEMA 5.

Sea $F(x)$ la función que determina el área bajo la función $f(t) = e^{-t^2}$ en $[0,x]$. Demostrar que la función $F(x)$ es estrictamente creciente en $x \ge 0$, enunciando los teoremas empleados.

1 PUNTO

Problema 1.

$z = x+iy$; $z^2 = x^2-y^2+2xyi$

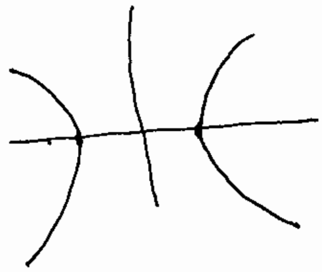
$\bar{z} = x-iy$; $\bar{z}^2 = x^2-y^2-2xyi$

$\Big\}\ z^2+\bar{z}^2 = 2x^2-2y^2$

$2x^2-2y^2=2$; $\boxed{x^2-y^2=1}$

La solución (z) de la ecuación $z^2+\bar{z}^2=2$, $z\in\mathbb{C}$ es el conjunto de los nº complejos cuyos afijos están sobre la hipérbola de ecuación: $\boxed{x^2-y^2=1}$

$x^2-y^2=1$, representa una hipérbola equilátera centrada en el origen.



b) $z = \sqrt[3]{i}$; $|i| = 1$; $\arg(i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{0} \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

nota: $-\pi < \arg(i) \leq \pi$

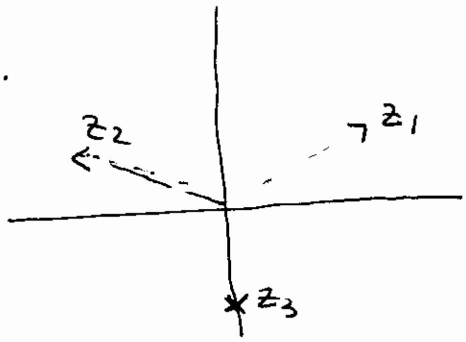
soluciones de z: $\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)$

$k=0, 1, 2.$

$k=0$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$

$k=1$ $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,1/2.$

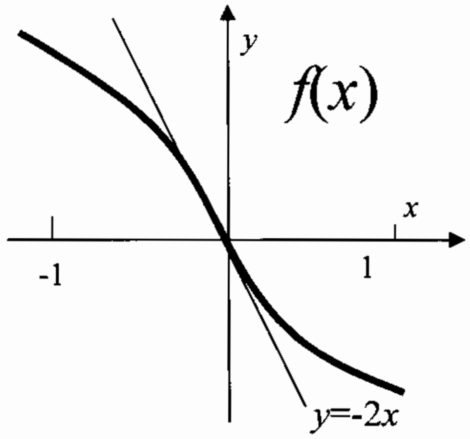
$k=2$ $z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$



PROBLEMA 2

a) Un entorno de x=0 es un intervalo abierto centrado en x=0.
Consideramos un entorno $I \subset (-1,1)$.

- **<u>Del enunciado</u>** se tienen que $f(0)=0$.



- Se estudia la gráfica de la función derivada en un entorno de x=0:
  - **<u>Valor de la derivada</u>**: $f'(0)=-2$, pendiente de la recta tangente a la función en el punto. La derivada en el entorno es negativa y la función es decreciente.
  - **<u>Crecimiento de la derivada</u>** en el entorno:
    $x<0, f'(x)$ decrece $\Rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo
    $x>0, f'(x)$ crece $\Rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba
    . El cambio de la concavidad implica la existencia de un **<u>punto de inflexión</u>**, ya que existe recta tangente.

0,2 puntos

b) Para resolver el apartado basta con estudiar los intervalos de signo y crecimiento de la derivada y aplicar los teoremas correspondientes. También se tiene en cuenta <u>la simetría de la función derivada</u> para determinar los intervalos y comprobar que son correctos:

Intervalos de crecimiento de la función $\begin{array}{l} f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente} \\ f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \end{array}$

• Función creciente $\forall x \in (-3,-1) \cup (1,3)$

• Función decreciente $\forall x \in (-\infty,-3) \cup (-1,1) \cup (3,\infty)$

Extremos relativos: se alcanzan en los puntos de <u>cambio de crecimiento</u> de la función, por ser continua.
• Máximos relativos en $x=-1,3$, mínimos relativos en $x=-3,1$

Intervalos de concavidad de la función $\begin{array}{l} f'(x) \text{ es creciente} \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba} \\ f'(x) \text{ es decreciente} \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo} \end{array}$

• Función cóncava hacia arriba $\forall x \in (-4,-2) \cup (0,2) \cup (4,\infty)$

• Función cóncava hacia abajo $\forall x \in (-\infty,-4) \cup (-2,0) \cup (2,4)$

Puntos de inflexión: se alcanzan en los puntos de cambio de concavidad de la función, por ser derivable y, en consecuencia, existir recta tangente a la función en todos los puntos.
• Puntos de inflexión en $x=-4,-2,0,2,4$

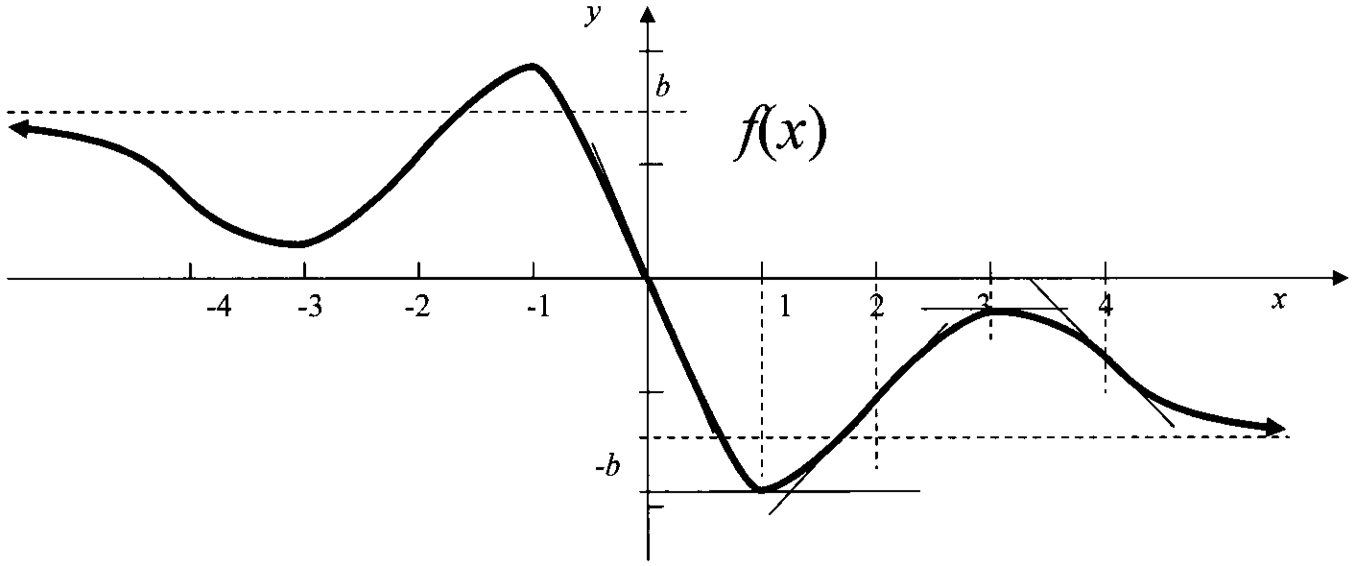
1,6 puntos

c) Para resolver el apartado basta considerar la condición de simetría de la función derivada: $f'(x)$ es PAR. Esta condición implica que se cumple $f'(x)=f'(-x)$, **e integrando:** $f(x)=-f(-x)+C$. **La función** $f(x)$ **es IMPAR, salvo una traslación de valor** $C=2f(0)$, **pero como** $f(0)=0$, **entonces** **<u>C=0</u>** y la función representada es **IMPAR**.

0,2 puntos

d) Para representar la función $f(x)$, **además de tener en cuenta los resultados de los apartados a), b) y c),** hay que considerar la existencia de **asíntota horizontal** $y = 0$ para la función derivada, lo que implica la existencia de asíntotas horizontales para la función $f(x)$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm b$.

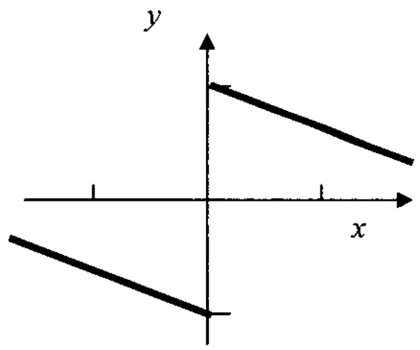
Una posible gráfica de $f(x)$ es:



0,3 puntos

e) Para representar una posible gráfica de $f''(x)$ en un entorno I de x=0, se considera $I \subset (-1,1)$.

- El signo de $f''(x)$ se tiene en cuenta mediante los teoremas $\begin{matrix} f'(x) \text{ es creciente} \Rightarrow f''(x) > 0 \\ f'(x) \text{ es decreciente} \Rightarrow f''(x) < 0 \end{matrix}$, luego la función es $\begin{matrix} f''(x) < 0, x < 0 \\ f''(x) > 0, x > 0 \end{matrix}$. La función $f''(x)$ es **discontinua** en el origen, como era de esperar, ya que en este punto la función derivada presenta un pico.
- Para el crecimiento de $f''(x)$: $f'(x)$ es cóncava hacia abajo $\Rightarrow f''(x)$ es decreciente, $x \in I$
- **La simetría de la función** $f''(x)$ se debe a la condición de **simetría de la función derivada.** Como $f'(x)$ **es PAR**, se cumple $f'(x) = f'(-x)$, **y derivando:** $f''(x) = -f''(-x)$, **por lo que** $f''(x)$ es una función **IMPAR.**
- Se puede estimar el valor de la función en el origen como $f''(0^+) \cong \dfrac{-2}{1} = -2$



0,2 puntos

PROBLEMA 3.

Sea $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$. Se pide:

a) Hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcular el área de la región limitada por $f(x)$ y las rectas $x=\dfrac{\pi}{2}, y=0$.

c) Plantear las integrales que calcularían por el método de discos el volumen de revolución obtenido al girar el área del apartado b) alrededor del eje *OX.*

d) Plantear la integral que calcularía el área de la región $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le y\le f(x)\wedge 0\le x\le \pi\}$

¿Es impropia? Estudiar su convergencia.

a) Puntos de diferenciabilidad (cociente de funciones diferenciables) $\Leftrightarrow 1+\cos x\neq 0$

$1+\cos x=0 \Rightarrow x=\pm\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$: diferenciable en el interior

Condición necesaria de existencia de extremo:

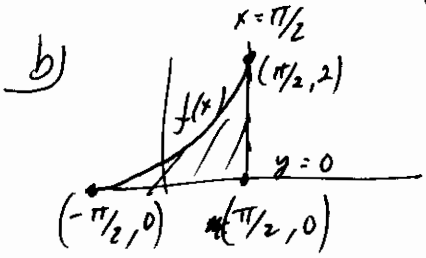
$f'(x)=0$: $\dfrac{1+\cos x+\operatorname{sen}x}{(1+\cos x)^2} \Rightarrow 1+\cos x+\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow x=\pm\pi, -\dfrac{\pi}{2}\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

Por tanto, no hay extremos en el interior

En la frontera: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ mínimo absoluto | Dado que en un cerrado y

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ máximo absoluto | acotado existe máximo y mín.

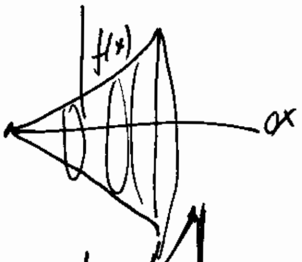
b)



$$S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2\cos^2 x/2}\,dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx=$$

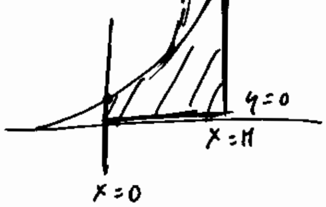
$$=\operatorname{tg}x/2\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\underbrace{\ln|1+\cos x|\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{0}=2\,u^2$$

c)



$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)^2dx$$

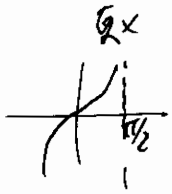
d)



$f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi} f(x)=+\infty$

$$S=\int_0^{\pi}\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx\underset{\uparrow}{=}\lim_{b\to\pi}\int_0^b\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx=$$

impropia (no acotada en pto $x=\pi$)



$$=\lim_{b\to\pi^-}\Big[\operatorname{tg}x/2-\ln|1+\cos x|\Big]_0^b=\infty \text{ diverge}$$

PROBLEMA 4

$\operatorname{sen} x \cosh y = 0$, derivando respecto de x:

$\cos x \cdot \cosh y + y' \operatorname{senh} y \cdot \operatorname{sen} x = 0$

$$y' = -\frac{\cos x \cdot \cosh y}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y}$$

Trayectorias ortogonales: $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y}$

Ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y} dy$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{\cosh y}{\operatorname{senh} y} dy + C \Rightarrow -\ln|\cos x| = \ln|\operatorname{senh} y| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| = \ln|\operatorname{senh} y| + C \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = e^{C} \operatorname{senh} y$$

luego: $\boxed{K = \cos x \operatorname{senh} y}$

- Para el haz $\operatorname{sen} x \cosh y = C$

$$C = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cosh(\ln(\sqrt{2}+1)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\ln(\sqrt{2}+1)} + e^{-\ln(\sqrt{2}+1)}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} = 1$$

Curva del haz que pasa por $\left(\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}+1)\right)$

$$1 = \operatorname{sen} x \cdot \cosh y$$

- Para el haz $K = \cos x \cdot \operatorname{senh} y$

$$K = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{senh}(\ln(\sqrt{2}+1)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \cdot \operatorname{senh} y$$

Como $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ podemos aplicar el Teorema fundamental del Cálculo:

La función $F(x) = \int_a^x e^{-t^2}dt$ es continua, derivable y $F'(x) = f(x) = e^{-x^2}$. El área bajo la curva e^{-x^2} en $[0,x]$ viene dada por $F(x)$, como $F'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in [0,x]$ podemos afirmar que $F(x)$ es estrictamente creciente.

ENUNCIADOS DE LOS TEOREMAS:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

SI f ES CONTINUA EN $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ENTONCES $F(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$.

DERIVADA POSITIVA IMPLICA CRECIMIENTO

SI $f'(x) > 0$ en I entonces $f(x)$ ES CRECIENTE EN I