

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA  
**EXAMEN DE CÁLCULO I**  
8 de septiembre de 2008

**Tiempo: 2 horas y 30 minutos**

**Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.**

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 22 de septiembre de 2008

Fecha prevista de revisión de exámenes: 24 de septiembre de 2008

**PROBLEMA 1.**

Resolver la ecuación  $z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0$ , expresando las soluciones en forma exponencial y binómica.

Representar las soluciones en el plano  $\mathbb{R}^2$  y calcular la longitud del perímetro del polígono que se obtiene al unirlos.

**1,5 PUNTOS**

**PROBLEMA 2.**

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 12x^4 \ln|x| - 13x^4 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ , se pide:

- Estudiar la derivabilidad de  $f(x)$  en  $x = 0$  a partir de la definición de derivada.
- Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función. Indicar los valores de  $x$  en los que se alcanzan extremos relativos y puntos de inflexión de la función. Estudiar la existencia de asíntotas.
- Representar la función utilizando los resultados de los apartados anteriores.
- Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en  $x = 1$  de  $f(x)$ .

**3,0 PUNTOS**

**PROBLEMA 3.**

- Plantear por los métodos de discos y tubos el volumen de revolución del sólido generado cuando

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$  gira alrededor del eje  $OY$ . Calcular el volumen

por el método de tubos.

- Utilizando coordenadas polares, calcular el área de la región:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$$

**3,0 PUNTOS**

**PROBLEMA 4.**

Resolver la ecuación diferencial  $2x^2y' + xy = 1$ ,  $x > 0$  con la condición inicial  $y(1) = 7$

**1,5 PUNTOS**

**PROBLEMA 5.**

Enunciar el teorema de la derivada de la función inversa y utilizarlo para demostrar:

$$(\arg \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

**1,0 PUNTO**

# Problema 2.

$$z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0$$

$$z^2 = \frac{i\sqrt{3} \pm \sqrt{-3+4}}{2} = i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$|z^2| = \sqrt{\frac{3+1}{4}} = 1$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1^2 = 1 e^{i\pi/3} \quad ; \quad z_2^2 = 1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\downarrow$$

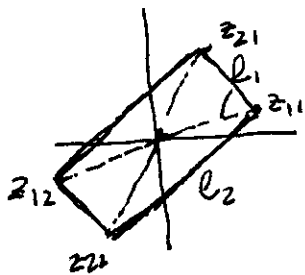
$$z_1 = \sqrt{1 e^{i\pi/3}} = 1 e^{i\pi/6} \quad ; \quad z_1 = |e^{i\pi/6}| \theta_{\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad ; \quad k=0, 1.$$

$$z_2 = \sqrt{1 e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 1 e^{i\pi/3} \quad ; \quad z_2 = |e^{i\pi/3}| \theta_{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad ; \quad k=0, 1.$$

Soluciones:

$$\begin{aligned} z_{11} &= 1 \cdot e^{i\pi/6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ z_{12} &= 1 e^{i7\pi/6} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\ z_{21} &= 1 e^{i2\pi/6} = e^{i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{22} &= 1 e^{i8\pi/6} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Representación



$$\text{Perimetro} = 2l_1 + 2l_2.$$

$$l_1 = |z_{22} - z_{11}| = \left| \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}$$

$$l_2 = |z_{11} - z_{22}| = \left| \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) - \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}$$

$$l_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad ; \quad l_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$P = 2 \left( \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} \right) \text{ unidades}$$

PROBLEMA 2

$$f(x) = \begin{cases} 12x^4 \ln|x| - 13x^4, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a)  $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12 \Delta x^4 \ln|\Delta x| - 13 \Delta x^4 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 12 \Delta x^3 \ln|\Delta x| - 13 \Delta x^3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12/\Delta x}{-3/\Delta x^4} = 0$

Es diferenciable en  $x=0$

b)  $f'(x)|_{x \neq 0} = 48x^3 \ln|x| + 12x^2 - 52x^3 = 8x^3 [6 \ln|x| - 5]$  derivable  $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x)|_{x \neq 0} = 24x^2 [6 \ln|x| - 5] + 8x^3 [\frac{6}{x}] = 72x^2 [2 \ln|x| - 1]$

• C. necesaria extremo relativo:  $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 6 \ln|x| - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm e^{5/6} \end{cases}$

•  $f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \wedge 6 \ln|x| > 5 \Rightarrow x > e^{5/6}, x > 0 \\ x^3 < 0 \wedge 6 \ln|x| < 5 \Rightarrow 0 > x > -e^{5/6} \end{cases} \Rightarrow$  crecimiento

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -e^{5/6}) \cup (0, e^{5/6}) \Rightarrow$  decrecimiento

• Concavidad:

$f''(x) > 0 \Rightarrow |x| > e^{1/2} \Rightarrow$  cóncava hacia arriba  $\forall x \in (-\infty, -e^{1/2}) \cup (e^{1/2}, \infty)$

$f''(x) < 0 \Rightarrow |x| < e^{1/2} \Rightarrow$  cóncava hacia abajo  $\forall x \in (-e^{1/2}, e^{1/2})$

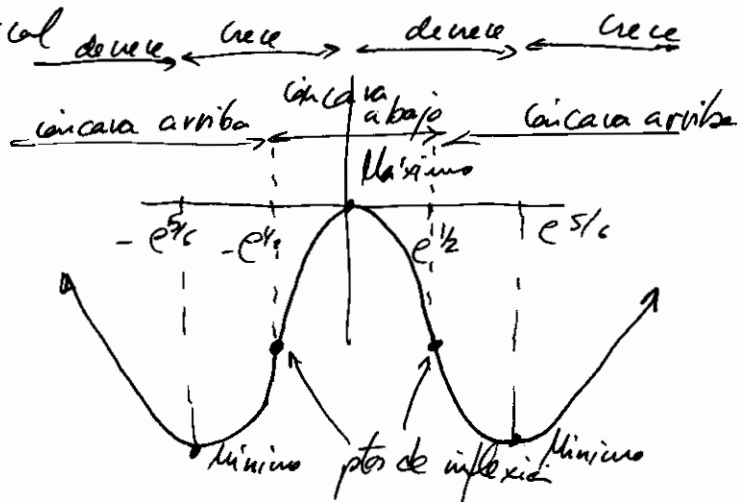
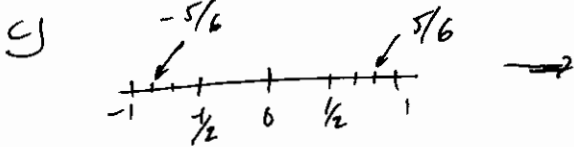
• Puntos de inflexión:  $\{x = \pm e^{1/2}\}$

• límites para las asíntotas:

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (12 \ln|x| - 13) x^3 = \pm \infty$   $\nexists$  oblicua

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (12 \ln|x| - 13) x^4 = \infty$   $\nexists$  horizontal

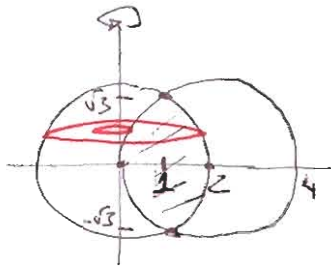
$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$  :  $\nexists$  vertical



$$\begin{aligned} f(1) &= -13 \\ f'(1) &= -40 \\ f''(1) &= -72 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P_2(x) = -13 - 40(x-1) - \frac{72}{2!}(x-1)^2$$

# PROBLEMA 3

a)



Ptos. de intersección:

$$4 - 4x + 4 - x^2 = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow (1, \pm\sqrt{3})$$

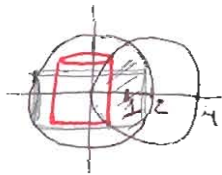
DISCOS

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( (\sqrt{4-y^2})^2 - (2-\sqrt{4-y^2})^2 \right) dy$$

TUBOS

$$\frac{V}{2} = 2\pi \left( \int_0^1 x \sqrt{4-(x-2)^2} dx + \int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx \right)$$

$\begin{matrix} \text{"} & & \text{"} \\ I_1 & & I_2 \end{matrix}$



$$I_1 = 2 \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} (2 \operatorname{sen} t + 2) \cos t \cos t dt =$$

$$\begin{cases} x-2 = 2 \operatorname{sen} t \\ dx = 2 \cos t dt \end{cases}$$

$$= 8 \left( \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \operatorname{sen} t \cos^2 t dt + \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} \cos^2 t dt \right) =$$

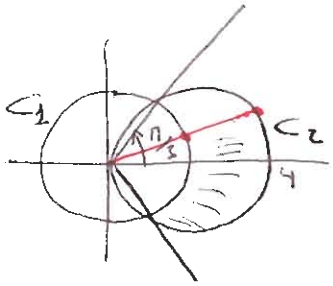
$$= 8 \left[ -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]_{-\pi/2}^{-\pi/6} = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

$(\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2})$

$$I_2 = \left[ -\frac{1}{2} \frac{(4-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_2^0 = \sqrt{3}$$

$$V = 4\pi \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$$

6



$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$C_1: x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$C_2: (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 4 \cos \theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 2^2) d\theta = \left( \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 8\theta + 4 \sin 2\theta - 4\theta \right)_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

Problema 4.

$$2x^2 y' + xy = 1 ; y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2x^2} \text{ E.D.O lineal}$$

E. homogénea asociada:  $y' = -\frac{y}{2x}$  V. separadas.

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{2x} dx \rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln x + \ln k \quad k > 0.$$

$$y = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

Método de variación de las constantes:  $y_p = \frac{k(x)}{\sqrt{x}} \equiv k(x) x^{-1/2}$ .

$$y'_p = k' x^{-1/2} + \frac{1}{2} k x^{-3/2} ; \text{ sustituyendo en la ecuación:}$$

$$k' x^{-1/2} + \frac{1}{2} k x^{-3/2} + \frac{k x^{-1/2}}{2x} = \frac{1}{2x^2} \rightarrow k' = \frac{1}{2x^2} ; k = \int \frac{1}{2} x^{-3/2} dx.$$

$$k(x) = -x^{-1/2} ; y_p = -x^{-1/2} \cdot x^{-1/2} ; y_p = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Solución general: } y_h + y_p = \frac{k}{\sqrt{x}} + \left(-\frac{1}{x}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{k}{\sqrt{x}}$$

\* otra forma: directamente,  $y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$

$$P(x) = \frac{1}{2x} \rightarrow \int P(x) dx = \frac{1}{2} \ln x \rightarrow e^{-\int P(x) dx} = x^{-1/2}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2x^2} \rightarrow \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int \frac{1}{2x^2} x^{1/2} dx = -x^{-1/2}$$

$$y = x^{-1/2} \left[ -x^{-1/2} + C \right] = -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

\* Mediante factor integrante  $\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = x^{1/2}$

multiplicando toda la ecuación por  $\mu(x)$ :

$$y' x^{1/2} + \frac{y}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{3/2}} ; \text{ puede expresarse como: } \frac{d}{dx} (y x^{1/2}) = \frac{1}{2x^{3/2}}$$

$$\text{integrando: } y x^{1/2} = \int \frac{dx}{2x^{3/2}} ; y x^{1/2} = -x^{-1/2} + C \rightarrow y = -\frac{1}{x} + C x^{-1/2}$$

condición inicial  $y(1) = 7$

$$7 = -1 + C \Leftrightarrow C = 8$$

Solución del ejercicio  $y = -\frac{1}{x} + \frac{8}{\sqrt{x}}$

## PROBLEMA 5

Enunciar el teorema de la derivada de la función inversa y utilizarlo para demostrar:

$$(\arg \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

### Enunciado del teorema:

“Sea  $f$  inyectiva y derivable, entonces  $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ , siempre que  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ ”

### Aplicación del teorema:

Sea  $y = f^{-1}(x) = \arg \cosh x$ , entonces  $x = f(f^{-1}(x)) = f(y) = \cosh y$ , siendo  $x \geq 1$  por definición de la función coseno hiperbólico,  $y \geq 0$  por la definición de la función  $y = \arg \cosh x$ .

#### 1.- Cálculo de la derivada $f'(y)$

Derivando en  $x = \cosh y$  respecto de  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = \sinh y$$

Se aplica la relación fundamental entre funciones hiperbólicas:

$$\left. \begin{array}{l} \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \\ x = \cosh y \end{array} \right\} \Rightarrow \sinh^2 y = x^2 - 1, \quad x \geq 1$$

Así se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = \sinh y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \geq 1$$

El signo positivo de la raíz cuadrada se escoge ya que  $y \geq 0$  por definición de la función  $y = \arg \cosh x$ .

#### 2.- Aplicación del teorema de la derivada de la función inversa

Aplicando el teorema, al exigir que  $f'(y) \neq 0$  entonces  $x \neq 1$  y se concluye:

$$(\arg \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$