ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

20 de junio de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 26/06/09.

Fecha prevista de revisión de exámenes: 29/06/09.

PROBLEMA 1.

a) Sea el número complejo $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)^{20}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$, expresarlo en forma binómica.

b) Identificar y esbozar el lugar geométrico siguiente: $\{z \in \mathbb{C} / Re(z^2) = 1\}$

PROBLEMA 2.

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a) Demostrar que $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Estudiar el crecimiento y los extremos relativos de $f(x)$.

c) Estudiar la existencia de extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$.

d) Estudiar las asíntotas y su posición relativa respecto a la gráfica de la función.

e) Representar la función a partir de los resultados anteriores.

PROBLEMA 3.

Sean las funciones: $f(x) = x^2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Obtener el área de la región R encerrada entre sus gráficas y la recta $x = 2$.

b) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OY.

c) Calcular la longitud del trozo de la gráfica de $f(x)$ correspondiente a $x \in [0, 2]$.

d) Estudiar, si existe, el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje OX, el conjunto de ordenadas de $g(x)$ correspondiente a $x \in [2, +\infty)$.

PROBLEMA 4.

Hallar el volumen de un sólido de base circular de radio 4, sabiendo que todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro dado son triángulos equiláteros.

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 3,5 ptos. Problema 4: 1,5 ptos.

Problema 1

a)

$* \; z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}$; $|z_1| = 1$; $\theta_1 = \frac{\pi}{12}$ $\qquad z_1^{20} = 1_{\frac{20\pi}{12}}$

$z_1^{20} = 1_{\frac{5\pi}{3}} \equiv 1_{-\pi/3}$

$* \; z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$; $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$; $\theta_2 = \text{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

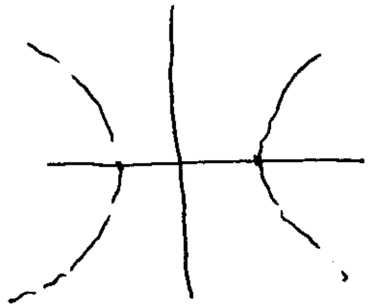
$z_2^6 = 2^6_{\left(-\frac{\pi}{3}\right)6} = 2^6_0$

$z = 2^{-6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{-6}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{-7}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$

b) $\{z \in \mathbb{C} \;/\; Re(z^2) = 1\}$

$z = x+iy$; $z^2 = x^2-y^2+2xyi$; $Re(z^2) = x^2-y^2$

por tanto, $x^2-y^2=1$, ecuación canónica de una hipérbola equilatera con $a=1$.



Problema 2

Solución

a) La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser cociente y composición de funciones derivables , veamos en cero: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1/h}{e^{1/h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1/h^2}{e^{1/h^2}}=0$, f es derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\frac{1}{xe^{1/x^2}}$, $f'(x)=\frac{-\left(e^{1/x^2}-xe^{1/x^2}\left(\frac{-2x}{x^4}\right)\right)}{\left(xe^{1/x^2}\right)^2}=\frac{-1+\frac{2}{x^2}}{x^2e^{1/x^2}}=\frac{-x^2+2}{x^4e^{1/x^2}}$

Puntos críticos: $0,\pm\sqrt{2}$

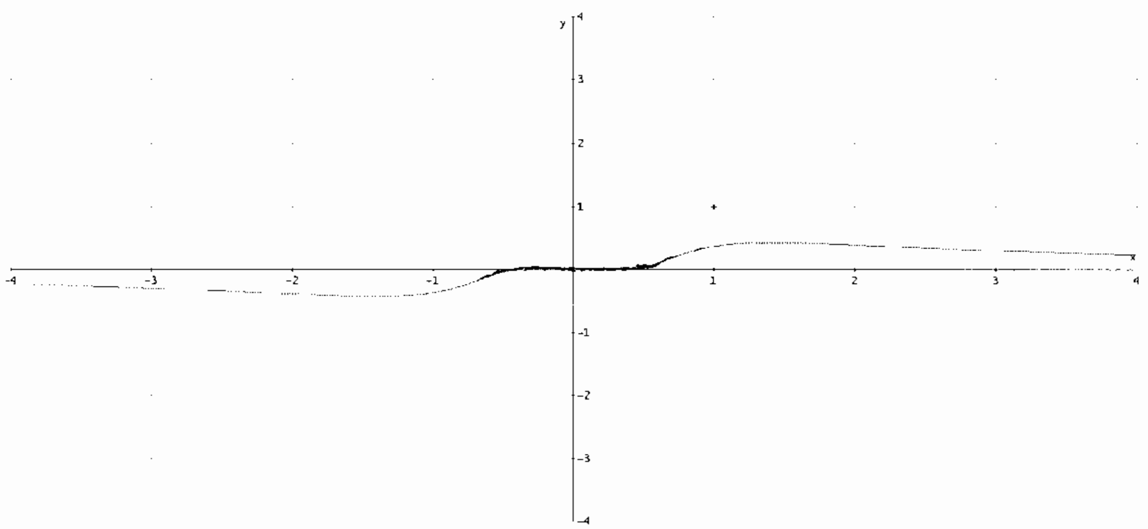
Crecimiento: $f'(x)=\begin{cases}>0 & si -x^2+2>0\Leftrightarrow 2>|x|^2\Leftrightarrow\sqrt{2}>|x|\\ <0 & si -x^2+2<0\Leftrightarrow\sqrt{2}<|x|\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}crece & \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\\ decrece & \left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)\end{cases}$ f presenta un máximo en $\sqrt{2}$ y un mínimo en $-\sqrt{2}$.

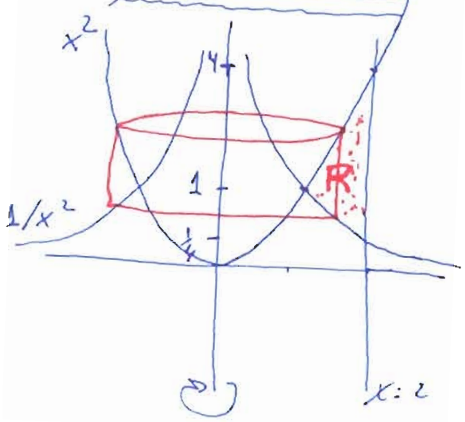
c) En el intervalo $[-1,1]$ la función es continua en un intervalo cerrado y acotado por lo que por el teorema del valor extremo f alcanza su máximo absoluto y mínimo absoluto. Como es creciente el valor máximo es $f(1)=\frac{1}{e}$ y el mínimo es $f(-1)=\frac{-1}{e}$

d) Asíntota horizontal y=0 ya que $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{1/x^2}}=0$. La función queda por encima de la asíntota para x>0 y por debajo si x>0

e)



PROBLEMA 3

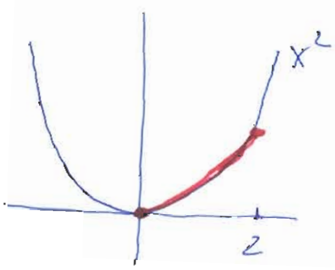


ⓐ $A_R : \displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{11}{6}$

ⓑ $$V_{TUBOS} = 2\pi \int_1^2 \overset{\text{RADIO}}{x}\, \overset{\text{ALTURA}}{\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)} dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \ln x\right]_1^2 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{15}{4} - \ln 2\right)$$

ⓒ



$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (\underset{f'(x)}{2x})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\text{argsenh } 4} \sqrt{1 + \text{senh}^2 t}\, \cosh t\, dt =$$

$2x = \text{senh}\, t$

$2\,dx = \cosh t\, dt$

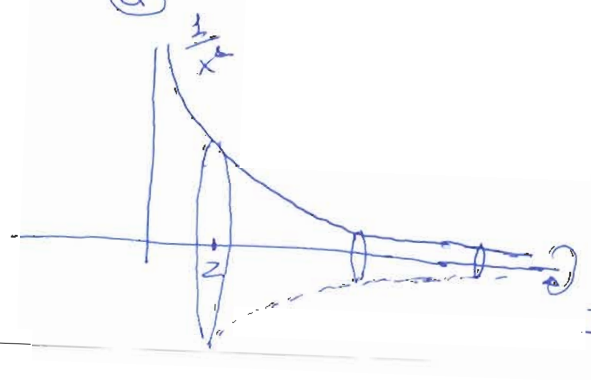
$$= \frac{1}{2}\int \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \frac{1}{4}\left[t + \frac{1}{2}\,\text{senh} 2t\right]_0^{\text{argsenh } 4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{argsenh } 4 + \frac{1}{2}\,\text{senh}(2\,\text{argsenh } 4) - 0 - \frac{1}{2}\cancel{\text{senh } 0}\right) = \frac{1}{4}\left(\text{argsenh } 4 + 4\sqrt{1+4^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{argsenh } 4 + \sqrt{17}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{senh } 2\alpha = 2\,\text{senh}\,\alpha \cosh \alpha \\ \text{senh } 2(\text{argsenh } 4) = 2\,\underbrace{\text{senh}(\text{argsenh}\,\alpha)}_{\alpha} \cdot \cosh(\text{argsenh}\,\alpha) \\ \cosh(\text{argsenh}\,\alpha) = \sqrt{1 + \text{senh}^2(\text{argsenh}\,\alpha)} = \sqrt{1+\alpha^2} \end{array}\right)$$

ⓓ



$$V_{DISCOS} = \pi \int_2^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \pi \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_2^a =$$

$$= \pi\left(\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3\cdot 2^3}\right) = \pi\left(0 + \frac{1}{24}\right) = \frac{\pi}{24}$$

Integral impropia convergente

PROBLEMA 4.

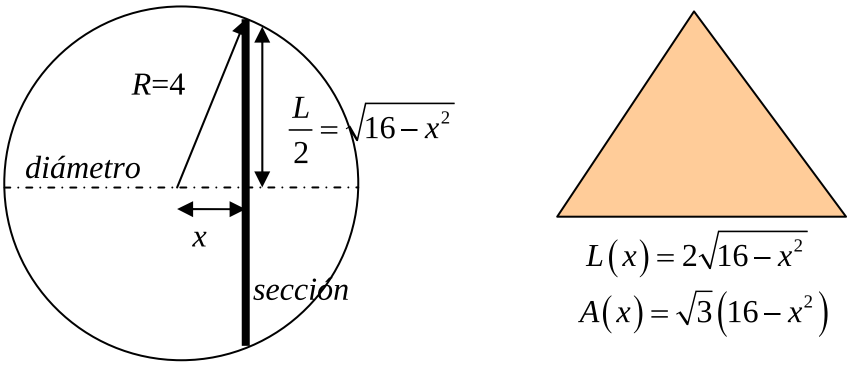
<u>SOLUCIÓN</u>

El sólido es tal que las secciones planas perpendiculares a su eje, uno de sus diámetros, tiene un área fácil de calcular, al ser triángulos equiláteros: $A_{\text{sección}} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, siendo L el lado de cada triángulo. El volumen del sólido se podrá calcular aplicando:

$$V = \int_{x_0}^{x_f} A_{\text{sección}}(x)\,dx$$

siendo x la posición de la sección en el diámetro y con límites de integración en los extremos del sólido.

La sección plana realizada perpendicularmente al eje a distancia x del centro del círculo medida sobre el diámetro proporciona un triángulo de lado $L(x) = 2\sqrt{16-x^2}$, y por tanto de área $A(x) = \sqrt{3}\left(16-x^2\right)$.



Aplicando la fórmula de cálculo del volumen se tiene:

$$\boxed{V = \int_{x_0}^{x_f} A_{\text{sección}}(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \sqrt{3}\left(16-x^2\right)dx = \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \sqrt{3}\left(128 - \frac{128}{3}\right) = 256\frac{\sqrt{3}}{3}u^3}$$

Algunas vistas del sólido