ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA AERONÁUTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

EXAMEN DE CÁLCULO I

4 de febrero de 2009

Tiempo: 2 hora 30 minutos

Cada problema debe entregarse en hojas de examen por separado.

No se permite el uso de calculadoras.

El carné de la Escuela debe de estar encima de la mesa.

Fecha prevista de publicación de notas: 19 de febrero.

Fecha prevista de revisión de exámenes: 23 de febrero.

PROBLEMA 1.

Resolver la ecuación $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ siendo $z \in \mathbb{C}$, expresando sus soluciones en forma polar.

PROBLEMA 2.

Sea la función $f(x) = \ln|x^3 - 1|$

a) Representar la gráfica de $f(x)$ estudiando: dominio, intervalos de crecimiento y extremos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Demostrar que existe la función inversa de $f(x)$ para $x \in (1, +\infty)$. Enunciar el Teorema de la función inversa y aplicarlo para calcular la derivada de dicha función inversa en el origen.

c) Obtener el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ de grado 2 centrado en el punto $x_0 = \sqrt[3]{2}$.

PROBLEMA 3.

Obtener una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x + \operatorname{sen} x}$

PROBLEMA 4.

Sea la función $f(x) = x\sqrt{1-x}$ con $x \in [0, 1]$.

a) Comprobando que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, calcular el área de la región R encerrada por $f(x)$ y el eje OX.

b) Plantear las integrales para calcular el volumen generado al girar R alrededor del eje OX, del eje OY, y del eje $x = 1$.

c) Plantear la integral para calcular la longitud de $f(x)$ con $x \in [0, 1]$ ¿Es una integral impropia?

PUNTUACIÓN: Problema 1: 1,5 ptos. Problema 2: 3,5 ptos. Problema 3: 1,5 ptos. Problema 4: 3,5 ptos.

Problema

Resuelve la ecuación $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Solución

$z^6 - 2z^3 + 2 = 0 \Rightarrow \left(z^3\right)^2 - 2z^3 + 2 = 0$ haciendo el cambio: $t = z^3$:

$$t^2 - 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \wedge$$

Las seis soluciones vienen dados por dos ecuaciones

$$\begin{cases} z^3 = 1 + i \\ z^3 = 1 - i \end{cases}$$

La ecuación $z^3 = 1 + i \Leftrightarrow \left(\rho_\alpha\right)^3 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \rho^3_{3\alpha} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\alpha = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

da tres soluciones con módulo $\rho = \sqrt[6]{2}$ y argumentos:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{12}; \alpha_1 = \frac{9\pi}{12} = 3\frac{\pi}{4}; \alpha_2 = \frac{17\pi}{12}$$

y sus afijos forman los vértices de un polígono regular centrado en el origen

La ecuación

$$z^3 = 1 - i \Leftrightarrow \left(\rho_\alpha\right)^3 = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \rho^3_{3\alpha} = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}+2k\pi} \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \; k = 0,1,2 \end{cases}$$

da tres soluciones con módulo $\rho = \sqrt[6]{2}$ y argumentos:

$$\alpha_0 = \frac{-\pi}{12}; \alpha_1 = \frac{7\pi}{12}; \alpha_2 = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

sus afijos forman los vértices de un polígono regular.

PROBLEMA 2 (CÁLCULO I, FEB 2009)

a) f no está definida para $x=1$, la única solución de $x^3-1=0$.
Dominio de $f \equiv \mathbb{R}-\{1\}$
(f no presenta simetrías; f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$)

$$f(x)=\begin{cases} \ln(x^3-1), & x>1 \\ \ln(1-x^3), & x<1 \end{cases}$$

(f corta al eje OX en 0 y $\sqrt[3]{2}$)

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2}{x^3-1}, & x>1 \\ \dfrac{-3x^2}{1-x^3}=\dfrac{3x^2}{x^3-1}, & x<1 \end{cases}$$

(f es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$)

Intervalos de crecimiento:
f crece en $(1,+\infty)$ pues $f'(x)>0 \ \forall x>1$.
f decrece en $(-\infty,1)$ pues $f'(x)<0 \ \forall x<1$.
f no tiene puntos extremos, ni relativos ni absolutos (el único punto en el que se anula f' es el cero, pero en él no cambia de signo f')

Intervalos de concavidad:

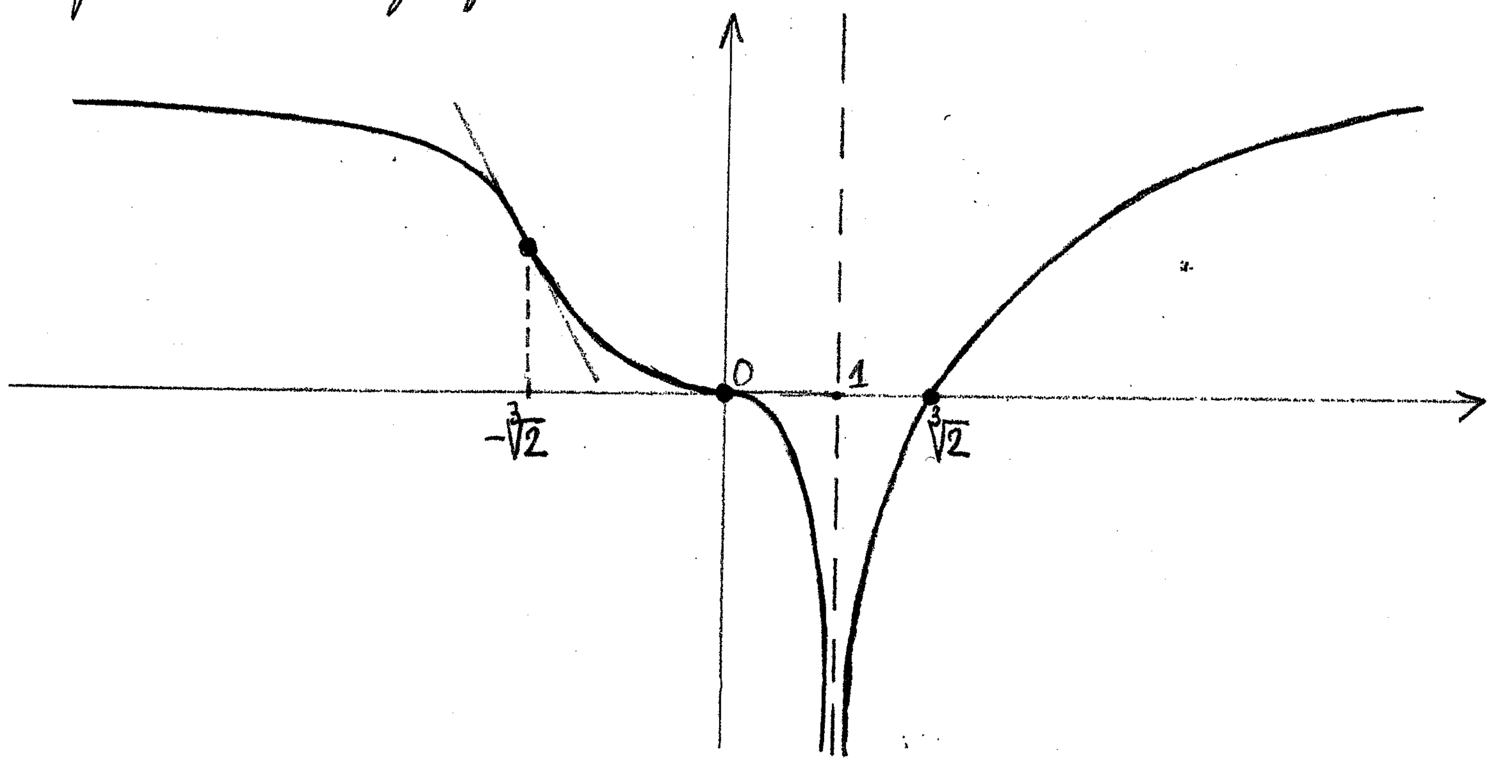
$$f''(x)=-\frac{3x(2+x^3)}{(x^3-1)^2} \quad x\neq 1$$

f'' se anula en $x=0$ y $x=-\sqrt[3]{2}$
$\forall x<-\sqrt[3]{2}$, $f''(x)<0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-\sqrt[3]{2})$.
$\forall x/ -\sqrt[3]{2}<x<0$, $f''(x)>0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\sqrt[3]{2},0)$.
$\forall x>0$, $f''(x)<0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en $(0,1)$ y $(1,+\infty)$

Puntos de inflexión: $x=0$ y $x=-\sqrt[3]{2}$ (en ambos cambia el sentido de la concavidad)

Asíntotas: vertical en $x=1$ pues $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln|x^3-1|}{x}=0$ (Rama parabólica en la dirección del eje OX)

Representación gráfica:



b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3-1} > 0 \quad \forall x \in (1,+\infty) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(1,+\infty) \Rightarrow f$ es inyectiva en $(1,+\infty) \Rightarrow$ $\exists f^{-1}$ en $(1,+\infty)$ [también despejando: $x = \sqrt[3]{1+e^y}$]

Teorema de la Función Inversa:

Si f es derivable con continuidad en algún entorno de x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces existe f^{-1}, y es derivable, en algún entorno de $f(x_0)$ y $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

También sería válido:

Si f es derivable e inyectiva en algún entorno de x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

$$\text{aplicación} \longrightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

c) $$P_2(x) = f(\sqrt[3]{2}) + f'(\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}) + \frac{1}{2!} f''(\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2})^2 =$$
$$= 3\sqrt[3]{4}(x-\sqrt[3]{2}) - 6\sqrt[3]{2}(x-\sqrt[3]{2})^2$$

$\boxed{n^{\circ} 3}$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x+\operatorname{sen} x}$$

cambio de variable: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$; $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$; $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\left[2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int\frac{dt}{t^2+2t+3}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+2}$$

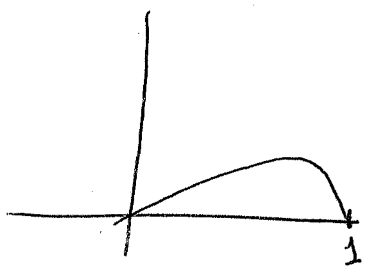
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C$$; deshaciendo el cambio:

$$\boxed{I=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+K.}$$

PROBLEMA 4

(a)
$$\left.\begin{array}{ll} x \geq 0 & \forall x \in [0,1] \\ \sqrt{1-x} \geq 0 & \forall x \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow x\sqrt{1-x} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

Además $f(0)=f(1)=0$. Un boceto aproximado de la gráfica sería:

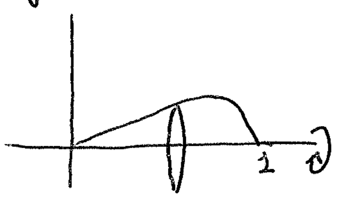


$$A = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = -2\int_1^0 (1-t^2)\,t\cdot t\,dt = 2\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt = \frac{4}{15}$$

$1-x=t^2$

$-dx = 2t\,dt$

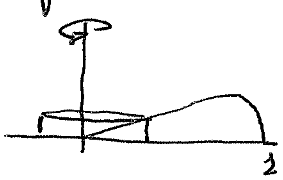
(b) Eje OX



DISCOS:

$$V = \pi\int_0^1 \underbrace{(x\sqrt{1-x})^2}_{R^2(x)}\,dx$$

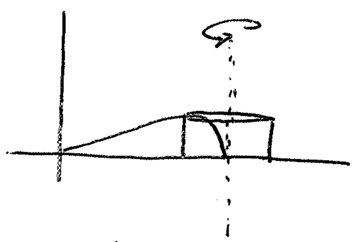
Eje OY



TUBOS:

$$V = 2\pi\int_0^1 \underbrace{x}_{R(x)}\,\underbrace{(x\sqrt{1-x})}_{h(x)}\,dx$$

Eje $x=1$



TUBOS:

$$V = 2\pi\int_0^1 \underbrace{(1-x)}_{R(x)}\,\underbrace{(x\sqrt{1-x})}_{h(x)}\,dx$$

(c)
$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad f'(x) = \sqrt{1-x} + x\frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}\right)^2}\,dx.$$

Es una integral impropia porque la función que aparece en el integrando no es continua en $x=1$ (límite superior), ya que anula el denominador.