Tema 1: Combinatoria

C. Ortiz, A. Méndez, E. Martín y J. Sendra

Febrero de 2011

Índice

Guía del tema 1

Asignatura:	Matemática Discreta
Titulo de la Unidad:	Combinatoria
Semanas de impartición en el cuatrimestre:	2 semanas

Requisitos para seguir con aprovechamiento el tema

- Repasar los conceptos relativos a conjuntos estudiados previamente.
- Consultar la bibliografía recomendada para la unidad.
- Manejar con soltura el álgebra de polinomios.

Objetivos

Objetivo general: Conocer y aplicar los principios elementales del conteo

Objetivos Específicos:

- Generar las posibles agrupaciones con una determinada característica.
- Distinguir entre variaciones, permutaciones y combinaciones.
- Calcular el número de distintas agrupaciones.
- Adquirir destreza operativa en la resolución de ejercicios y problemas de combinatoria.
- Utilizar herramientas informáticas para plantear, resolver y explicar problemas de combinatoria.
- Analizar la importancia de las técnicas presentadas como herramienta para resolver problemas de recuento.

Contenidos teóricos

- Introducción
- Principios básicos del conteo
- Variaciones simples
- Variaciones con repetición

- Permutaciones simples
- Permutaciones circulares
- Permutaciones con repetición
- Combinaciones simples
- Números combinatorios
- Combinaciones con repetición

Evaluación Se entregarán los ejercicios propuestos antes de la fecha límite

lunes 14 de marzo de 2011

1. Introducción

La Combinatoria es la parte de las Matemáticas que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número. Existen distintas formas de realizar estas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no y si influye o no el orden de colocación de los elementos. El desarrollo de la combinatoria está fuertemente ligado con su aplicación en la teoría de la probabilidad, pero también es importante en otras ciencias como la informática, por ejemplo en la teoría de la codificación y en el análisis de algoritmos.

2. Principios básicos del conteo

Iniciaremos nuestro estudio enunciando los principios fundamentales del conteo

Proposición 2.1. ***Principio aditivo o Regla de la suma.*** *Sean A y B son dos sucesos que no pueden ocurrir simultáneamente. Si el suceso A ocurre de m maneras distintas y el B de n maneras distintas, entonces el suceso A o el B se podrá ocurrir de $m + n$ maneras distintas.*

Ejemplo 2.1. Supongamos que en un cine se proyectan tres películas diferentes por la mañana y cinco por la tarde. Si se desea ver una sola película. ¿ Cuántas opciones tenemos?. Sea A el suceso: Ver una película por la mañana y B el suceso: Ver una película por la tarde.
Como hay tres películas diferentes por la mañana y cinco por la tarde , el suceso A se puede presentar de 3 maneras distintas y el B de 5. Como no ocurren simultáneamente, o vas por la mañana o por la tarde . Aplicando la regla anterior, el total de opciones de ver una sola película será: $3 + 5 = 8$

Observación 2.1. la regla anterior se puede aplicar a más de dos sucesos siempre que sean disjuntos dos a dos, es decir, que cada par de tareas no puedan ocurrir simultáneamente.

Proposición 2.2. ***Principio multiplicativo o Regla del producto.*** *Si un suceso A puede ocurrir en m maneras e, independientemente, un segundo suceso B puede ocurrir en n maneras, entonces el número de de maneras en que ambos,A y B, pueden ocurrir es $m \cdot n$*

Ejemplo 2.2. ¿ Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar, usando las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si éstas pueden repetirse?
Al formar un número par de tres cifras $A_1A_2A_3$ con ayuda de las cifras dadas, en vez de A_1 puede tomarse una cifra cualquiera, salvo el 0, es decir 6 posibilidades. En vez de A_2 pueden tomarse cualquier cifra, es decir 7 posibilidades, y en vez de A_3 cualquiera de las cifras 0, 2, 4, 6, es decir 4 posibilidades.

De este modo, conforme a la Regla de Multiplicar existen $6{\cdot}7{\cdot}4 = 168$ procedimientos. Así pues, con las cifras dadas pueden formarse 168 números pares de tres cifras.

Veamos a estudiar a continuación agrupaciones de objetos admitiendo que no hay repetición y que importa el orden en que estén situados los objetos dentro del grupo.

3. Variaciones

Definición 3.1. *Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de* ***variación*** *de orden n de esos m elementos ($n \leq m$), a todo grupo ordenado formado por n elementos tomados de los m, de tal manera que dos grupos se considerarán distintos si difieren en alguno de sus elementos o bien, si teniendo los mismos, difieren en el orden en que están colocados.*
El total de esos grupos ordenados se indica por $V_{m,n}$.

Teorema 3.1. *El total de variaciones de orden n que pueden formarse con los m elementos de un conjunto dado, es:*

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

Demostración. El primer elemento de la variación podrá elegirse de m formas distintas. Por tanto el segundo elemento se podrá elegir de $m-1$ maneras diferentes, ya que quedan $m-1$ elementos para escoger. Razonando de la misma forma, existirán $m-2$ posibilidades de elegir el tercero , y así sucesivamente, hasta llegar a la elección del $n-$ésimo, lo que podrá hacerse escogiendo de entre $m-(n-1)$ candidatos.
Como las etapas de elección son independientes unas de otras, aplicando la regla del producto, se tendrá

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-2)][m-(n-1)] = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

$\square$

Definición 3.2. *Para un entero $n \geq 0$, n factorial (que se denota $n!$) se define como*

$$0! = 1$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \textit{para} \quad n \geq 1$$

Además, para cada $n \geq 0$, $(n+1)! = (n+1)(n!)$.

Nota 3.1. Teniendo en cuenta la definición anterior tenemos:

$$V_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

El siguiente ejemplo muestra el proceso de solución de un problema combinatorio.

Ejemplo 3.1. ¿ Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los dígitos que componen el número 24756?

En este problema tenemos como elementos a los dígitos 2, 4, 7, 5, 6; en total 5 elementos y debemos formar muestras de 3 elementos diferentes, es importante destacar el hecho de la no repetición de los elementos las muestras.

Formemos algunas muestras del experimento.

$$247, 724, 245$$

Resulta fácil observar el cumplimiento de las características correspondientes a las variaciones sin repetición.
Dos muestras difieren:

- En el orden de sus elementos: (247, 724)
- En que, por lo menos, hay un elemento diferente. (247 y 245)

Los elementos no se repiten en la misma muestra. Comprobado que el elemento combinatorio presente en el problema es sin duda variaciones sin repetición podemos determinar fácilmente la cantidad de elementos del conjunto (m=5) y la cantidad de elementos que tienen las muestras (n=3).

Aplicando la fórmula para el cálculo y efectuando los mismos obtenemos, $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números de tres cifras.

Para validar el resultado obtenido podemos aplicar la regla del producto:

Designando al lugar de las centenas por la variable p, las decenas por q y las unidades por r. El lugar p puede ser ocupado de 5 formas, q de 4 formas y r de 3 formas. El número de veces en que en se pueden formar las cifras: $p \cdot q \cdot r = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Consideremos ahora que hay repetición y que importa el orden en que estén situados los objetos dentro del grupo.

Definición 3.3. *Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de* ***variación con repetición*** *de orden n cualquier grupo formado por n elementos, no necesariamente distintos, tomados entre los m del conjunto original. Al poder repetir elementos puede que sea $n > m$. El total de esos grupos ordenados se indica por $VR_{m,n}$.*

Teorema 3.2. *El total de variaciones con repetición de orden n que pueden formarse con los m elementos de un conjunto dado, es $VR_{m,n} = m^n$*

Demostración. Como en el conjunto dado existen m elementos, el primer elemento podrá elegirse de m maneras distintas. Para elegir el segundo podrán tomarse de nuevo cualquiera de los m elementos del conjunto, dado que puede repetirse, y así sucesivamente hasta tomar el $n-$ésimo, que podrá elegirse de entre los m. Como las etapas son independientes unas de otras, aplicando la regla del producto tendremos

$$VR_{m,n} = m \cdot m \cdots m \cdot m = m^n$$

□

Ejemplo 3.2.

- ¿ Cuantos números de tres cifras se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?
  Al tratarse de números el orden importa y además no dice nada sobre cifras distintas, luego si pueden repetirse. Por tanto, se pueden formar 729 números: $VR_{9,3} = 9^3 = 729$
- ¿ Cuantas palabras distintas de 10 letras (con o sin sentido) se pueden escribir utilizando sólo las dos primeras letras del alfabeto?
  Al tratarse de palabras el orden importa y además como son palabras de 10 letras y sólo tenemos dos para formarlas, deben repetirse. Por tanto, se pueden formar 1024 palabras : $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$

4. Permutaciones

Un caso particular de las variaciones son las permutaciones, que son agrupaciones que pueden formarse tomando todos los elementos del conjunto a la vez.

Definición 4.1. *Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de* ***permutación simple*** *de m elementos, cada uno de los distintos grupos que puede formarse de manera que cada uno de ellos contenga los m elementos dados, difiriendo un grupo de otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos. El total de esos grupos ordenados se indica por P_m.*

Teorema 4.1. *El total de permutaciones simples o sin repeticiones de m elementos, es*

$$P_m = m!$$

Demostración. Es obvio que las permutaciones sin repeticiones de m elementos se pueden considerar como variaciones de orden m de m elementos, por tanto :

$$P_m = V_{m,m} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+2)(m-m+1) = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1 = m!$$

□

Ejemplo 4.1. ¿ De cuántas formas distintas se pueden sentar cinco personas en un banco? Sólo importa el orden, ya que se sientan todas, luego se trata de una permutación

$$P5 = 5! = 120$$

Nota 4.1. Como hemos definido las permutaciones sin repetición de los m elementos de un conjunto como un caso particular de las variaciones sin repetición, se hace necesario declarar cuáles son las características que permiten diferenciarlas del resto de las variaciones sin repetición. En este sentido enunciaremos a título de características las siguientes:

- Dos muestras difieren únicamente en el orden de sus elementos.
- En todas las muestras del experimento aparecen los m elementos del conjunto.
- Los elementos no se repiten en las muestras.

5. Permutaciones circulares.

En los ejemplos anteriores hemos imaginado los elementos que forman las permutaciones colocados ordenadamente en línea recta. Hubiera sido lo mismo imaginarlos situados en una curva abierta; pero las condiciones varían si los situamos en una curva cerrada porque el orden que se establece entre sus elementos es relativo:

No cambia si se efectúa una rotación de modo que cada elemento ocupe el lugar del otro. A este tipo de permutaciones se les llama permutaciones circulares o cíclicas. En las permutaciones circulares los elementos se consideran distribuidos sobre una circunferencia.

Las permutaciones circulares pueden identificarse si el análisis de situación mencionada conlleva a la confección de una curva cerrada, fijando uno de los m elementos y permutando los $m-1$ restantes, tal y como se hace en las permutaciones sin repetición.

Definición 5.1. *Dado un conjunto de m elementos, recibe el nombre de* ***permutación circular****, una agrupación de los m elementos de forma que una cualquiera de ellas será distinta de otra únicamente si varía la posición relativa de sus elementos.*

Teorema 5.1. *El número de permutaciones circulares de m elementos se calcula mediante la fórmula:*

$$Pc(m) = (m-1)!, \quad m \text{ es un número natural mayor o igual que 1.}$$

Demostración. Usaremos el método de inducción.
Se verifica para $m = 1$. $Pc(1) = (1-1)! = 0! = 1$
Lo suponemos para $m = kPc(k) = (k-1)! = (k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-(k-2))\cdot 1$
Y lo demostramos para $m = k+1$. Multiplicando por k en ambos miembros de $Pc(k) = (k-1)!$, obtenemos:
$Pc(k+1) = (k-1)!\cdot k = k!$ □

Ejemplo 5.1. ¿De cuántas formas se pueden sentar 8 personas alrededor de una mesa?.
Se trata de una permutación circular de 8 elementos: $Pc(8) = (8-1)! = 7! = 5040$

6. Permutaciones con repetición.

Hasta ahora hemos tratado las permutaciones lineales y las circulares, estableciendo las características que permiten identificarlas. En ambos casos permutamos elementos distintos entre sí. En cambio, si algunos fueran iguales debemos hacer otras consideraciones.

Definición 6.1. *Sea un conjunto de m elementos, entre los que existen n_1 objetos iguales y de un mismo tipo, n_2 iguales pero de otro tipo, y así sucesivamente hasta un grupo de n_k objetos también idénticos entre sí. Las permutaciones distintas que pueden formarse en esas condiciones reciben el nombre de* ***permutaciones con repetición*** *de m elementos entre los que n_1 son iguales, n_2 son también iguales, y así sucesivamente, hasta n_k iguales. El total de esos grupos distintos se indica por $Pr(m,\ n_1, n_2, \ldots, n_k)$ con $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$*

Las permutaciones con repetición se identifican fácilmente a través de sus características esenciales:

- En cada grupo aparecen los m elementos del conjunto.
- Los grupos difieren sólo en el orden entre los elementos de diferente naturaleza.

Ejemplo 6.1. El número 3344 tiene dos números 3 y dos números 4, si permutamos los cuatro dígitos que lo componen, siempre observaremos la presencia de estos en todas las muestras, sin embargo; si permutamos entre sí los elementos de igual naturaleza, no se apreciarán diferencias entre las muestras. Deberemos permutar los elementos de diferente naturaleza para poder distinguirlas.

Formación y número de permutaciones con repetición.

Consideremos las permutaciones que podemos hacer con los dígitos que componen al número 1234. Formando todas las muestras de ese experimento podemos observar:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2341	3214	4231
1342	2314	3241	4213
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Hay 24 permutaciones. Si en lugar de elegir el número anterior, hubiésemos seleccionado el número 3344, en todas las muestras obtenidas anteriormente podríamos sustituir el 2 por el 4 y al 1 por el 3. En este caso de estas 24 permutaciones serían diferentes sólo 6 de ellas.

3434	**4334**	3344	4343
3443	**4343**	3344	4334
3344	**4433**	3434	4433
3344	4433	3443	4343
3434	4343	3434	4343
3443	4334	3443	4334

En el experimento anterior, de las 24 permutaciones lineales del número 3344 hay 6 dígitos repetidos 4 veces cada uno, entonces el conjunto de cifras cuya diferencia está en el orden de colocación se calcula fácilmente mediante la operación siguiente: 24/4=6.

La interpretación del resultado anterior conlleva a plantear para el cálculo de las permutaciones con repetición la siguiente relación: $\dfrac{P_4}{4} = 6$

Sabemos que $P_4 = 4! = 24$, pero podemos escribir el denominador como $4 = 2! \cdot 2!$, cada uno de estos 2! significa la cantidad de permutaciones de cada uno de los elementos que se repiten en el conjunto de valores.

Teorema 6.1. *El número de permutaciones con repetición* (Pr) *que se pueden hacer con* m *elementos, de los cuales hay repetidos* $n_1,\ n_2, \dots n_k$ *es:*

$$Pr(m,\ n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{m!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}, \quad \textit{Siendo} \quad m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Ejemplo 6.2. ¿De cuántas maneras se pueden colocar las figuras blancas (dos caballos, dos torres, dos alfiles, el rey y la reina) en la primera fila del tablero de ajedrez?

Se trata de un experimento sobre permutaciones con repetición de $m = 8$ elementos agrupados en subgrupos $n_1 = 2,\ n_2 = 2,\ n_3 = 2,\ n_4 = 1$ y $n_5 = 1$ de elementos iguales.

$$Pr(8,\ 2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040$$

7. Combinaciones

Proseguimos el estudio manteniendo la condición de que no hay repetición pero ahora admitiendo que no importa el orden en que estén situados los objetos dentro de un grupo.

Definición 7.1. *Sea un conjunto formado por m elementos distintos. Recibe el nombre de* ***combinación simple*** *de orden n o n-aria de esos m elementos ($n \leq m$), cada grupo formado por n elementos tomados de los m, y tal que dos combinaciones se considerarán distintas si difieren en alguno de sus elementos.*

En las combinaciones no influye el orden de colocación, dos combinaciones son la misma si contienen los mismos elementos colocados en distinto orden.

Teorema 7.1. *El total de combinaciones simples de orden n que pueden formarse con los m elementos de un conjunto dado, es*

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Demostración. Dada una combinación de orden n, se obtienen todas las variaciones del mismo orden permutando de todas las maneras posibles los elementos de aquéllas. se tendrá entonces

$$C_{m,n} \cdot P_n = V_{m,n}$$

y por tanto

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

Multiplicando numerador y denominador por

$$(m-n)! = (m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

Obtenemos

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

□

Ejemplo 7.1. Cuantos grupos de 5 alumnos pueden formarse con los treinta alumnos de una clase. (Un grupo es distinto de otro si se diferencia de otro por lo menos en un alumno)

No importa el orden (son grupos de alumnos). No puede haber dos alumnos iguales en un grupo evidentemente, luego sin repetición.

$$C_{30,5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = 142506$$

Por tanto, se pueden formar 142506 grupos distintos.

8. Números Combinatorios

Definición 8.1. *Sean m y n números enteros tales que $0 \leq n \leq m$. Se denomina **número combinatorio o coeficiente binómico**, al cociente*

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

que se representa por $\binom{m}{n}$ y se lee "m sobre n".
Los números m y n se llaman, respectivamente, índice superior e índice inferior del número combinatorio.

Los números combinatorios presentan algunas propiedades muy interesantes que justifican el amplio uso que se hace de ellos en algunas ramas científicas.

Propiedades

1. Por definición

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

y teniendo en cuenta que por convenio $0! = 1$ y que $1! = 1$, podemos considerar los siguientes casos particulares:

$$\binom{m}{0} = C_{m,0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = 1$$

$$\binom{m}{m} = C_{m,m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1$$

2. Dos números combinatorios son iguales si sus índices superiores son iguales y la suma de los inferiores es igual al índice superior:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad \text{o bien} \quad C_{m,n} = C_{m,m-n}$$

En efecto:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{[m-(m-n)]!\ (m-n)!} = \binom{m}{m-n}$$

Los números combinatorios que tienen esta forma reciben el nombre de números **complementarios**.

3. La suma de dos numeros combinatorios cuyos indices superiores son iguales y los inferiores difieren en una unidad es igual a otro numero combinatorio cuyo índice inferior es el mayor de los dos indices inferiores y cuyo índice superior supera en una unidad al índice superior de los sumandos.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \quad \text{o bien} \quad C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$$

En efecto, se tiene

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!\,(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-n)!} = \frac{(m-1)!\,(m-n) + (m-1)!\,n}{n!\,(m-n)!} =$$

$$\frac{(m-1)!\,m}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Esta propiedades quedan reflejadas en el llamado triangulo de Tartaglia.

En el siglo XVI, el italiano Niccolò Tartaglia propuso un triángulo regular de números tales que:

- Todas las filas del triángulo comienzan y terminan por la unidad, y son simétricas con respecto al valor central.
- Cada número del triángulo es igual a la suma de los dos situados encima de él (salvo los extremos).
- La suma de todos los elementos de cada fila coincide con el valor 2^m, siendo m el orden de la fila.

m=1						1		1					
m=2					1		2		1				
m=3				1		3		3		1			
m=4			1		4		6		4		1		
m=5		1		5		10		10		5		1	
m=6	1		6		15		20		15		6		1

También podemos escribir

m=1						$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$					
m=2					$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$				
m=3				$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$			
m=4			$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$		
m=5		$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{5}$		$\binom{1}{5}$	
m=6	$\binom{6}{0}$		$\binom{6}{1}$		$\binom{6}{2}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{6}{4}$		$\binom{6}{5}$		$\binom{6}{6}$

4. Aplicando reiteradamente la propiedad anterior , se llega a la expresión siguiente.

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}$$

9. Combinaciones con repetición

Comenzamos con un ejemplo: En una confitería se venden 3 tipos de pasteles diferentes. ¿De cuántas formas se pueden comprar 4 pasteles?
Como se puede apreciar este problema tiene otra estructura que los ya resueltos. No se trata de una variación porque el orden en que se dispongan los pasteles en una caja es indiferente. Por esta razón la naturaleza del problema se halla más cerca de las combinaciones que de las variaciones, sin embargo en las muestras de este experimento los elementos pueden aparecer repetidos. Estamos en presencia de un caso especial de las combinaciones conocido como combinaciones con repetición.
Para una mejor comprensión del problema consideremos una vez más el conteo.
Formemos para ello las muestras que componen este experimento; considerando el conjunto formado por las letras $\{a,\ b,\ c\}$ como los tipos de pasteles.
Formando todas las muestras de tres pasteles, obtendríamos el siguiente resultado:

$$aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc.$$

Mediante conteo podemos ver que hay 15 agrupaciones diferentes. En este experimento la diferencia entre las muestras no está en el orden sino que difieren, por lo menos, en un elemento. Es preciso observar que los elementos pueden repetirse en una muestra.

Definición 9.1. *Sea un conjunto formado por m elementos todos ellos distintos entre sí. Recibe el nombre de* ***combinaciones con repetición*** *de orden n de m elementos, cada grupo formado por n elementos, distintos o repetidos, tomados de los m dados. El total de esos grupos ordenados se indica por $CR_{m,n}$*

Las características que destacan los rasgos de este concepto son:

- Los grupos no difieren en el orden entre sus elementos.
- Los elementos se pueden repetir en los grupos.

Teorema 9.1. *El número de combinaciones con repetición de orden n que pueden formarse con los de m elementos de un conjunto dado, es*

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = C_{m+n-1,n}$$

Obsérvese que el orden n puede ser mayor que el número de elementos m del conjunto dado. Como se ha visto en el ejemplo que sirve de introducción a esta sección.

En lo sucesivo esta fórmula nos permitirá el cálculo de las combinaciones con repetición.

Ejemplo 9.1. ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos que indican la puntuación de esa parte. Estas puntuaciones van de blanca (0 puntos) a 6. Tenemos pares de puntuaciones de 0 a 6.

El total de fichas será:

$$CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

10. Aplicaciones

1. **Binomio de Newton**

Teorema 10.1. *Si x e y son dos variables y m un entero positivo, entonces se verifica que*

$$(x+y)^m = \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}\,y + \binom{m}{2}x^{m-2}\,y^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}x\,y^{m-1} + \binom{m}{m}y^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}\,y^k$$

Demostración. $(x+y)^m = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\cdots\cdot(x+y)$ al realizar esta multiplicación se tomará un solo termino de cada uno los m factores y el coeficiente del término general $x^{m-k}y^k$, con $0 \leq k \leq m$, se obtendrá tomando x, de todas las formas posibles, en $m-k$ de los m paréntesis que tenemos. Es decir : $C_{m,k} = \binom{m}{k}$. □

Por ejemplo

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{3}y^3x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Observación 10.1.

- Como los coeficientes del binomio de Newton son números combinatorios cumplirán las propiedades de estos números, enunciadas anteriormente, y su cálculo se podrá realizar mediante la técnica del triángulo de Tartaglia.
- Si el desarrollo binomio de Newton escribimos $(-y)$ en lugar de y, tenemos:

$$(x+(-y))^m = (x-y)^m = \binom{m}{0}x^m - \binom{m}{1}x^{m-1}\,y + \cdots + (-1)^k\binom{m}{k}x^{m-k}\,y^k + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}y^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}x^{m-k}\,y^k$$

- Si en $(x+y)^m$ hacemos $x = y = 1$, resulta:

$$(1+1)^m = 2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}$$

es decir, la suma de los coeficientes del desarrollo $(x+y)^m$ vale 2^m.

- Si en $(x-y)^m$ hacemos $x=y=1$, tenemos:

$$(1-1)^m = 0 = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots - \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}$$

  o lo que es igual

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \cdots = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \cdots$$

2. **Fórmula de Leibnitz**

Teorema 10.2. *Si x, y, z son tres variables y m un entero positivo, entonces se verifica:*

$$(x+y+z)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}\ x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad \text{con } \alpha+\beta+\gamma = m$$

Demostración. Dado que $(x+y+z)^m = [x+(y+z)]^m$ podemos aplicar el teorema del binomio de Newton:

$$(x+y+z)^m = [x+(y+z)]^m = \sum_{\alpha=0}^{m} \binom{m}{\alpha} x^\alpha (y+z)^{m-\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{m} \binom{m}{\alpha} x^\alpha \sum_{\beta=0}^{m-\alpha} \binom{m-\alpha}{\beta} y^\beta z^{m-\alpha-\beta}$$

Los dos signos sumatorios indican dos polinomios. El producto de dos polinomios es otro polinomio y el producto de los dos números combinatorio es:

$$\binom{m}{\alpha} \cdot \binom{m-\alpha}{\beta} = \frac{m!}{\alpha!\ (m-\alpha)!} \cdot \frac{(m-\alpha)!}{\beta!\ (m-\alpha-\beta)!} = \frac{m!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

siendo $\gamma = m-\alpha-\beta$ o bien $\alpha+\beta+\gamma = m$, además $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ pueden variar independientemente unos de otros, siempre y cuando su suma sea m. □

Esa fórmula puede generalizarse a cualquier número de variables.

EJEMPLO 10.1. Calculemos $(x+y+z)^4$. En primer lugar, descomponemos 5 en 3 sumandos para obtener los coeficientes del desarrollo:

$$\begin{aligned} 4 &= 4+0+0, \quad \tfrac{4!}{4!\ 0!\ 0!} = 1 \\ 4 &= 3+1+0, \quad \tfrac{4!}{3!\ 1!\ 0!} = 4 \\ 4 &= 2+2+0, \quad \tfrac{4!}{2!\ 2!\ 0!} = 6 \\ 4 &= 2+1+1, \quad \tfrac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = 12 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (x+y+z)^4 &= x^4+y^4+z^4+ \\ &+ 4(x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y) \\ &+ 6(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2) \\ &+ 12(x^2yz+y^2xz+z^2xy) \end{aligned}$$

3. **Soluciones enteras de una ecuación.**

   Usaremos las combinaciones con repetición para determinar el número de soluciones enteras de una ecuación.

   Observación 10.2. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

   - El número de soluciones de la ecuación

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

   - El número de selecciones, con repetición de tamaño r de una colección de tamaño n.
   - El número de maneras de distribuir r objetos idénticos entre n destinatarios distintos.

   Ejemplo 10.2. Calcula el número de soluciones enteras de la ecuación:

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 24$$

   con $x_i \geq 2$, $\forall i$, $1 \leq i \leq 8$.

   Calcular las soluciones de la ecuación dada es equivalente a calcular las soluciones no negativas de la ecuación:

   $$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6 + x'_7 + x'_8 = 8$$

   donde $x'_i = x_i - 2$. Que será:

   $$CR_{8,8} = \binom{8+8-1}{8} = \binom{15}{8} = \frac{15!}{7!8!} = 6435$$

   Este ejemplo es equivalente a resolver el siguiente problema: Una tienda vende ocho tipos de objetos. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 24 objetos de modo que haya dos de cada tipo?.

11. Resumen

Variaciones :

- **Sin repetición**: Interviene el orden, en cada agrupación el número n de elementos es menor que el número m total de elementos y su fórmula es:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- **Con repetición**: Interviene el orden $n < m,\ n > m$ y su fórmula es:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Permutaciones :

- **Sin repetición**: Interviene el orden, $n = m$ y su fórmula es:

$$P_m = m!$$

- **Con repetición**: Interviene el orden, $n = m$ y su fórmula es:

$$Pr(m,\ n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{m!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Combinaciones :

- **Sin repetición**: No Interviene el orden,$n \leq m$ y su fórmula es:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\ (m-n)!}$$

- **Con repetición**: No interviene el orden y su fórmula es:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

Referencias

[1] E. Bujalance, J.A. Bujalance, A.F. Costa, E. Martínez, *Elementos de Matemática Discreta*, Sanz y Torres, Madrid, 1993.

[2] F. García , *Matemática Discreta*, Thomson, Madrid, 2005.

[3] R.L. Grimaldi, *Matemática discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Prentice-Hall, México, 1998.

[4] T. Veerarajan, *Matemáticas discretas. Con teoría de gráficas y combinatoria.* , Mc Graw Hill, México, 2008.