Tema 4: Relaciones de recurrencia

A. Méndez, E. Martín, C. Ortiz y J. Sendra

Abril de 2011

Índice

Guía del tema 4

Asignatura:	Matemática Discreta
Titulo de la Unidad:	Relaciones de recurrencia
Semanas de impartición en el cuatrimestre:	2 semanas

Requisitos para seguir con aprovechamiento el tema

- Manejar con soltura las operaciones con polinomios.
- Conocer algunas características sobre las raíces de un polinomio relacionadas con el grado del mismo.
- Hallar raíces de polinomios de grado menor o igual que dos.
- Manejar el método de Ruffini para el cálculo de raíces de polinomios de orden superior a dos.
- Conocer conceptos de espacios vectoriales (operaciones, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, bases, dimensión).
- Conocer conceptos de matrices (tipos especiales, operaciones y propiedades de las mismas, traspuesta, inversa).
- Habilidades de cálculo con matrices.
- Conocer conceptos y cálculo de determinantes (definición, propiedades elementales, relación con dependencia lineal).
- Relacionar los sistemas de ecuaciones lineales con matrices.
- Conocer soluciones de sistemas de ecuaciones lineales basados en matrices y determinantes.
- Tener nociones de números complejos.
- Conocer y utilizar el principio de inducción matemática.
- Conocer el concepto de sucesión y algunas sucesiones particulares (progresiones aritméticas y geométricas).

Objetivos

Objetivo general: Comprender que los métodos recursivos son fundamentales para el análisis de problemas relacionados con los algoritmos.

Objetivos Específicos:

- Conocer ejemplos de relaciones de recurrencia.
- Plantear problemas en términos de relaciones de recurrencia.
- Discernir si una relación de recurrencia es lineal y, en su caso, conocer el orden.
- Resolver con soltura relaciones de recurrencia lineales de primer orden con coeficientes constantes.
- Resolver con soltura relaciones de recurrencia lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.
- Hallar soluciones particulares de recurrencia lineales de segundo orden con coeficientes constantes.
- Ser capaz de generalizar y aplicar los conceptos concernientes a las recurrencias lineales de segundo orden.
- Utilizar las raíces características para resolver relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes.
- Conocer y utilizar métodos para el cálculo de soluciones particulares de relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes.
- Resolver algunas relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes.

Contenidos teóricos

- Relaciones de recurrencia.
  1. Introducción; Relaciones de recurrencia lineales.
  2. Relaciones de recurrencia lineales de primer orden.
  3. Relaciones de recurrencia lineales de segundo orden.
  4. Relaciones de recurrencia lineales homogéneas.
  5. Soluciones general y particular: Raíces características.

Evaluación Se entregarán los ejercicios propuestos antes de la fecha límite

lunes 16 de mayo de 2011

1. Introducción a las relaciones de recurrencia

Consideramos la sucesión $a_0, a_1, \dots,$ donde $a_n = 4n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Para determinar el valor de a_7 calculamos $a_7 = 4 * 7 = 28$ y no tenemos necesidad de conocer el valor de los 6 términos anteriores.

Nótese que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la relación $s_{n+1} = s_n + 4$, pero que la sucesión de término general $b_n = 4n + 4$ también satisface la relación $s_{n+1} = s_n + 4$. Si conocemos uno de los términos de la sucesión, por ejemplo $s_3 = 20$ entonces la solución queda unívocamente determinada por $s_n = a_n = 4(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de definir una sucesión es por inducción. La sucesión de Fibonacci, F_n, es un ejemplo de sucesión definida recursivamente, $F_0 = 0; \quad F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2$. Pero ahora si deseamos obtener el valor de F_7 deberemos conocer los previos $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$

Sabiendo la expresión exacta para los términos de la sucesión de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

podemos hallar el valor de un término cualquiera sin necesidad de conocer otros, por ejemplo $F_{30} = 832040$.

Los ejemplos mencionados son casos particulares de un conjunto más amplío de cuestiones relacionadas con problemas de la técnica y que se expresan de ecuaciones diferenciales, o en derivadas parciales. Las soluciones exactas y con condiciones iniciales, a veces, solo pueden obtenerse aproximadamente y uno de los métodos es la discretización. La idea de consiste en cambiar el conjunto donde varían los parámetros (segmento, rectángulo, etc.) por un conjunto discreto de puntos, o nodos, que formarán redes y las ecuaciones que rigen el fenómeno aplicadas a los nodos de la malla forman unas relaciones en diferencias, o ecuaciones en diferencias.

Definición 1.1. *Un conjunto en el que se especifican algunos de sus elementos y que el resto de elementos se definen a partir de los conocidos se dice que es un conjunto definido recursivamente. En particular, una sucesión* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *está definida recursivamente si:*

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se conocen los valores* $S_1, \dots, S_{n_0}$.

2. Para $n > n_0$ el término S_n está definida en términos de $S_1, \ldots, S_{n-1}$; $\quad S_n = f(S_1, \ldots, S_{n-1})$.

Observación 1.1. Los valores $S_1, \ldots, S_{n_0}$ se denominan condiciones iniciales y a la función que describe a S_n en términos de sus predecesores se llama relación de recurrencia, o ecuación en diferencias, para S_n.

A veces, la sucesión se describe para $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$, como en la sucesión de Fibonacci.

Ejemplo 1.1.

1. Sea $0! = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = (n-1)! * n$. De esta forma se define por recurrencia el factorial de los números naturales.

2. La sucesión $a_{n+1} = \lambda \ a_n$ para $n \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ está definida recursivamente. Son soluciones de dicha relación

   - Si $\lambda = 2$ y $a_0 = 1$, entonces $(a_n) = (1, \ 2, \ 4, \ldots)$
   - Si $\lambda = 2$ y $a_0 = 3$, entonces $(a_n) = (3, \ 6, \ 12, \ldots)$
   - Si $\lambda = 2$ y $a_0 = 5$, entonces $(a_n) = (5, \ 10, \ 20, \ldots)$
   - Si $\lambda = 3$ y $a_0 = 5$, entonces $(a_n) = (5, \ 15, \ 45, \ldots)$

   El conocimiento del valor de λ y a_0 determina completamente la sucesión.

3. Dada la secuencia de números reales $b_1, \ b_2, \ \ldots$ verificando que

   $$b_1 = 1; \quad b_n - b_{n-1} = n^2 \qquad \forall n \geq 2$$

   Por $b_n = b_{n-1} + n^2 = b_{n-2} + (n-1)^2 + n^2 = \ldots = b_1 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1^2 + \ldots + n^2$. Probaremos que $b_n = \frac{1}{6} \ n \ (n+1) \ (2n+1) \qquad \forall n \geq 1$

   a) Para $n = 1$, se tiene $\frac{1}{6} \ n \ (n+1) \ (2n+1) = \frac{1}{6} \ 1 \ 2 \ 3 = 1 = b_1)$, luego es cierto el resultado.

   b) Supongamos que el resultado es cierto para $n \leq k$.

   c) Sea $n = k+1$ entonces, $b_{k+1} = b_k + (k+1)^2 = \frac{1}{6} \ k \ (k+1) \ (2k+1) + (k+1)^2 =$ $= (k+1) \ \frac{1}{6}(k \ (2k+1) + 6(k+1)) = (k+1) \ \frac{1}{6} \ (k+2) \ (2k+2+1)) = \frac{1}{6} \ (k+1) \ ((k+1)+1) \ (2(k+1)+1)$.

   Luego, por el principio de inducción, se cumple que $b_n = \frac{1}{6} \ n \ (n+1) \ (2n+1)$.

4. Un banco paga un interés del 3 % anual para cuentas de ahorro, con un interés compuesto mensual. Un cliente deposita 1000 € el día 1 de febrero, ¿cuánto dinero tendrá depositado justo un año después?

El interés mensual será de $\frac{3}{12} = 0,25\,\%$. Si el valor del depósito al cabo de n meses es d_n, entonces $d_{n+1} = d_n + 0,0025 * d_n = 1,0025 * d_n \Rightarrow d_{12} = 1000 * (1,0025)^{12} = 1030,41$, así que después de un año el cliente tendrá $1030,41$ €.

5. Supongamos que tenemos una lista de n números reales, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ que deseamos ordenar de manera ascendente. El siguiente método, llamado de la *burbuja*, actúa como sigue: se compara el último elemento con su predecesor si $a_n < a_{n-1}$ se intercambian los valores. A continuación comparamos a_{n-1} con su predecesor inmediato procediendo de la misma manera. Tras $n-1$ comparaciones el número más pequeño de la lista se encuentra en el primer lugar. Repetimos el proceso para los $n-1$ restantes. Para determinar la complejidad de este algoritmo en función del tamaño de la lista contamos el total de comparaciones hasta finalizar la ordenación. Si c_n es el número de comparaciones para ordenar n elementos tendremos la siguiente relación de recurrencia:

$$c_1 = 0; \qquad c_n = c_{n-1} + (n-1) \qquad \forall n \geq 2$$

Para hallar los primeros términos podríamos ir sustituyendo. Vamos a demostrar, por inducción que, en general, $c_n = \frac{n^2 - n}{2}$.

a) Para $n = 1$, se tiene $\frac{n^2 - n}{2} = 0 = c_1$, luego es cierto el resultado.

b) Supongamos que el resultado es cierto para $n \leq k$.

c) Sea $n = k+1$ entonces, $c_{k+1} = c_k + k = \frac{k^2 - k}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{2}$.

Luego, por el principio de inducción, se cumple que $c_n = \frac{n^2 - n}{2}$.

Definición 1.2. *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números complejos diremos que es recursiva lineal de orden* k *y con coeficientes constantes si se puede expresar como*

$$x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n \tag{1}$$

para $n > k$ *y donde* $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_k$ *son constantes reales, o complejas, fijas. En el caso de que el término* e_n *sea cero diremos que la relación es lineal y homogénea.*

Observación 1.2. Se denominan ecuaciones lineales porque los valores de la sucesión no aparecen multiplicados entre si, ni afectados por otras funciones ($x_{n-1} * x_{n-3}$, o $\operatorname{sen} x_{n-1}$)

Conociendo los primeros k elementos todos los siguientes se pueden hallar mediante una combinación lineal de los k precedentes, y dichas ecuaciones se conocen como *condiciones de frontera, o iniciales.*

En estos apuntes consideraremos el caso de que los coeficientes $a_1, \ldots, a_k$ son constantes. Una recursión lineal general de orden k tiene por expresión

$$x_n = a_1(n)\ x_{n-1} + a_2(n)\ x_{n-2} + \ldots + a_k(n)\ x_{n-k} + e_n$$

Ejemplo 1.2. La sucesión de Fibonacci, F_n, definida por, $F_0 = 0;\quad F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\quad \forall n \geq 2$ es un ejemplo de relación lineal de segundo orden y homogénea.

Un ejemplo de ecuación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de orden 4 y no homogénea es $x_n = 2\ x_{n-1} + 3\ x_{n-2} - 4\ x_{n-3} + 2\ x_{n-4} + n$.

2. Relaciones de recurrencia lineales de primer orden

Las relaciones de recurrencia lineales más simples son las de primer orden

Definición 2.1. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos diremos que es recursiva lineal de primer orden y con coeficientes constantes si se puede expresar como*

$$x_n = k\ x_{n-1} + e_n \tag{2}$$

para $n > 1$ y donde k es una constante fija. Si $e_n = 0$ para cualquier n diremos que es homogénea. En el caso de conocer algún valor particular diremos que es una condición de frontera.

2.1. Relación lineal homogénea con coeficientes constantes

Las relaciones de recurrencia lineales homogéneas de primer orden y con coeficientes constantes son de la forma $x_n = k\ x_{n-1}$.

Ejemplo 2.1. Una progresión geométrica de razón r es una sucesión de números donde el cociente de cualquier término entre el que le precede es r, es decir $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = r \Rightarrow x_{n+1} = r\ x_n$, por lo que tenemos una ecuación de recurrencia lineal, de primer orden y homogénea.

Dada la sucesión $3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$, es sencillo comprobar que $x_{n+1} = 3\ x_n\quad \forall n \geq 1$. Pero la sucesión $5,\ 15,\ 45,\ 225,\ \ldots$, también verifica $x_{n+1} = 3\ x_n\quad \forall n \geq 1$. La única diferencia apreciable es que empiezan por valores distintos

A continuación vemos un resultado que nos proporciona un método general de resolución de estas relaciones recurrentes.

Proposición 2.1. *La solución general de la relación $x_{n+1} = r\ x_n\quad \forall n \geq 1$, r constante y $x_0 = A$ es única y viene dada por*

$$x_n = A\ r^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. La unicidad es trivial, ya que si existiese otra solución con la misma condición inicial los siguientes términos necesariamente coinciden con los términos de la dada.

En el caso de que A sea cero la sucesión es constantemente igual a cero y la solución se puede expresar de otras formas.

Consideremos $A \neq 0$, si $x_n = A\ r^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{A\ r^{n+1}}{A\ r^n} = r$, luego es solución de la ecuación y se cumple la condición inicial $x_0 = A\ r^0 = A$. □

Ejemplo 2.2. Para resolver $x_{n+1} = 3\ x_n$ con la condición $x_2 = 18$, consideramos la solución general que es $x_n = x_0\ 3^n$. Para $n = 2$ se tiene que $x_2 = x_0\ 9 = 18 \Rightarrow a_0 = 2 \Rightarrow x_n = 2 * 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2.2. Relación lineal completa con coeficientes constantes

Ahora consideramos la Ecuación (2) completa.

Proposición 2.2. *La solución general de la relación* $x_{n+1} = r\ x_n + e_n \quad \forall n > 1$, *$r$ constante y* $x_0 = A$ *es única y viene dada por*

$$x_n = A\ r^n + \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-1-j}\ e_j \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Demostración. La unicidad de la solución es trivial. Para demostrar la fórmula anterior razonaremos por inducción.

1. Si $n = 1$, $x_1 = A\ r + \sum_{j=0}^{0} r^{-j}\ e_j = r\ A + e_0 = r\ x_0 + e_0$, luego se cumple la relación.
2. Supongamos que se cumple para todo $n \leq k$.
3. Sea $n = k + 1$ entonces, $x_{n+1} = r\ x_n + e_n = r\ \left(A\ r^n + \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-1-j}\ e_j \right) + e_n =$

$$= A\ r^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} r\ r^{n-1-j}\ e_j + r^0\ e_n = A\ r^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} r^{n-j}\ e_j$$

Como queríamos demostrar. □

Ejemplo 2.3. Una progresión aritmética de razón d es una sucesión donde la diferencia entre un término y el que le precede es la constante d, es decir $x_{n+1} - x_n = d \Rightarrow x_{n+1} = x_n + d$, luego es una relación lineal no homogénea de orden uno.

Sea la relación $x_{n+1} = x_n + 2$ para $n \geq 1$, con $x_0 = 1$. Si aplicamos el resultado (3) obtenemos

$$x_n = 1 * 1^n + \sum_{j=0}^{n-1} 1^{n-1-j} * 2 = 1 + 2 * n = 2n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Es decir, los números enteros impares positivos.

Observación 2.1.

1. Si la relación lineal homogénea con coeficientes constantes es $x_{n+1} = r\ x_n$ para $n > n_0$, y la condición inicial es $x_{n_0} = A$ entonces, la solución general es $x_n = A\ r^{n-n_0}$, para $n \geq n_0$.
2. Se puede demostrar que dada la relación lineal homogénea con coeficientes variables $x_{n+1} = a_n\ x_n$ para $n > n_0$, y la condición inicial $x_{n_0} = x_0$, la solución es $x_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_n\right) x_0$, para $n \geq n_0$.
3. Si la relación lineal con coeficientes constantes es $x_{n+1} = r\ x_n + e_n$ para $n > n_0$, y la condición inicial es $x_{n_0} = A$ entonces, la solución general es $x_n = A\ r^{n-n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} r^{n-1-j}\ e_j$, para $n \geq n_0$.
4. También se puede demostrar que dada la relación lineal con coeficientes variables y de primer orden $x_{n+1} = a_n\ x_n + e_n$ para $n > n_0$, con la condición inicial $x_{n_0} = A$ entonces, la solución general es $x_n = A \prod_{i=n_0}^{n-1} a_n + \sum_{j=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_n\right) e_j$, para $n \geq n_0$.

Ejemplo 2.4. Vimos al comienzo que si c_n era el número de comparaciones para ordenar n elementos entonces, $c_1 = 0;\ c_n = c_{n-1} + (n-1) \quad \forall n \geq 2 \rightarrow c_{n+1} = c_n + n \quad \forall n \geq 1$, que es una relación lineal de primer orden con coeficientes constantes. Aplicando la (3) obtenemos $c_n = 0 * 1^n + \sum_{j=0}^{n-1} 1^{n-1-j}\ j =$ $= 1 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \dfrac{n^2-n}{2}$. Se ha empleado que la suma de los k primeros términos de una progresión aritmética es la suma del primero y el último multiplicada por el número de términos dividido por 2. El resultado confirma la solución vista anteriormente.

3. Relaciones de recurrencia lineales de segundo orden

Antes de tratar el problema general, consideraremos con detalle el caso de recurrencia lineales de segundo orden, $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + e_n$, con a_1 y a_2 constantes, $a_2 \neq 0$.

3.1. Relación lineal homogénea con coeficientes constantes

Comenzaremos suponiendo que la secuencia e_n es idénticamente cero.

Si tuviésemos una solución de la forma $x_n = r^n$ entonces la relación verifica

$$0 = x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = r^n - a_1\ r^{n-1} - a_2\ r^{n-2} = r^{n-2}(r^2 - a_1\ r - a_2)$$

Para que la expresión anterior sea cero se debe cumplir $r = 0$ (solución trivial), o bien $r^2 - a_1\ r - a_2 = 0$.

Definición 3.1. *Dada la relación de recurrencia lineal homogénea de coeficientes constantes y de segundo orden* $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$*, se denomina ecuación característica asociada, a la expresión* $x^2 - a_1\ x - a_2 = 0$*. Al polinomio* $P(\lambda) = \lambda^k - a_1\ \lambda^{k-1} - a_2$ *le llamaremos polinomio característico y a sus ceros raíces características.*

Ejemplo 3.1. En la recurrencia que define la sucesión de Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, la ecuación característica es $x^2 - x - 1 = 0$ y sus raíces características son $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$.

Proposición 3.1. *Sea la relación* $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$*. Si* z_1 *y* z_2 *son dos ceros distintos del polinomio característico, entonces* $x_n^{(1)} = z_1^n$ *y* $x_n^{(2)} = z_2^n$ *son soluciones de la relación. Si el cero* z_1 *es raíz doble del polinomio característico, entonces* $x_n^{(1)} = z_1^n$ *y* $x_n^{(2)} = n\, z_1^{n-1}$ *son soluciones de la relación.*

Demostración. Para el caso de raíces distintas, para $i = 1,\ 2$ se tiene

$$x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = z_i^n - a_1\ z_i^{n-1} - a_2\ z_i^{n-2} = z_i^{n-2}(z_i^2 - a_1\ z_i - a_2) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de ser z_i raíz del polinomio característico.

Para el caso de raíz doble, la comprobación de que $x_n^{(1)}$ es solución coincide con el apartado precedente. Para $x_n^{(2)}$ se cumple $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = n\ z_1^{n-1} - a_1\ (n-1)z_1^{n-2} - a_2\ (n-2)z_1^{n-3} =$

$= z_1^{n-3}\ ((n-2+2)\ z_1^2 - a_1\ (n-2+1)\ z_1 - a_2\ (n-2)) = z_1^{n-3}\ (n-2)\ (z_1^2 - a_1\ z_1 - a_2) + z_1^{n-2}\ (2z_1 - a_1)$

Por ser z_1 cero doble del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1\ \lambda - a_2 = (\lambda - z_1)^2$ y por tanto, $P(z_1) = 0$, y $P'(\lambda) = 2\ (\lambda - z_1) = 2\lambda - a_1 \Rightarrow P'(z_1) = 0 = 2z_1 - a_1$. Luego, se cumple la relación, ya que $n\ z_1^{n-1} - a_1\ (n-1)z_1^{n-2} - a_2\ (n-2)z_1^{n-3} = z_1^{n-3}\ (n-2)\ 0 + z_1^{n-2}\ 0 = 0$ □

Ejemplo 3.2. Para la sucesión de Fibonacci, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, son soluciones de la relación las sucesiones $x_n^{(1)} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ y $x_n^{(2)} = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Ejemplo 3.3. Dada la relación $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$, el polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\ \lambda + 2$. Puesto que las raíces de $P(\lambda)$ son $1 \pm j$, las secuencias de números complejos $z_n^{(1)} = (1+j)^n$ y $z_n^{(2)} = (1-j)^n$ son soluciones de la relación dada.

Proposición 3.2. *Si* $x_n^{(1)}$ *y* $x_n^{(2)}$ *son dos soluciones de* $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$*, y si* c_1 *y* c_2 *son dos constantes arbitrarias, entonces la sucesión* $y_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$ *también es solución de la relación considerada.*

Demostración. Esta propiedad es consecuencia de la linealidad de las relaciones.

$$y_n - a_1\ y_{n-1} - a_2\ y_{n-2} = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} - a_1(c_1\ x_{n-1}^{(1)} + c_2\ x_{n-1}^{(2)}) - a_2(c_1\ x_{n-2}^{(1)} + c_2\ x_{n-2}^{(2)}) =$$

$$= c_1\ (x_n^{(1)} - a_1\ x_{n-1}^{(1)} - a_2\ x_{n-2}^{(1)}) + c_2\ (x_n^{(2)} - a_1\ x_{n-1}^{(2)} - a_2\ x_{n-2}^{(2)}) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $x_n^{(i)}$ son soluciones de la relación dada. □

Observación 3.1. Supongamos que dada la relación $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$, con $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_2 \neq 0$, deseamos encontrar soluciones reales. En el caso de que las raíces del polinomio característico sean complejas, z_1 y z_2, estas serán conjugadas, $z_2 = \overline{z_1}$, y las soluciones distintas serán $x_n^{(1)} = z_1^n$ y $x_n^{(2)} = \overline{z_1}^n = \overline{z_1^n}$, por ser el conjugado del producto igual al producto de conjugados.

Para cualquier número complejo, z, se verifica que $\frac{1}{2}\ (z+\overline{z}) = Re(z)$ y $\frac{1}{2j}\ (z-\overline{z}) = Im(z)$, siendo $Re(z)$ e $Im(z)$ las partes real e imaginaria, respectivamente, de z. Entonces, aplicando el resultado previo, las sucesiones

$$y_n^{(1)} = \frac{1}{2}\ (z_1^n + \overline{z_1^n}) = Re(z_1^n) \qquad \text{y} \qquad y_n^{(2)} = \frac{1}{2j}\ (z_1^n - \overline{z_1^n}) = Im(z_1^n)$$

son soluciones de la relación.

Ejemplo 3.4. Sea la relación $x_n = 2\ x_{n-1} - 2\ x_{n-2}$ para $n \geq 2$, $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.

La ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ y sus raíces $\lambda = 1 \pm j$. Entonces, la solución general es

$$y_n = c_1\ (1+j)^n + c_2\ (1-j)^n = c_1\ (\sqrt{2})^n\ (\cos n\ \pi/4 + j \operatorname{sen} n\ \pi/4) + c_2\ (\sqrt{2})^n\ (\cos n\ \pi/4 - j \operatorname{sen} n\ \pi/4) =$$

$$= (\sqrt{2})^n\ ((c_1 + c_2) \cos n\ \pi/4 + j(c_1 - c_2) \operatorname{sen} n\ \pi/4) = (\sqrt{2})^n\ (k_1 \cos n\ \pi/4 + k_2 \operatorname{sen} n\ \pi/4)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, $x_0 = 1 = k_1$ y $x_1 = 2 = \sqrt{2}(k_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2}) = k_1 + k_2$, por lo que $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ y la solución es $y_n = (\sqrt{2})^n\ (\cos n\ \pi/4 + \operatorname{sen} n\ \pi/4)$, que resulta ser real pese a que las raíces de la ecuación característica eran complejas.

En el ejemplo precedente hemos encontrado una solución particular, a partir de una solución general, determinando el valor de constantes. Ahora bien, dadas dos soluciones conocidas de la ecuación homogénea, $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$, y dada otra solución y_n, ¿siempre es posible encontrar constantes c_1 y c_2 tales que $y_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$? Si fuese así a la combinación lineal $c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$ la podríamos denominar solución general.

Para que se pueda expresar cualquier solución particular como combinación lineal de dos soluciones halladas se debe cumplir que, para dos enteros consecutivos n y $n+1$,el siguiente sistema tenga solución.

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} & = & y_n \\ c_1\ x_{n+1}^{(1)} + c_2\ x_{n+1}^{(2)} & = & y_{n+1} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Por la teoría de sistemas de ecuaciones lineales este sistema admite solución única si el determinante de la matriz $W_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix}$ es diferente de cero, es decir $w_n = \begin{vmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$

Definición 3.2. *Dadas las secuencias $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ llamaremos matriz de Casorati de orden n asociada a la secuencia a*

$$W(n) = W(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}) = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \\ x_{n+k-1}^{(1)} & x_{n+k-1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

y a su determinante $w(n) = w(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}) = \det W(n) = \begin{vmatrix} x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \\ x_{n+k-1}^{(1)} & x_{n+k-1}^{(2)} \end{vmatrix}$ *casoratiano de las secuencias.*

Ejemplo 3.5.

1. Las secuencias $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(1^n = 1)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen la siguiente la matriz de Casorati de orden n y casoratiano

$$W((-1)^n,\ 1) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 \\ (-1)^{n+1} & 1 \end{pmatrix};\ w((-1)^n,\ 1) = \begin{vmatrix} (-1)^n & 1 \\ (-1)^{n+1} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n - (-1)^{n+1} = 2\,(-1)^n \neq 0$$

2. Dadas las secuencias $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_2^n =)_{n\in\mathbb{N}}$, donde z_1 y z_2 son dos raíces no nulas y distintas de la ecuación característica asociada a la relación $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2}$, tienen la siguiente la matriz de Casorati de orden n y casoratiano

$$W(z_1^n,\ z_2^n) = \begin{pmatrix} z_1^n & z_2^n \\ z_1^{n+1} & z_2^{n+1} \end{pmatrix};\ w(z_1^n,\ z_2^n) = \begin{vmatrix} z_1^n & z_2^n \\ z_1^{n+1} & z_2^{n+1} \end{vmatrix} = z_1^n z_2^{n+1} - z_1^{n+1} z_2^n = z_1^n z_2^n (z_2 - z_1) \neq 0$$

Definición 3.3. *Dos sucesiones $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$, definidas sobre un subconjunto I de números enteros (no necesariamente soluciones de una relación lineal) se dice que son linealmente dependientes si existen dos constantes, c_1 y c_2, no nulas simultáneamente tales que $c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$ es la sucesión cero sobre I. Si no existen dichas constantes se dice que las sucesiones son linealmente independientes.*

Ejemplo 3.6. Consideramos las sucesiones $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(1^n = 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Si fuesen dependientes existirían dos constantes, c_1 y c_2, que verifican para cualquier entero positivo n

$$\left.\begin{aligned} c_1\ (-1)^n + c_2\ 1 &= 0 \\ c_1\ (-1)^{n+1} + c_2\ 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ por ser el casoratiano no nulo (ver Ejemplo prevío) } c_1 = c_2 = 0$$

Por lo que las secuencias son independientes.

Definición 3.4. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones cualesquiera, y c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias, la sucesión $(c_1\ x_n + c_2\ y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama combinación lineal de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

En general no es sencillo comprobar si dos sucesiones son, o no, linealmente dependientes, pero en el caso de que ambas sean soluciones de una relación lineal homogénea de segundo orden la dependencia está relacionada con el valor del casoratiano.

Proposición 3.3. *Sean $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ dos soluciones de la relación lineal $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$, y la sucesión de sus casoratianos $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Si $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son linealmente dependientes, entonces W es la sucesión constantemente igual a cero.*
2. *Si $w_m = 0$ para algún entero m, entonces las sucesiones son linealmente dependientes*

Demostración.

1. Si $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son linealmente dependientes, entonces existen constantes, c_1 y c_2, no nulas simultáneamente tales que $c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sea un entero n cualquiera, entonces el sistema
$$\begin{aligned} c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} &= 0 \\ c_1\ x_{n+1}^{(1)} + c_2\ x_{n+1}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$
es lineal, homogéneo y con solución $(c_1,\ c_2)$ no trivial, por lo que el determinante de los coeficientes, es decir w_n, debe ser cero.

2. Si $w_m = 0$ para algún entero m, entonces el sistema homogéneo de dos ecuaciones
$$\begin{aligned} c_1\ x_m^{(1)} + c_2\ x_m^{(2)} &= 0 \\ c_1\ x_{m+1}^{(1)} + c_2\ x_{m+1}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$
tiene solución no trivial $(c_1,\ c_2)$ y la sucesión $y_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} = 0$ es solución de la relación $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} = 0$, por lo que $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son linealmente dependientes. □

Una consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *En las mismas hipótesis de la proposición anterior, si $w_m \neq 0$ para algún entero m, entonces $w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y las soluciones $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son linealmente independientes.*

Ejemplo 3.7. Si $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos raíces no nulas y distintas de la ecuación característica asociada a la relación $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2}$, hemos visto en un ejemplo precedente que los casoratianos eran diferentes de cero, luego las sucesiones $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ son linealmente independientes.

Teorema 3.1. *Toda solución de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2}$ puede expresarse como una combinación lineal de dos soluciones fijas linealmente independientes.*

Demostración. Por la Prop. 3.2, dadas dos soluciones de la relación una combinación lineal de las mismas es también solución.

Si $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son dos soluciones particulares de la relación dada, de forma que toda solución se puede expresar como combinación lineal de las dos, $y_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$, entonces las constantes c_1 y c_2 deben ser solución de
$\left.\begin{array}{rcl} c_1\ x_m^{(1)} + c_2\ x_m^{(2)} &=& y_m \\ c_1\ x_{m+1}^{(1)} + c_2\ x_{m+1}^{(2)} &=& y_{m+1} \end{array}\right\}$ para un m fijo, por lo que el determinante $w(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}) \neq 0$. Por el Corolario previo las soluciones $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ son linealmente independientes. □

Observación 3.2. Para obtener la solución de una relación de recurrencia lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes y homogénea se procederá de la siguiente manera:

1. Formar la ecuación característica y hallar sus raíces, z_1 y z_2.
2. Obtener la solución general: $c_1\ z_1^n + c_2\ z_2^n$, o bien $c_1\ z_1^n + c_2\ n\ z_1^{n-1}$ en el caso de que $z_1 = z_2$.
3. Utilizar las condiciones iniciales para determinar c_1 y c_2.

3.2. Relación lineal completa con coeficientes constantes

Para resolver relaciones de la forma $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + e_n$, donde e_n depende de n, veremos un resultado que afirma que toda solución se puede obtener como suma de la solución general de la relación homogénea más una solución particular.

Teorema 3.2. *Sea y_n una solución particular de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + e_n$, y sean $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ dos soluciones linealmente independientes de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2}$. Entonces toda solución x_n de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + e_n$ puede expresarse como $x_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} + y_n$, siendo c_1 y c_2 constantes adecuadas.*

Demostración. La sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $y_n = a_1\ y_{n-1} + a_2\ y_{n-2} + e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución arbitraria de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + e_n$, entonces $(x_n - y_n = d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2}$, sin más que restar. Por el Tª. 3.1 existen constantes, c_1 y c_2, de forma que $d_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)}$, siendo $x_n^{(1)}$ y $x_n^{(2)}$ soluciones linealmente independientes de la homogénea. Por tanto,

$$x_n = d_n + y_n = c_1\ x_n^{(1)} + c_2\ x_n^{(2)} + y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Ejemplo 3.8. Dada la relación $x_n = 5\ x_{n-1} - 6\ x_{n-2} + 7^n$, vamos a comprobar que $y_n = \dfrac{7^{n+2}}{20}$ es una solución particular y determinar la forma de todas las soluciones.

$$5\ y_{n-1} - 6\ y_{n-2} + 7^n = 5\ \frac{7^{n+1}}{20} - 6\ \frac{7^n}{20} + 7^n = 7^n\ \left(\frac{7}{20} - \frac{6}{20} + 1\right) = 7^n\ \frac{35-6+20}{20} = 7^n\ \frac{49}{20} = \frac{7^{n+2}}{20} = y_n$$

Luego, y_n es una solución particular.

La ecuación característica de la relación es $\lambda^2 - 5\,\lambda + 6\ = 0$, cuyas raíces son 2 y 3. Por lo que las soluciones son $x_n = c_1\ 2^n + c_2\ 3^n + \dfrac{1}{20}7^{n+2}$

3.3. Soluciones particulares

En este apartado describiremos el método de variación de las constantes para encontrar una solución particular de la relación de recurrencia suponiendo que el término independiente, e_n es una función polinómica, exponencial o trigonométrica.

I.- Supongamos que $e_n = (l_0+l_1 n+\ldots+l_k n^k)\ b^n$ es el producto de un polinomio por una exponencial. Nótese que se incluyen las funciones polinómicas (cuando $b = 1$) y las exponenciales (con $l_1 = \ldots = l_k = 0$) como casos particulares. La forma que adopta la solución particular depende de las raíces de la ecuación característica

Tipo de raíz	Solución particular
b no es raíz	$(C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$
b es raíz simple	$n(C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$
b es raíz doble	$n^2\ (C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$

II.- Supongamos que $e_n = b^n\ \cos \alpha n$, o $b^n\ \operatorname{sen} \alpha n$, es decir que e_n es de tipo trigonométrico (si b es complejo consideramos $e_n = b^n = |b|^n e^{jn\alpha}$). La solución particular la buscaremos entre las que tienen la forma $e_n = b^n(A\cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha)$. En el caso de que $b \pm j\alpha$ sean raíces de la ecuación característica, entonces la solución particular adopta la forma $e_n = n\ b^n(A\cos n\alpha + B\operatorname{sen} n\alpha)$

Ejemplo 3.9. En el ejemplo anterior considerábamos la relación $x_n = 5\ x_{n-1} - 6\ x_{n-2} + 7^n$. Dado que $e_n = 7^n$ y que 7 no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución del tipo $y_n = C_0\ 7^n$. Entonces

$$C_0\,7^n - 5\,C_0\,7^{n-1} + 6\,C_0\,7n-2 - 7^n = 7^{n-2}\,(C_0\,7^2 - 5\,C_0\,7 + 6\,C_0 - 7^2) = 0 \Rightarrow C_0(49-35+6) = 49 \Rightarrow C_0 = \frac{49}{20}$$

Que resulta ser la solución particular de la que partíamos.

4. Relaciones de recurrencia lineales de orden superior

Las colecciones de secuencias de datos aparecen en problemas muy variados relacionados con la Economía, la Física, la Biología o la Ingeniería, en los que se dispone de conjuntos de datos discreto que se pueden modelizar a través de una relación de recurrencia, por ejemplo unidades anuales de producción de cierta materia prima.

Además de los tipo de problemas mencionados, también se puede considerar un abanico mucho más amplío de cuestiones relacionadas con problemas de la técnica y que se expresan como ecuaciones diferenciales, o en derivadas parciales. Las soluciones exactas y con condiciones iniciales, a veces, sólo se pueden obtener aproximadamente y uno de los métodos es la discretización. La idea consiste en cambiar el conjunto donde varían los parámetros (segmento, rectángulo, etc.) por un conjunto discreto de puntos, o nodos, que formarán redes, o mallas, y las ecuaciones que rigen el fenómeno aplicadas a los nodos de la malla forman unas relaciones en diferencias, o ecuaciones en diferencias.

4.1. Generalidades

Para tratar de resolver una relación lineal general con coeficientes constantes de la forma (1) consideraremos el conjunto de las sucesiones y generalizaremos algunos de los procedimientos vistos en las secciones precedentes.

Trabajaremos sobre el conjunto de las sucesiones de números reales

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{ con } x_n \in \mathbb{R} \text{ y } n = 1,\ 2, \ldots\}$$

o de números complejos $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{ con } w_n \in \mathbb{C} \text{ y } n = 1,\ 2, \ldots\}$, en el campo de la ingeniería a cada elemento de los conjuntos anteriores se denomina señal discreta. Como ya comentamos en ocasiones la sucesión se describe para el conjunto de índices $\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica que $x_n = l\ \forall n \in \mathbb{N}$ la denotaremos por $(l)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente (l).

Proposición 4.1. *El conjunto $\mathbb{S}_{\mathbb{R}}$, respectivamente $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$, con la suma y el producto por escalares habituales tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, respectivamente $\mathbb{C}$-espacio vectorial, de dimensión infinita.*

Demostración. En la demostración utilizaremos el conjunto $\mathbb{S}_{\mathbb{R}}$, para $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ las consideraciones son análogas. Recordemos que las operaciones mencionadas se definen como:

- Suma: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall(x_n),\ (y_n) \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}$
- Producto por escalares: $\lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall(x_n) \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}}$ y $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

La estructura de espacio vectorial (con la suma es grupo abeliano y con el producto por escalares verifica que es distributiva respecto de los escalares y respecto de las sucesiones, asociativa respecto de los escalares y elemento neutro para la operación) es consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de números reales.

La dimensión es infinita porque el conjunto $\{(0,\ 0, \ldots,\ 0,\ \overset{(n}{1},\ 0, \ldots) :\ n \in \mathbb{N}\}$ es libre, o linealmente independiente,y generador, por lo que es base, e infinito. □

Nota 4.1. Recordemos que las sucesiones $\{(x_n^{(1)}),\ (x_n^{(2)}), \ldots,\ (x_n^{(k)})\}$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\lambda_1(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} + \ldots + \lambda_k(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Para estudiar la independencia de un conjunto finito de sucesiones $\{(x_n^1),\ (x_n^2), \ldots,\ (x_n^k)\}$ se analizan submatrices de las matrices infinitas

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Proposición 4.2. *Las sucesiones* $\{(x_n^{(1)}),\ (x_n^{(2)}), \ldots,\ (x_n^{(k)})\}$ *son linealmente independiente si y sólo si existen k índices,* $\{n_1, \ldots,\ n_k\}$*, en* $\mathbb{N}$ *tales que la matriz cuadrada*

$$\begin{pmatrix} x_{n_1}^{(1)} & x_{n_1}^{(2)} & \cdots & x_{n_1}^{(k)} \\ x_{n_2}^{(1)} & x_{n_2}^{(2)} & \cdots & x_{n_2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_k}^{(1)} & x_{n_k}^{(2)} & \cdots & x_{n_k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

es regular (tiene rango k, o tiene determinante no nulo).

Demostración. La combinación lineal $\lambda_1(x_n^{(1)}) + \lambda_2(x_n^{(2)}) + \ldots + \lambda_k(x_n^{(k)}) = (0)$, siendo $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ elementos del conjunto considerado, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y donde (0) representa la sucesión idénticamente cero, se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es un sistema lineal infinito y homogéneo, siendo las incógnitas $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, por lo que siempre admite la solución idénticamente cero. La solución es única si y sólo si la matriz de coeficientes tiene rango máximo, es decir k. Decir que la solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ es única, equivale a decir que

$\{(x_n^1),\ (x_n^2),\ldots,\ (x_n^k)\}$ son linealmente independiente, si y sólo si existe una submatriz de orden $k \times k$ regular. $\square$

Para estudiar la independencia lineal de funciones de variable continua se utiliza el wronsquiano, en analogía para el análisis de la independencia de sucesiones consideraremos el casoratiano, cuya versión para dos sucesiones es la Def. 3.2.

Definición 4.1. *Dadas las secuencias* $\{(x_n^1),\ (x_n^2),\ldots,\ (x_n^k)\}$ *llamaremos matriz de Casorati de orden* j*, con* $j \in \mathbb{N}$*, a*

$$W_j = W_j(x_n^1,\ x_n^2,\ldots,\ x_n^k)) = W(x_j^{(1)},\ x_j^{(2)},\ldots,x_j^{(k)}) = \begin{pmatrix} x_j^{(1)} & x_j^{(2)} & \cdots & x_j^{(k)} \\ x_{j+1}^{(1)} & x_{j+1}^{(2)} & \cdots & x_{j+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j+k-1}^{(1)} & x_{j+k-1}^{(2)} & \cdots & x_{j+k-1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

y a su determinante, $w_j = w(x_j^{(1)},\ x_j^{(2)},\ldots,x_j^{(k)}) = \det W_j(x_n^1,\ x_n^2,\ldots,\ (x_n^k))$*, casoratiano de las secuencias.*

Nótese que para cada índice j la matriz de Casorati puede ser diferente.

Ejemplo 4.1. Dadas las sucesiones $\{(-2^n),\ (n^2),\ (1^n)\}$ las matrices de Casorati de ordenes 2 y 5 son

$$W_2 = W(-2^2,\ 2^2,\ 1) = \begin{pmatrix} -2^2 & 2^2 & 1 \\ -2^3 & 3^2 & 1 \\ -2^4 & 4^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -8 & 9 & 1 \\ 16 & 16 & 1 \end{pmatrix}; \quad W_5 = W(-2^5,\ 5^2,\ 1) = \begin{pmatrix} -32 & 25 & 1 \\ 64 & 36 & 1 \\ -128 & 49 & 1 \end{pmatrix}$$

y los correspondientes casoratianos son $w_2 = -238$ y $w_5 = 3360$

Como consecuencia de la Prop.4.2

Corolario 4.1. *Si el casoratiano de orden* h^**de las sucesiones* $\{(x_n^1),\ (x_n^2),\ldots,\ (x_n^k)\}$ *es no nulo, es decir* $w_{h^*} \neq 0$*, para algún* $h^* \in \mathbb{N}$*, entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Si existe un índice $h^* \in \mathbb{N}$, con $w_{h^*} \neq 0$, entonces la submatriz con índices consecutivos desde h^* hasta $(h+k-1)^*$, que es la matriz de Casorati de orden h^* de las sucesiones, es regular. $\square$

Observación 4.1. Si bien que un casoratiano sea no nulo implica que las sucesiones sean linealmente independientes, el recíproco no es cierto, es decir puede ocurrir que todos los casoratianos sean nulos y que las secuencias sean linealmente independientes, por ejemplo si $x = (1,0,1,0,0,0,0,\ldots)$ e $y = (1,0,0,0,0,0,0,\ldots)$, entonces todos los casoratianos son cero y sin embargo existe una submatriz de orden 2×2, la formada por los índices 1 y 3, regular.

Proposición 4.3. *Sean $r_1, r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{C} - \{0\}$ todos diferentes entre si, i.e. $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$, con $i, j \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto de p secuencias, con $p \geq 1$, $\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (r_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. El caso $p = 1$ es trivial y el caso $p = 2$ está desarrollado en el Ejemplo 3.5(2). Para el caso general se puede comprobar que

$$w_1 = w_1(r_1^n,\ r_2^n, \ldots,\ r_p^n)) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_p \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^p & r_2^p & \cdots & r_p^p \end{vmatrix} = r_1\ r_2 \cdots r_p \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{p} (r_i - r_j) \neq 0$$

donde la última igualdad es consecuencia de ser las constantes no nulas y diferentes. □

Proposición 4.4. *Si $r \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces el conjunto de $p+1$ secuencias $\{(r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^p r^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$, con $p \geq 1$, es linealmente independiente.*

Demostración. El casoratiano de primer orden para las $p+1$ secuencias (r^n), $(nr^n), \ldots, (n^p r^n)$ es

$$w_1 = w_1(r_1^n,\ r_2^n, \ldots,\ r_p^n)) = \begin{vmatrix} r & r & \cdots & r \\ r^2 & 2r^2 & \cdots & 2^p r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{p+1} & (p+1)r^{p+1} & \cdots & (p+1)^{p+1} r^{p+1} \end{vmatrix}$$

Sacando factor común r en la primera fila, r^2 en la segunda y así sucesivamente hasta r^{p+1} en la última fila obtenemos

$$w_1 = rr^2 \cdots r^{p+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (p+1) & \cdots & (p+1)^{p+1} \end{vmatrix} = r^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}\ \Delta_{p+1} = 1!\ 2! \cdots (p-1)!\ p!\ r^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que Δ_{p+1} es un determinante de tipo Vandermonde, con lo que $w_1 \neq 0$. □

4.2. Soluciones y condiciones iniciales

Recordemos que la relación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes es

$$x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n$$

para $n > k$ y donde $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_k$ son constantes reales, o complejas, fijas y $a_k \neq 0$. En el caso de que el término e_n sea cero diremos que la relación es lineal y homogénea.

Si además, se conocen algunos valores $x_1, \ldots, x_{n_0}$, que llamamos condiciones iniciales, podremos determinar una solución, es decir secuencia, $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que verifique la ecuación y las condiciones iniciales.

El siguiente resultado generaliza el caso de las relaciones homogéneas de segundo orden de la Prop. 3.2.

Proposición 4.5. *El conjunto,* $\mathbf{S}$*, de soluciones de la la relación de recurrencia lineal de orden* k *con coeficientes constantes homogénea,* $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}$*, es un subespacio vectorial de* $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$*.*

Demostración. Evidentemente la sucesión constantemente igual a cero, (0), es una de la soluciones. Sean (x_n) e (y_n) soluciones de la ecuación, entonces

$$x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}$$

$$y_n = a_1\ y_{n-1} + a_2\ y_{n-2} + \ldots + a_k\ y_{n-k}$$

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y sea la sucesión $(z_n = \lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a_1\ z_{n-1} + a_2\ z_{n-2} + \ldots + a_k\ z_{n-k} = a_1\ (\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}) + a_2\ (\lambda x_{n-2} + \mu y_{n-2}) + \ldots + a_k\ (\lambda x_{n-k} + \mu y_{n-k}) =$$

$$= \lambda(a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}) + \mu(a_1\ y_{n-1} + a_2\ y_{n-2} + \ldots + a_k\ y_{n-k}) = \lambda\ x_n + \mu\ y_n = z_n$$

Luego, $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución y por tanto $\mathbf{S}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$. □

Proposición 4.6. *Sean* $n_0 \in \mathbb{N}$*, suele ser* $n_0 = 1$*, y* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ *constantes cualesquiera con* $x_{n_0} = c_1,\ x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k$*. Entonces existe una única solución de* $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n$ *y cumpliendo las condiciones dadas.*

Demostración. La obtención de la solución se realiza iterativamente hacía adelante y hacía atrás a partir de los valores conocidos y, además, es única por construcción.

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & n \geq n_0 + k & \Rightarrow & x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n \\ \text{Si} & n < n_0 & \Rightarrow & x_n = \dfrac{x_{n+k} - a_1\ x_{n+k-1} - a_2\ x_{n+k-2} - \ldots - a_{k-1}\ x_{n-1} - e_{n+k}}{a_k} \end{array}$$

□

Observación 4.2. Se puede demostrar que la dimensión del subespacio vectorial $\mathbf{S}$ formado por las soluciones de la la relación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes tiene dimensión k.

Teorema 4.1. *Sea y_n una solución particular de la Relación 1. Entonces, z_n es solución de la Relación 1 si y sólo si $y_n - z_n$ es solución de la relación homogénea asociada.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Nótese que las soluciones de la relación completa se obtienen como suma de una solución particular de la completa y alguna solución de la relación homogénea asociada.

A continuación enunciamos sin demostración un resultado que generaliza el de la Prop. 3.3.

Proposición 4.7. *Sean $x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}$ k soluciones de la relación lineal homogénea*

$$x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k},$$

y la sucesión de sus casoratianos $W = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. *$x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}$ son linealmente independientes.*
2. *W es la sucesión constantemente igual a cero, es decir $w_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.*
3. *$w_m = 0$ para algún entero m.*

Observación 4.3. Al igual que para resolver las relaciones de recurrencia lineales de segundo orden con coeficientes constantes procederemos a calcular todas las soluciones de la ecuación homogénea (siguiente subsección), después trataremos de hallar una solución particular y, por último, determinar las constantes para que se verifiquen las condiciones iniciales impuestas.

4.3. Relación lineal homogénea con coeficientes constantes

Para hallar la solución general de la relación homogénea obtendremos k soluciones linealmente independientes a partir de las raíces de la ecuación característica.

Definición 4.2. *Dada la relación de recurrencia lineal y homogénea de coeficientes constantes*

$$x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} - \ldots + a_k\ x_{n-k} = 0$$

llamaremos ecuación característica asociada, a la expresión

$$x^k - a_1\ x^{k-1} - a_2\ x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}\ x - a_k = 0 \tag{5}$$

El polinomio $P(\lambda) = \lambda^k - a_1\ \lambda^{k-1} - a_2\ \lambda^{k-2} - \ldots - a_{k-1}\ \lambda - a_k$ se denomina polinomio característico y a sus ceros raíces características.

Nota 4.2. Esta definición amplía la dada para relaciones lineales de orden dos.

Se considera primeramente el caso de que las k raíces características sean diferentes entre si y, a continuación el caso de multiplicidad de dichas raíces.

Proposición 4.8. *Sea la relación* $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} - \ldots + a_k\ x_{n-k} = 0$. *Si* λ *es raíz de la ecuación característica, entonces* $x_n = \lambda^n$ *es una solución de la relación dada.*

Demostración. Se utilizan los mismos argumentos de la Prop. 3.1. □

Proposición 4.9. *Sea la relación* $x_n - a_1\ x_{n-1} - a_2\ x_{n-2} - \ldots - a_k\ x_{n-k} = 0$. *Si* $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *son las raíces de la ecuación característica y son distintas entre si, entonces la solución general de la relación dada es*

$$x_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \ldots + A_k\lambda_k^n,$$

siendo $A_1,\ A_2, \ldots, A_k$ *constantes arbitrarias.*

Demostración. El conjunto $G = \{(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es linealmente independiente (Prop. 4.3). Además, según la Observ. 4.2, la dimensión del conjunto de soluciones es k, con lo que G es una base y cualquier elemento se puede expresar como combinación lineal, es decir de la forma $A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \ldots + A_k\lambda_k^n$. □

Ejemplo 4.2. Consideramos la relación lineal homogénea de orden tres $x_n = 6\ x_{n-1} - 11\ x_{n-2} + 6\ x_{n-3}$ con las condiciones iniciales $x_0 = 2,\ x_1 = 5$ y $x_2 = 15$, que denotaremos por $P1$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 6\ x_{n-1} - 11\ x_{n-2} + 6\ x_{n-3} \\ x_0 = 2,\ x_1 = 5,\ x_2 = 15 \end{array}\right\} (P1)$$

El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\ \lambda^2 + 11\ \lambda - 6$ y sus raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, que son distintas, entonces la solución general es $x_n = A_1\ 1^n + A_2\ 2^n + A_3\ 3^n$. Para determinar las constantes, A_i, utilizamos las condiciones iniciales y se forma el sistema

$$\left.\begin{array}{rcccc} x_0 & = & 2 & = & A_1 + A_2 + A_3 \\ x_1 & = & 5 & = & A_1 + A_2\ 2 + A_3\ 3 \\ x_2 & = & 15 & = & A_1 + A_2\ 4 + A_3\ 9 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = 1,\ A_2 = -1,\ A_3 = 2$$

Luego la solución al problema $P1$ es $x_n = 2 \cdot 3^n - 2^n + 1$.

A continuación abordamos el caso de que las raíces de la ecuación característica sean múltiples.

Definición 4.3. *Dado el polinomio* $P(x)$ *con coeficientes en* $\mathbb{C}$, *es decir* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, *diremos que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *es una raíz múltiple de orden* h *de la ecuación* $P(x) = 0$, *si* $P(x) = (x - \lambda)^h\ Q(x)$, *con* $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y* $Q(\lambda) \neq 0$.

Proposición 4.10. *Sea el polinomio $P(x)$, con $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es una raíz múltiple de orden h de la ecuación $P(x) = 0$ si y sólo si $P(\lambda) = 0$, $P'(\lambda) = 0$, $\ldots$, $P^{(h-1}(\lambda) = 0$ y $P^{(h}(\lambda) \neq 0$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $P(x) = (x-\lambda)^h\ Q(x)$ evidentemente $P(\lambda) = 0$. $P'(x) = (x-\lambda)^{h-1}(h\ Q(x) + (x-\lambda)\ Q'(x)$ y $P'(\lambda) = 0$. Continuando con el proceso llegamos a que $P^{(h-1}(x) = (x-\lambda)(h(h-1)\cdots 2\ Q(x) + (x-\lambda)^{h-1}\ Q^{(h-1}(x))$ y $P^{(h-1}(\lambda) = 0$. Por último, $P^{(h}(x) = h!\ Q(x) + (x-\lambda)^h\ Q^{(h}(x)$, por tanto $P^{(h}(\lambda) = h!\ Q(\lambda) + 0 \neq 0$ porque $Q(\lambda) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Si el grado del polinomio $P(x)$ es n el desarrollo en serie de Taylor alrededor de λ es

$$P(x) = (x-\lambda)^h \left[\frac{P^{(h}(\lambda)}{h!} + \frac{P^{(h+1}(\lambda)}{(h+1)!} + \ldots + \frac{P^{(n}(\lambda)}{n!} \right] = (x-\lambda)^h\ Q(x)$$

Obteniéndose el resultado con $Q(x)$ la suma entre corchetes. □

Proposición 4.11. *Si λ es una raíz no nula con orden de multiplicidad h $(h > 1)$ de la ecuación característica de la relación $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}$, entonces el conjunto $\{(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (n^{h-1}\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes.*

Demostración. Son independientes por la Prop. 4.4.

Queda como ejercicio demostrar que si $m \in \{0, 1, 2, \ldots, h-1\}$, entonces la secuencia $(n^m\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}$. □

Corolario 4.2. *Sea la relación $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k}$, con polinomio característico $P(x)$. Si las raíces no nulas son $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ con orden de multiplicidad $h_1,\ h_2, \ldots, h_l$, respectivamente, y $h_1 + h_2 + \ldots + h_l = k$, entonces la solución general de la relación dada es*

$$x_n = \left(A_{11}\lambda_1^n + A_{12}\ n\lambda_1^n + \ldots + A_{1h_1}\ n^{h_1-1}\lambda_1^n\right) + \ldots + \left(A_{l1}\lambda_l^n + A_{l2}\ n\lambda_l^n + \ldots + A_{lh_l}\ n^{h_l-1}\lambda_l^n\right)$$

siendo A_{1j} constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.3. Sea la relación lineal homogénea de orden tres $x_n = -3\ x_{n-1} - 3\ x_{n-2} - 6\ x_{n-3}$ con las condiciones iniciales $x_0 = 1,\ x_1 = -2$ y $x_2 = -1$, que denotaremos por $P2$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = -3\ x_{n-1} - 3\ x_{n-2} - 6\ x_{n-3} \\ x_0 = 1,\ x_1 = -2,\ x_2 = -1 \end{array}\right\} (P2)$$

El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\ \lambda^2 + 3\ \lambda + 1$ y su única raíz es $\lambda = -1$, con orden de multiplicidad 3. Entonces la solución general es $x_n = A_1\ (-1)^n + A_2\ n\ (-1)^n + A_3\ n^2\ (-1)^n$. Para determinar las constantes usamos las condiciones iniciales, obteniendo

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_0 &=& 1 &=& A_1 \\ x_1 &=& -2 &=& -A_1 -_2 -A_3 \\ x_2 &=& -1 &=& A_1 + A_2\ 2 + A_3\ 4 \end{array}\right\} \rightarrow A_1 = 1,\ A_2 = 3,\ A_3 = -2$$

Luego la solución al problema $P2$ es $x_n = (-1)^n + 3\ n(-1)^n - 2\ n^2(-1)^n = (-1)^n\ (-2\ n^2 + 3\ n + 1)$.

4.4. Soluciones particulares

Como ya se ha mencionado las soluciones de una relación lineal completa se obtienen como suma de una solución particular de la completa y alguna solución de la relación homogénea asociada. En este apartado describiremos dos métodos de cálculo de soluciones particulares, el método de variación de las constantes, que ya se mencionó en la Sección 4.3 y el método de reducción a ecuación homogénea.

El método de variación de las constantes que exponemos es para encontrar una solución particular de la relación de recurrencia suponiendo que el término independiente, e_n, es una función polinómica, exponencial o trigonométrica.

I.- Supongamos que $e_n = (l_0+l_1 n+\ldots+l_k n^k)\ b^n$ es el producto de un polinomio por una exponencial (polinómicas con $b = 1$ y exponenciales con $l_1 = \ldots = l_k = 0$). La forma que adopta la solución particular depende de las raíces de la ecuación característica

Tipo de raíz	Solución particular
b no es raíz	$(C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$
b es raíz simple	$n(C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$
b es raíz múltiple de orden h	$n^h\ (C_0 + C_1 n + \ldots + C_k n^k)\ b^n$

II.- Si e_n es de tipo trigonométrico, $e_n = b^n\ \cos \alpha n$, o $b^n\ \operatorname{sen} \alpha n$. En caso de que b sea complejo consideramos $e_n = b^n = |b|^n e^{jn\alpha}$). La forma de solución particular es $e_n = b^n(A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha)$. Si $b \pm j\alpha$ son además raíces de la ecuación característica de orden h, entonces la solución particular adopta la forma $e_n = n^{h-1}\ b^n(A \cos n\alpha + B \operatorname{sen} n\alpha)$

Ejemplo 4.4. Con objeto de ilustrar el método consideraremos el caso de relaciones de orden dos. Analizaremos la forma de soluciones particulares de la relación lineal homogénea de orden dos $x_n = 6\ x_{n-1} - 9\ x_{n-2} + e_n$ cuando $e_n = 3^n$, $e_n = n\ 3^n$, $e_n = n^2 2^n$ y $e_n = (n^2 + 1)3^n$.

El polinomio característico es $x^2 - 6x + 9$ y la única raíz (doble) es $x = 3$. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea es $x_n = A_1\ 3^n + A_2\ n\ 3^n$.

Para la forma de la solución particular se debe tener en cuenta si las raíces características intervienen en e_n.

1. Si $e_n = 3^n$, y puesto que 3 es raíz doble del polinomio característico, la solución particular será de la forma $y_n = B\ n^2\ 3^n$. Sustituyendo en la relación y operando

$$B\ n^2\ 3^n = 6B\ (n-1)^2\ 3^{n-1} - 9B\ (n-2)^2\ 3^{n-2} + 3^n \Rightarrow B\ n^2\ 3^n = 2B\ (n-1)^2\ 3^n - B\ (n-2)^2\ 3^n + 3^n$$

Dividiendo por 3^n e igualando los coeficientes de los polinomios de grado tres en n obtenemos $B = \dfrac{1}{2}$. Luego, la solución es $z_n = \dfrac{1}{2}\ n^2\ 3^n + A_1\ 3^n + A_2\ n\ 3^n$

2. Si $e_n = n\ 3^n$, por ser 3 raíz característica la forma de la solución particular es $y_n = n^2(Bn+C)3^n$.

3. Si $e_n = n^2\ 2^n$, por no ser 2 raíz característica la forma de la solución particular es $y_n = (Bn^2 + Cn + D)2^n$.

4. Si $e_n = (n^2+1)3^n$, por ser 3 raíz la forma de la solución particular es $y_n = n^2(Bn^2+Bn+C)3^n$.

Como ejercicio calcula las constantes, si existen, de los tres últimos casos.

El segundo método consiste en realizar una combinación lineal de las relaciones de recurrencia desplazadas de forma que se obtenga una relación lineal homogénea, aunque de grado superior, que puede resolverse en ocasiones.

Proposición 4.12. *Si* $(x_n^{(1)})$ *es solución de* $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n$ *y* $(x_n^{(2)})$ *es solución de* $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + f_n$*, entonces* $(x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$ *es solución de* $x_n = a_1\ x_{n-1} + a_2\ x_{n-2} + \ldots + a_k\ x_{n-k} + e_n + f_n$

Demostración. Por ser soluciones de los problemas mencionados se verifica que

$$x_n^{(1)} = a_1\ x_{n-1}^{(1)} + a_2\ x_{n-2}^{(1)} + \ldots + a_k\ x_{n-k}^{(1)} + e_n$$
$$x_n^{(2)} = a_1\ x_{n-1}^{(2)} + a_2\ x_{n-2}^{(2)} + \ldots + a_k\ x_{n-k}^{(2)} + f_n$$

Sumando obtenemos $x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = a_1(x_{n-1}^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}) + a_2(x_{n-2}^{(1)} + x_{n-2}^{(2)}) + \ldots + a_k(x_{n-k}^{(1)} + x_{n-k}^{(2)}) + e_n + f_n$.
□

Referencias

[1] E. Bujalance, J.A. Bujalance, A.F. Costa, E. Martínez, *Elementos de Matemática Discreta*, Sanz y Torres, Madrid, 1993.

[2] E. Bujalance, J.A. Bujalance, A.F. Costa, E. Martínez, *Problemas de Elementos de Matemática Discreta*, Sanz y Torres, Madrid, 1993.

[3] R.L. Grimaldi, *Matemática discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Prentice-Hall, México, 1998.

[4] R.L. Grimaldi, *Matemática discreta y combinatoria*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[5] P. Henrici, *Elementos de análisis numérico*, Ed. Trillas, México, 1972.

[6] K. H. Rosen, *Matemática discreta y sus aplicaciones*, 5ª ed., McGraw-Hill Iberoamericana, 2004.

[7] A.A. Samarski, E.S. Nikolaev, *Métodos de solución de las ecuaciones reticulares*, Ed. Mir, 1982.