Tema 5: Grafos

E. Martín, A. Méndez, C. Ortiz y J. Sendra

Mayo de 2012

Índice

Guía del tema 5

Asignatura:	Matemática Discreta
Titulo de la Unidad:	Grafos y árboles
Semanas de impartición en el cuatrimestre:	Del 7 al 27 de mayo

Requisitos para seguir con aprovechamiento el tema

- No se requieren conocimientos previos específicos, aunque es conveniente conocer el uso de matrices.

Objetivos

Objetivo general: Introducir a los alumnos en tópicos de Teoría de Grafos, a fin de que puedan aplicarlos en su ámbito de conocimiento, así como descubrir nuevos temas relacionados.

Objetivos Específicos:

- Comprender y manejar los conceptos y problemas básicos de la teoría de grafos.
- Comprender y manejar los métodos usados en las demostraciones de algunos resultados en teoría de grafos.
- Ser capaz de aplicar resultados teóricos a algunos problemas particulares de grafos.
- Poder relacionar la teoría de grafos con problemas de otras ramas de las matemáticas y otras disciplinas.

Contenidos teóricos

- Grafos.

  1. Nociones básicas en los grafos.
  2. Pseudografos, multigrafos y digrafos.
  3. Primer teorema de la teoría de grafos.
  4. Grafos eulerianos y hamiltonianos.

Evaluación Se entregarán los ejercicios propuestos y la práctica (con Maple) antes de la fecha límite **lunes 28 de mayo de 2012**

1. Grafos

Al diseñar una red de ordenadores y los enlaces entre ellos podemos representarlo en un dibujo, donde los puntos hacen alusión a los ordenadores y unas líneas que los unen representando los nexos entre ellos.

Este dibujo nos da una idea de lo que es un grafo. Es un conjunto donde los vértices del grafo serían cada uno de los ordenadores, mientras que las líneas que los unen serían las conexiones que estableciéramos entre cada par de ordenadores.

La gran cantidad de aplicaciones de los grafos en Matemáticas y otras disciplinas, es la causa por la que la Teoría de Grafos es una de las partes de las Matemáticas que más se ha desarrollado en las últimas décadas. Los problemas clásicos como el de los siete puentes de Königsberg o el de la coloración de un mapa, y otros problemas de redes de comunicación, de emparejamiento, vigilancia o diseño de circuitos integrados son sólo otros ejemplos de aplicación de los grafos.

Nos proponemos ahora introducir los conceptos básicos de la Teoría de Grafos y algunos de sus resultados más importantes en grafos finitos, es decir, aquellos con una cantidad finita de vértices y aristas. Conviene hacer notar que las definiciones que se dan en diferentes textos pueden no coincidir, razón por la que es posible que las definiciones dadas a continuación puedan diferir de las que se puedan encontrar en otras fuentes.

Definición 1.1. *Un grafo es un par $G = (V, A)$ siendo V un conjunto no vacío, a cuyos elementos llamaremos vértices, y A es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, a los que llamaremos aristas.*

Definición 1.2. *Se dice que dos vértices de un grafo a y b son adyacentes si $\{a, b\} \in A$, es decir, están unidos por una arista. En ese caso, decimos que a y b son los extremos de la arista $\{a, b\}$.*

Ejemplo 1.1. Podemos considerar los siguientes grafos:

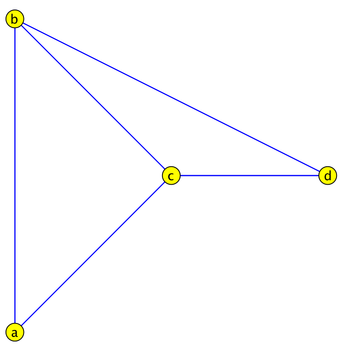


Figura 1: Grafo 1

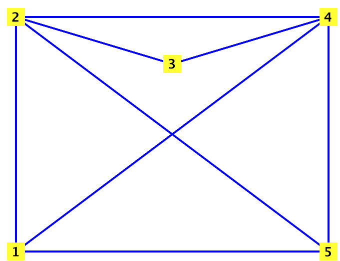


Figura 2: Grafo 2

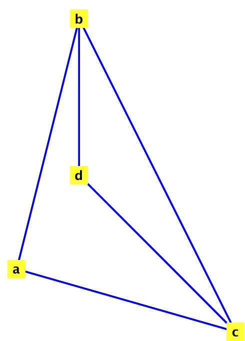


Figura 3: Grafo 3

La Figura 1 representa al grafo $G = (V, A)$, con $V = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. La Figura 2 representa al grafo $G = (V, A)$, con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

$\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$.

La Figura 3 representa el mismo grafo que la Figura 1.

Definición 1.3. *Un grafo completo es el que tiene todas las aristas posibles, es decir, cada vértice del grafo está unido con todos los demás.*

El grafo completo con n *vértices se denota* K_n.

Ejemplo 1.2. Si seis ciudades las unimos por carretera en todas las formas posibles, el mapa de carreteras resultante es un grafo completo con seis vértices (las ciudades) y todas las aristas posibles (las carreteras). Se trata del grafo completo K_6.

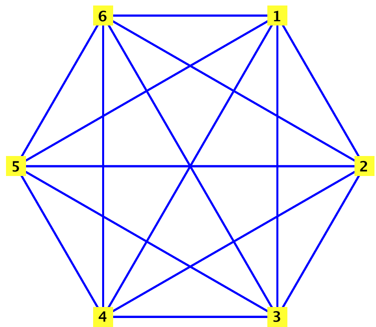


Figura 4: Grafo completo con 6 vértices

Observación 1.1. El grafo completo K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas, que corresponden a las diferentes formas de elegir dos vértices de entre los n que tiene, es decir el nº de combinaciones de n elementos tomados de 2 en 2.

Definición 1.4. *Un grafo donde el conjunto de vértices V está dividido en dos subconjuntos V_1 y V_2, y cada vértice de uno de los subconjuntos se une con todos los del otro (y viceversa), pero no con los de su mismo subconjunto, se denomina grafo bipartito completo.*

El grafo bipartito completo con n *vértices en V_1 y* m *vértices en V_2 se denota $K_{n,m}$.*

Ejemplo 1.3. Si en una asignatura hay dos grupos de alumnos, $V_1 = \{1,2,3\}$ y $V_2 = \{4,5,6,7,8\}$, se pretende que hagan un trabajo por parejas formadas por un alumno de cada uno de los grupos, las posibles parejas que pueden formarse son las aristas del grafo bipartito completo $K_{3,5}$, con :

Observación 1.2. Es evidente que son intercambiables los papeles de V_1 y V_2, por tanto $K_{n,m} = K_{m,n}$.

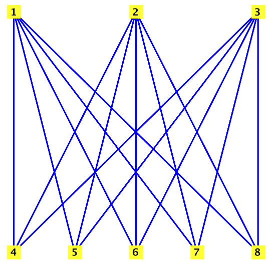


Figura 5: Grafo bipartito completo con 3 vértices en V_1 y 5 vértices en V_2

2. Pseudografos, Multigrafos, Digrafos

En la definición de grafo, una arista no puede empezar y terminar en el mismo vértice, pues hemos establecido que las aristas son pares no ordenados de vértices *distintos*.

Definición 2.1. *Llamaremos lazos a los pares de vértices idénticos. Un pseudografo es un grafo que admite lazos.*

Ejemplo 2.1. El siguiente dibujo representa un pseudografo con tres lazos:

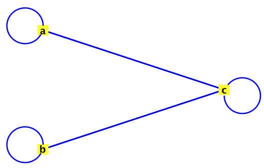


Figura 6: Pseudografo de tres lazos

Definición 2.2. *Un multigrafo es un grafo en el que hay pares de vértices unidos por más de una arista, es decir, que tiene aristas múltiples.*

Ejemplo 2.2. El siguiente dibujo representa un multigrafo con dos pares de aristas múltiples:

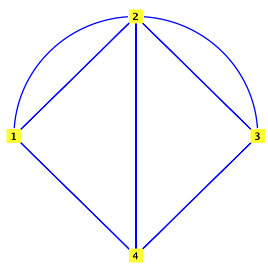


Figura 7: Multigrafo con dos pares de aristas

Observación 2.1. Resulta sencillo transformar un pseudografo o un multigrafo en un grafo añadiendo un vértice en medio de cada lazo o de algunas aristas múltiples. En las siguientes figuras, añadiendo vértices y uniéndolos mediante aristas, hemos convertido el pseudografo de la Figura 6 y el multigrafo de la Figura 7 en grafos.

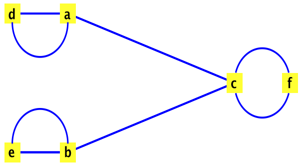


Figura 8: Grafo generado a partir de la Fig. 6

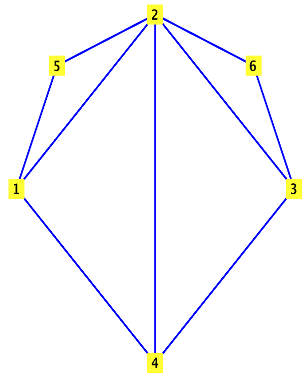


Figura 9: Grafo generado a partir de la Fig. 7

En un grafo, las aristas son las líneas que unen dos vértices sin una orientación, es decir, no hay un vértice donde empieza la arista y otro donde termina. Si ponemos en relevancia esta idea de donde empiezan y donde terminan las "aristas", podemos decir que las hemos transformado en "flechas"

Definición 2.3. *Un* digrafo *o* grafo dirigido *es un grafo donde las aristas tienen una orientación.*

Ejemplo 2.3. Las siguientes figuras muestran dos digrafos diferentes:

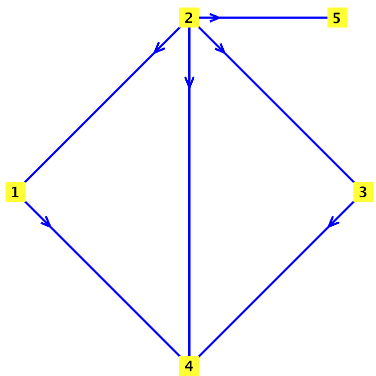


Figura 10: Digrafo 1

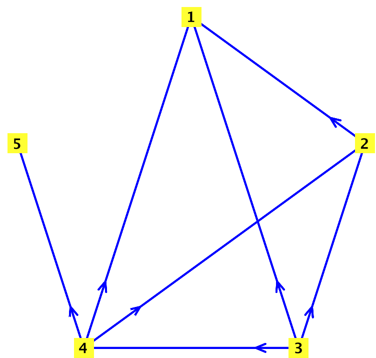


Figura 11: Digrafo 2

3. Isomorfismos entre grafos

Como se indicó en los grafos de las figuras 1 y 3, que repetimos a continuación, representan el mismo grafo. Es posible trasladar los vértices de uno de ellos hasta hacerlos coincidir con los del otro, sin crear nuevas aristas y deformando unas en otras. Para que esto pueda ocurrir el nº de vértices, y aristas, de cada grafo debe ser el mismo y el hecho de deformar sin ruptura las aristas indica que se conserva la adyacencia entre vértices.

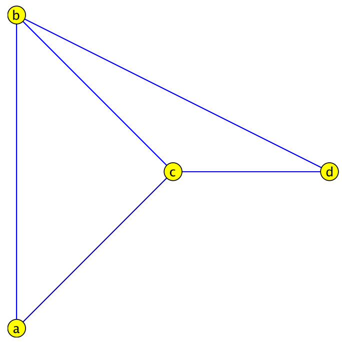


Figura 12: Grafo 1

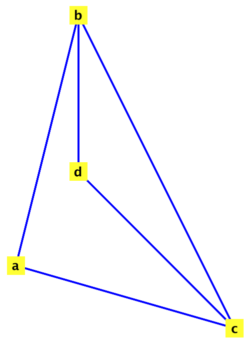


Figura 13: Grafo 3

Definición 3.1. *Un* isomorfismo entre dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ *y* $G_2 = (V_2, A_2)$ *es una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices que preserva la adyacencia. Es decir, es una aplicación biyectiva* $f : V_1 \to V_2$ *para la que se verifica que* $\{a, b\}$ *es una arista de* G_1 *si y solo si* $\{f(a), f(b)\}$ *es una arista de* G_2.

Dos grafos *son* isomorfos *si existe un isomorfismo entre ellos.*

Observación 3.1. No resulta fácil en general (sobre todo para grafos con muchas aristas) determinar si dos grafos son isomorfos o no. Puesto que tener el mismo número de vértices y de aristas es condición necesaria (aunque no suficiente) para que dos grafos sean isomorfos, suele ser más sencillo determinar cuando dos grafos no son isomorfos.

Ejemplo 3.1. Intentamos determinar si los dos grafos, G_1 y G_2, son o no isomorfos:

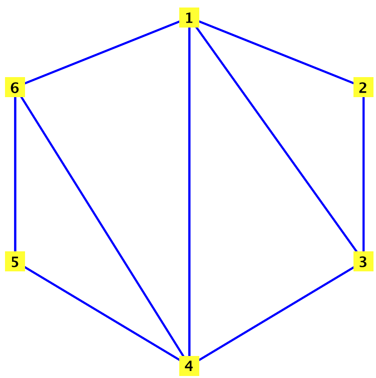


Figura 14: Grafo G_1

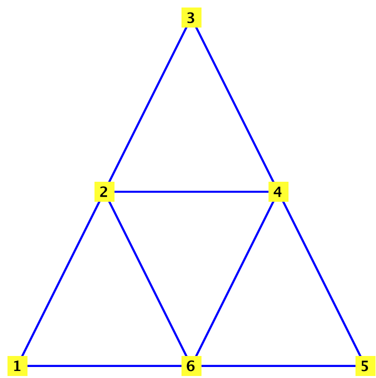


Figura 15: Grafo G_2

Ambos tienen 6 vértices y 9 aristas, pero observemos que del vértice *3* de G_1 salen 3 aristas a los vértices *1*, *2* y *4*, mientras que en el grafo G_2 no hay ningún vértice del que salgan 3 aristas ya que de todos salen 2 ó 4. En consecuencia el vértice *3* de G_1 no puede "trasladarse" a ningún vértice de G_2 mediante un isomorfismo. En otras palabras: los grafos no son isomorfos.

Definición 3.2. *Dado un grafo* G *y* v *un vértice suyo, se denomina* grado de v *al número de aristas que concurren en* v*, es decir tienen al vértice* v *por extremo. Se representa por* $gr(v)$.

Ejemplo 3.2. En el grafo G_1 de la Figura 14 tenemos gr(1)=gr(4)=4, gr(2)=gr(5)=2 y gr(3)=gr(6)=3.

En el grafo G_2 de la Figura 15 gr(2)=gr(4)=gr(6)=4, gr(1)=gr(3)=gr(5)=2.

Observación 3.2. Esta definición de grado de un vértice es aplicable a multigrafos. En el multigrafo de la Figura 7 tenemos que gr(1)=gr(3)=gr(4)=3 y que gr(2)=5. En el caso de pseudografos los lazos cuentan como dos aristas. Así, en el pseudografo de la Figura 6 es gr(a)=gr(b)=3 y gr(c)=4, pues los vértices a y b tienen un lazo y una arista, mientras que c tiene una arista más.

Definición 3.3. *Un grafo es* k-regular*, con $k \in \mathbb{N}$, si todos los vértices tienen el mismo grado* k*.*

Ejemplo 3.3. El grafo de la Figura 16 es 3-regular, y el de la Figura 17 es 4-regular:

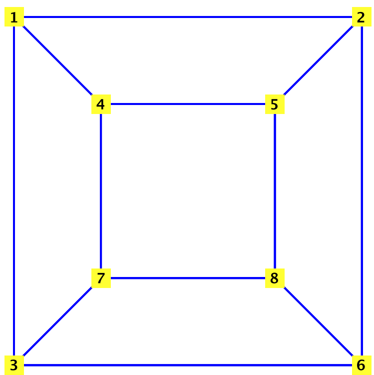


Figura 16: Grafo 3-regular

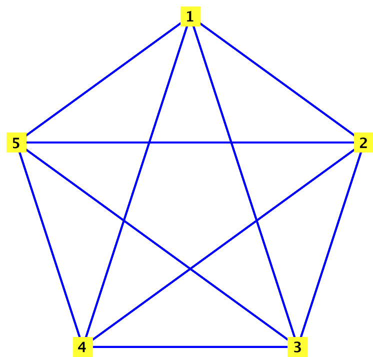


Figura 17: Grafo 4-regular

Observación 3.3. Los grafos completos K_n son un ejemplo notable de los grafos k-regulares. Cada vértice de un grafo K_n está unido con los $n-1$ vértices restantes, teniendo por tanto grado $n-1$. Es decir, K_n es $(n-1)$-regular. El grafo de la Figura 17 es K_5.

Ejemplo 3.4. Observemos estos dos grafos: Ambos tienen ocho vértices y nueve aristas; también ambos

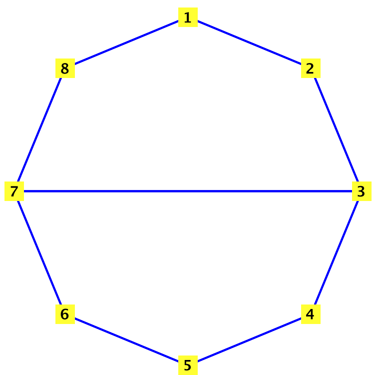


Figura 18

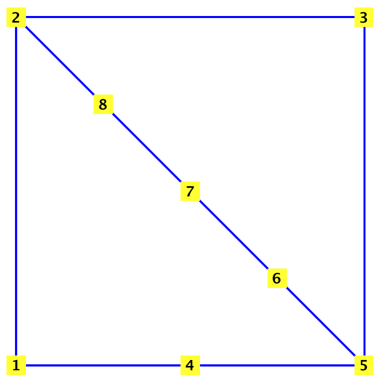


Figura 19

tienen dos vértices de grado 3 y seis de grado 2. Aún así, resulta que estos grafos no son isomorfos, puesto que en el grafo de la Figura 18 los dos vértices de grado 3 son adycentes, mientras que los dos vértices de grado 3 del grafo de la Figura 19 no lo son. Sabiendo que cualquier isomorfismo entre grafos preserva la adyacencia, por lo que podemos asegurar que no existe un isomorfismo entre estos dos grafos.

La existencia de una biyección entre los conjuntos de vértices que conserve los grados (no necesariamente la adyacencia), si bien es condición necesaria, no es condición suficiente para que dos grafos sean isomorfos. En realidad podríamos añadir alguna otra condición necesaria adicional, pero no se conoce un conjunto de condiciones que permita asegurar que dos grafos sean isomorfos.

4. Primer teorema de la Teoría de Grafos

Teorema 4.1 (Primer teorema de la teoría de Grafos)**.** *Si* $G = (V, A)$ *es un grafo, con* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *el conjunto de sus vértices. Denotemos por* $Card(A)$ *el número de aristas de* G*. Entonces:*

$$gr(v_1) + gr(v_2) + ... + gr(v_n) = 2 \cdot Card(A)$$

Por lo que existe un número par de vértices de grado impar.

Demostración. Al sumar los grados de todos los vértices estamos sumando el número de aristas que tienen a cada vértice, v_i, por extremo. Puesto que toda arista tiene exactamente dos vértices como extremos, cada arista ha sido contada dos veces. Así que, la suma de los grados de todos los vértices es el doble que el número de aristas.

Consideramos que los primeros vértices son los que tienen grado impar, $v_1, \ldots, v_t$, y los demás de grado par, $v_{t+1}, \ldots, v_n$, queremos demostrar que t es par. Puesto que $2 \cdot Card(A)$ es evidentemente par, tenemos:

$$\underbrace{impar + \ldots + impar}_{\text{t veces}} + \underbrace{par + \ldots + par}_{\text{n-t veces}} = par \quad \Rightarrow \quad \underbrace{impar + \ldots + impar}_{\text{t veces}} = par$$

Entonces, al sumar t números impares obtenemos un número par, lo cual es posible sólo si el número de sumandos es par. En conclusión t es par. □

Corolario 4.1. *Si* $G = (V, A)$ *es un grafo k-regular con* $Card(V)$ *vértices y* $Card(A)$ *aristas, entonces* $k \cdot Card(V) = 2 \cdot Card(A)$.

Demostración. Es muy sencilla a partir del teorema y se deja como ejercicio. □

Ejemplo 4.1. Para el grafo de la Figura 14 tenemos:

$$gr(1) + gr(2) + ... + gr(6) = 4 + 2 + 3 + 4 + 2 + 3 = 2 \cdot Card(A) = 2 \cdot 9$$

Para el grafo de la Figura 15 tenemos:

$$gr(1) + gr(2) + ... + gr(6) = 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 = 2 \cdot Card(A) = 2 \cdot 9$$

Observemos que en el primer caso hay dos vértices de grado impar y ninguno en el segundo.

Ejemplo 4.2 (Lema del apretón de manos). En una reunión 7 invitados, y cada uno de ellos estrecha la mano de los invitados que conoce. Entonces siempre hay al menos uno que da una cantidad par de apretones de mano.

Consideramos un grafo que represente esta situación, cada invitado es un vértice y cada arista un apretón de manos entre dos invitados que se conocen. Entonces, el grado de cada vértice es el número de apretones de mano que da cada invitado. Por el primer teorema de la Teoría de Grafos sabemos que la suma de estos apretones es par, así que no es posible que los 7 invitados den un número impar de apretones de mano (ya que resultaría que el número total es impar, contradiciendo el resultado del teorema) y debe haber al menos un invitado que dé un número par de apretones de mano.

Se puede concluir lo mismo con cualquier cantidad impar de invitados. Por este ejemplo, el primer teorema de la Teoría de Grafos se conoce también como *lema del apretón de manos*.

5. Caminos en un grafo

Un camino en un grafo es una ruta que nos lleva de un vértice origen, a través de aristas que unen diferentes vértices, hasta un vértice extremo. Atendiendo a diferentes posibilidades como que el camino empieza y termina en el mismo sitio, o si se recorre una misma arista más de una vez, o si se pasa por un vértice determinado más de una vez, tenemos diferentes caminos que dan lugar a diferentes definiciones.

Conviene advertir de nuevo que estas definiciones pueden diferir de un texto a otro.

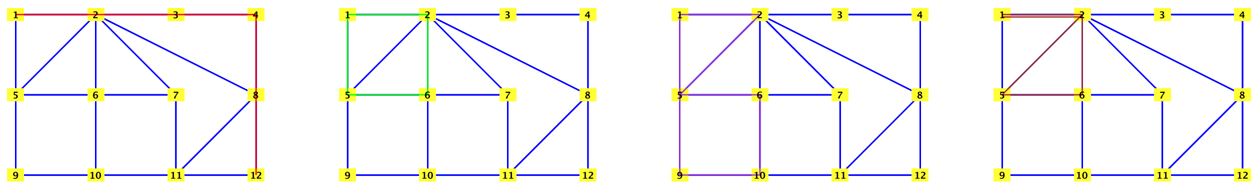
Definición 5.1. *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Un* camino en G *es una sucesión de vértices, no necesariamente distintos, $C = (v_1, v_2, ..., v_k)$ tales que para cualquier i, los vértices v_i y v_{i+1} son adyacentes, es decir, están unidos por una arista.*

Se llaman extremos del camino *a los vértices v_1 y v_k. Cuando estos dos vértices coinciden, es decir, cuando el camino empieza y termina en el mismo vértice, se dice que el* camino es cerrado.

La longitud del camino es el número de aristas que recorre, contando cada arista tantas veces como se recorra.

Observación 5.1. En los multigrafos, el camino queda definido con la sucesión y especificando cual de las aristas que unen dos vértices, v_i y v_{i+1}, es la que se recorre, en el caso de que haya más de una que unan ambos vértices. Análogamente, con los pseudografos, si se quiere recorrer un lazo de un vértice, hay que especificarlo al llegar a éste. En consecuencia, para multigrafos y pseudografos un camino es una sucesión de vértices, como la de la definición anterior, en la que, entre cada dos vértices, hay que intercalar el nombre de la arista o lazo que se recorre.

Ejemplo 5.1. Observemos diferentes rutas en el grafo de la siguiente figura:



Camino C_1 Camino C_3 Camino C_4 Camino C_5

Figura 18: Caminos en un grafo

La sucesión de vértices $C_1 = (1, 2, 3, 4, 8, 12)$ es un camino en el grafo de origen el vértice "1" y extremo "12", y cuya longitud es 5. La sucesión $C_2 = (9, 10, 7)$ no es un camino puesto que los vértices "10" y "7" no son adyacentes. La sucesión $C_3 = (1, 2, 6, 5, 1)$ es un camino cerrado de longitud 4. La sucesión $C_4 = (1, 2, 5, 6, 10, 9, 5, 1)$ es también un camino cerrado de longitud 7, en él se repiten los vértices 1 y 5, y no se repite ninguna arista. La sucesión $C_5 = (1, 2, 5, 6, 2, 1)$ es un camino cerrado en el que se repiten vértices y aristas.

Definición 5.2. *Sea $G = (V, A)$ un grafo. Se dice que el grafo es* conexo *si dos vértices cualesquiera se pueden unir mediante un camino.*

Si hay al menos dos vértices que no pueden unirse por un camino, se dice que el grafo es no conexo *o* disconexo.

Ejemplo 5.2. Observemos estos dos grafos: El grafo de la Figura 21 es conexo, ya que el camino

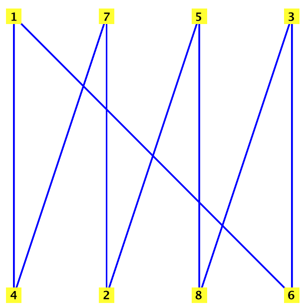


Figura 19: Grafo conexo

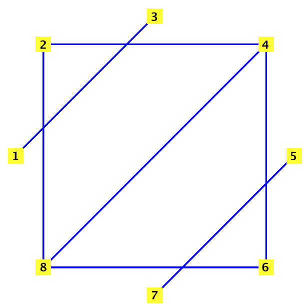


Figura 20: Grafo no conexo

$C = (1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1)$ es cerrado y recorre todos los vértices, por lo que cualquier par de vértices se puede unir por un camino empleando alguno de sus trozos.

El grafo de la Figura 22 es no conexo pues, por ejemplo, no hay ningún camino que una los vértices "1" y "2".

Observación 5.2. Acabamos de comprobar que no todos los grafos son conexos. Cada una de las partes conexas de un grafo se llama *componente conexa de lgrafo*. Aunque la definición rigurosa es más complicada, se entiende que una componente conexa de un grafo está formada por todos los vértices que se pueden unir entre sí mediante caminos de cualquier longitud.

De este modo, el grafo de la Figura 22 tiene tres componentes conexas: $\{1,3\}$, $\{5,7\}$ y $\{2,4,6,8\}$. El grafo de la Figura 21 tiene una única componente conexa ya que el grafo es conexo.

Observación 5.3. Cuando un grafo tiene pocos vértices es relativamente fácil analizar su conexión, pero cuando tiene muchos vértices el grado es más complejo y usando la llamada *matriz de adyacencia* se puede determinar si es o no conexo. Además, aplicaciones como **Maple** tienen implementadas estas herramientas.

6. Grafos Eulerianos

Se denomina *circuito* a un camino cerrado en el que no se repite ninguna arista. En la Figura 18, el camino $C_3 = (1,2,6,5,1)$ es un circuito. Este circuito recorre una parte de todas las aristas.

A continuación vamos a estudiar si un grafo admite un circuito que recorra todas sus aristas sin repetir ninguna. Esta clase de circuitos se denominan *eulerianos* y un grafo que los admite se llama *grafo euleriano.* En 1736 Leonhard Euler publicó la solución del problema de los siete puentes de Königsberg, por lo que es considerado el padre de la Teoría de Grafos.

Definición 6.1. *Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo.*

1. *Un* circuito *en G es un camino cerrado en el que no se repiten las aristas.*

2. *Un* circuito euleriano *en G es un circuito que recorre todas las aristas de G.*

3. *Un* grafo euleriano *es un grafo conexo que admite un circuito euleriano.*

Ejemplo 6.1. En el grafo de la Figura 2, $C = (1,2,3,4,1)$ es un circuito no euleriano por no recorrer todas las aristas. Para este grafo no es posible encontrar un circuito euleriano.

En el grafo de la Figura 1, $C = (c,a,b,c,d)$ no es un camino euleriano, ya que no es un circuito. Hemos encontrado un camino que recorre todas las aristas, pero no es cerrado. Cabe señalar que la existencia de un camino que recorra todas las aristas no implica que el grafo sea euleriano, pues el camino no es un circuito.

El grafo de la Figura 21 sí es euleriano: Por ejemplo, el circuito $C = (3,2,1,3,6,1,5,2,4,5,6,4,3)$ es euleriano, aunque no es el único.

Observación 6.1. Informalmente, un grafo será euleriano cuando seamos capaces de trazarle de manera continua, sin levantar el lápiz del papel, sin dibujar dos veces la misma arista, y coincidiendo el origen y el extremo.

Proposición 6.1. *Todos los vértices de un grafo euleriano tienen grado par.*

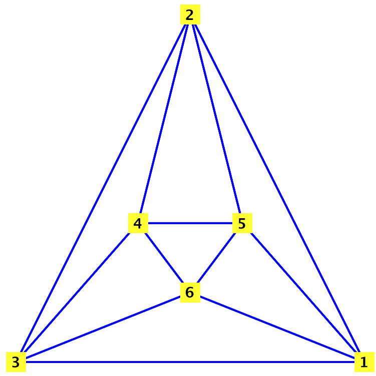


Figura 21: Grafo euleriano

Demostración. Eligiendo un circuito euleriano cualquiera del grafo, y analizando lo que ocurre en uno cualquiera de sus vértices, se puede comprobar que su grado ha ser par. Se deja como ejercicio. □

Observación 6.2. Que todos los vértices de un grafo conexo tengan grado par es condición necesaria para que sea euleriano.

Proposición 6.2. *Si G es un grafo conexo y todos sus vértices tienen grado par, entonces G es euleriano.*

La demostración queda fuera de los objetivos que se pretenden en este curso, ilustraremos mediante un ejemplo dicha demostración.

Ejemplo 6.2. Para construir un circuito euleriano en un grafo euleriano, elegiremos en primer lugar un circuito cualquiera, y a continuación iremos "colgando" otros circuitos de vértices suyos hasta acabar con todas las aristas.

Todos los vértices tienen grado par, por lo que tenemos asegurado que el proceso se puede continuar hasta haber recorrido todas las aristas. Si pensamos, por ejemplo, en el grafo de la Figura 21, podemos empezar por el circuito: $(3, 2, 1, 3)$ y "suprimir" sus aristas. Elegimos caminos formados por aristas aun no seleccionadas y con extremos en los vértices ya elegidos. Por ejemplo, del vértice "1" podemos ampliar con el circuito $(1, 5, 6, 1)$ y borramos sus aristas, con lo que obtenemos en total el circuito $(3, 2, 1, 5, 6, 1, 3)$. De "2" colgamos $(2, 4, 5, 2)$ y borramos sus aristas, quedando ahora el circuito $(3, 2, 4, 5, 2, 1, 5, 6, 1, 3)$. De "3" colgamos $(3, 4, 6, 3)$ y borramos sus aristas. De este modo tenemos $(3, 2, 4, 5, 2, 1, 5, 6, 1, 3, 4, 6, 3)$ que es un circuito euleriano.

Por último observar que no es necesario colgar todos los nuevos circuitos de vértices del circuito inicial, sino que se pueden ir colgando de cualquier vértice que vaya apareciendo.

Observación 6.3. Que todos los vértices de un grafo conexo tengan grado par es condición suficiente para que sea euleriano.

Corolario 6.1 (Criterio de Euler)**.** *Un grafo conexo es euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración. Es consecuencia directa de las dos proposiciones anteriores, ya que como hemos observado es condición necesaria y suficiente. □

Ejemplo 6.3. Los grafos de las Figuras 1, 2 y 3 no son eulerianos porque tienen vértices de grado impar. Los grafos de las Figuras 15 y 21 tienen todos los vértices de grado par, por lo que son eulerianos.

Ejemplo 6.4 (El problema de los siete puentes de Königsberg). El problema de los siete puentes de la ciudad de Königsberg, en la antigua Prusia oriental en el siglo XVIII, ciudad natal de Kant y, actualmente Kaliningrado (Rusia) es un célebre problema matemático que fue resuelto por Leonhard Euler en 1736 y dio origen a la Teoría de Grafos.

Figura 22: Plano y esquema de la ciudad de Königsberg

La ciudad estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Estas cuatro zonas estaban unidas por siete puentes, como se ve en el mapa de la Figura 22. Los habitantes de la ciudad, durante sus paseos, intentaban encontrar una ruta que cruzase cada uno de los siete puentes una sola vez, y acabase en el mismo lugar que habían empezado.

Euler enfocó el problema representando las cuatro partes de tierra por un punto y cada uno de los siete puentes por una línea, uniendo los puntos que se corresponden. Entonces, el problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas?

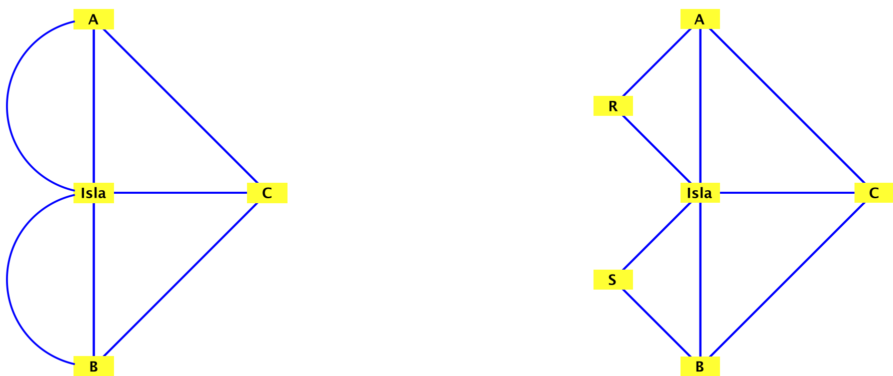


Figura 23: Multigrafo y grafo construido a partir del multigrafo

El problema de encontrar un camino recorriendo los siete puentes una sola vez y que acabe donde empezó, se traduce en lenguaje de grafos como encontrar un circuito euleriano en el multigrafo asociado, en la Figura 23.

Podemos añadir vértices en medio de algunas aristas múltiples del multigrafo, y así convertirlo en un grafo. Naturalmente, en este caso da igual estudiar el multigrafo que el grafo, puesto que un paseo que recorra una vez cada puente y que acabe donde empiece, es lo mismo que un circuito euleriano en el grafo. Si ahora aplicamos el criterio de Euler, vemos que no es posible realizar un paseo como deseaban los habitantes de Königsberg, porque todos los vértices del grafo asociado, salvo los dos añadidos, tienen grado impar.

En realidad no es necesario pasar del multigrafo al grafo, ya que el criterio de Euler es también válido para multigrafos, pues añadir vértices de grado par no varía su carácter euleriano o no euleriano.

Hay grafos que no son eulerianos, es decir, no admiten ningún circuito euleriano, pero que sí admiten caminos que recorren todas las aristas sin repetir ninguna.

Definición 6.2. *Un camino euleriano en un grafo G es un camino no cerrado que recorre todas las aristas sin repetir ninguna.*

La diferencia entre un camino euleriano y un circuito euleriano es que el primero no es cerrado y el segundo sí.

Ejemplo 6.5. Observemos estos dos grafos: El camino $(1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5)$ es un camino euleriano

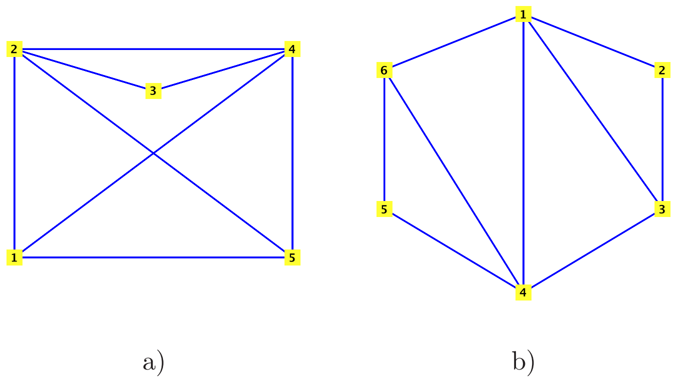


Figura 24: Ejemplos de caminos eulerianos en grafos no eulerianos

para el grafo de la Figura 24(a), y $(3, 1, 2, 3, 4, 1, 6, 4, 5, 6)$ lo es para el grafo de la Figura 24(b).

Los grafos de este ejemplo no son eulerianos puesto que no hay ningún circuito euleriano en ellos. De hecho ambos tienen vértices de grado impar, exactamente dos: 1 y 5 en el de la Figura 24(a), 3 y 6 en el de la Figura 24(b). Estos dos vértices son los extremos del camino euleriano que hemos descrito, y lo serían también de cualquier otro camino euleriano que pudiéramos encontrar en ellos. Esto se debe al criterio de Euler.

Teorema 6.1. *Un grafo conexo $G = (V, A)$ tiene un camino euleriano si y solo si hay exactamente* *dos vértices de grado impar. Además, en ese caso, todo camino euleriano empieza en uno de los dos vértices de grado impar y termina en el otro.*

Ilustraremos la demostración a través de un ejemplo.

Ejemplo 6.6 (Cómo construir un camino euleriano). Supongamos que tenemos un grafo G con exactamente dos vértices de grado impar. ¿Qué sucede si le añadimos una arista que una esos dos vértices? Tendremos que el grado de cada uno de esos dos vértices aumenta una unidad, por lo que ahora tienen grado par. Como el grado del resto de vértices sigue siendo par, el grafo es euleriano.

Si por ejemplo, al grafo de la Figura 24(b) le añadimos la arista $\{3, 6\}$, que une sus dos vértices de grado impar, entonces obtenemos el grafo de la Figura 25:

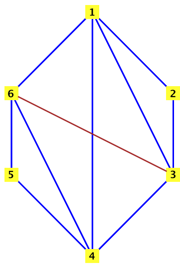


Figura 25: Construcción de un camino euleriano

En este grafo podemos construir un circuito euleriano como ya hemos explicado. Uno de ellos es: $(6, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 1, 3, 6)$. Este circuito recorre todas las aristas del grafo de la Figura 25, que son exactamente las del grafo de la Figura 24(b) más la arista añadida. Basta entonces quitar esta arista para obtener un camino euleriano en el grafo considerado: $(6, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 1, 3)$.

Si en el grafo original los dos vértices de grado impar ya están unidos por una arista, como en el grafo de la Figura 24(a), añadiendo una nueva arista tendríamos un multigrafo. Pero no supone ningún problema, ya que sabemos convertir un multigrafo en un grafo: Ahora basta con hacer lo mismo que en

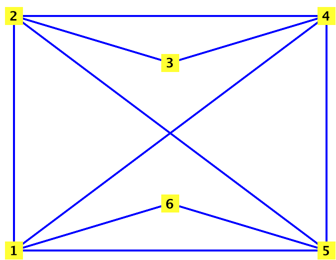


Figura 26: Construcción de un camino euleriano

el caso anterior, y así pasar del circuito euleriano $(1, 2, 4, 1, 5, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$ para el grafo de la Figura 27, al camino euleriano $(1, 2, 4, 1, 5, 2, 3, 4, 5)$ para el grafo de la Figura 24(a).

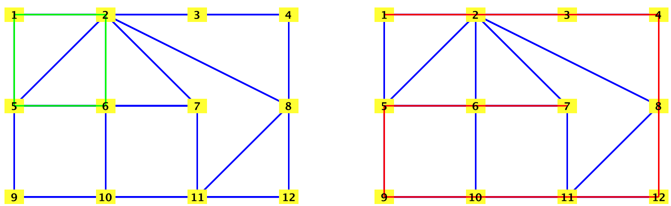
7. Grafos Hamiltonianos

Tras estudiar los circuitos eulerianos, nos proponemos analizar los caminos cerrados donde no se repitan los vértices. Es evidente que cualquier camino cerrado repite el primer y el último vértice.

Definición 7.1. *Sea $G = (V, A)$ un grafo.*

1. *Un* ciclo *en G es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último.*
2. *Un* ciclo hamiltoniano *en G es un ciclo que recorre todos los vértices de G.*
3. *Un* grafo hamiltoniano *es un grafo que admite un ciclo hamiltoniano.*

Ejemplo 7.1. En el grafo de la Figura 27(a), $(1, 2, 6, 5, 1)$ es un ciclo, pero no es hamiltoniano porque no recorre todos los vértices. En este mismo grafo, el camino $(1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 6, 7)$, en la



a) b)

Figura 27: Caminos no hamiltonianos

Figura 27(b), recorre todos sus vértices sin repetir ninguno, pero tampoco es hamiltoniano ya que no es cerrado. Un camino no cerrado que recorre todos los vértices sin repetir ninguno se llama *camino hamiltoniano*.

En este grafo podemos encontrar, además, un ciclo hamiltoniano: $(1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 7, 6, 10, 9, 5, 1)$.

Ejemplo 7.2. Sir William Rowan Hamilton, matemático irlandés del siglo XIX, inventó el juego del *dodecaedro del viajero*. Un dodecaedro es uno de los cinco poliedros platónicos, los regulares, y consta de doce caras que son pentágonos regulares. En el juego, los veinte vértices del dodecaedro se corresponde con una ciudad del mundo. El juego consiste en encontrar un camino que, recorriendo las aristas del dodecaedro y empezando y acabando en la misma ciudad, pase por todas las demás una sola vez. Se puede considerar el grafo de la Figura 28, y el juego consiste en encontrar lo que hemos definido com ciclo hamiltoniano, en honor a Hamilton. Es sencillo encontrar un ciclo hamiltoniano en este grafo. Se deja como ejercicio.

Observación 7.1. No se han probado resultados para asegurar hipótesis equivalentes (sencillas de aplicar) para verificar que un grafo sea hamiltoniano. Tampoco se conoce ningún algoritmo eficiente

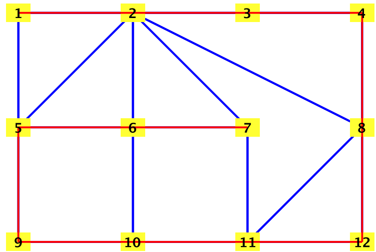
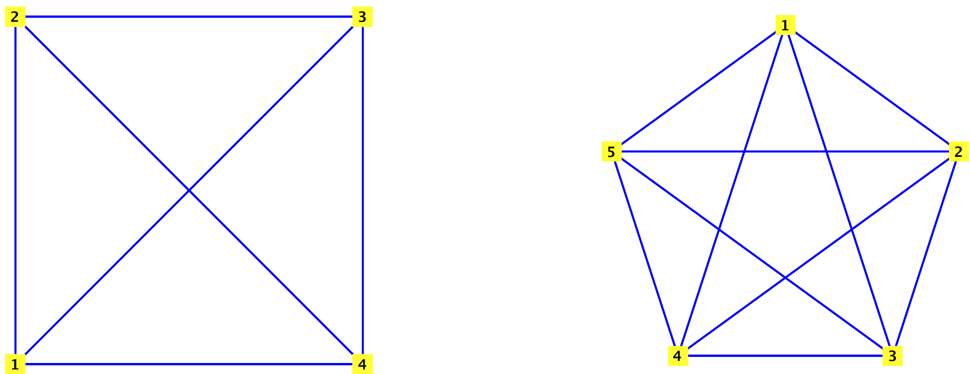


Figura 28

para buscar un ciclo hamiltoniano. No obstante, si a un grafo hamiltoniano le añadimos aristas, el grafo resultante sigue siendo hamiltoniano, puesto que el mismo ciclo inicial que era hamiltoniano lo sigue siendo, ya que hemos solo añadido aristas y no vértices. De manera que se puede sospechar que los grafo con muchas aristas tienen más posibilidades de ser hamiltonianos que los que tienen pocas. A continuación enunciamos un teorema, debido a Dirac, que no demostraremos.

Teorema 7.1. *Si $G = (V, A)$ un grafo conexo con $n \geqslant 3$ vértices. Si $gr(v) \geqslant \dfrac{n}{2}, \quad \forall v \in G$, entonces G es hamiltoniano.*

EJEMPLO 7.3. Los grafo completo K_n tiene n vértices, cada uno de los cuales está unido con los $n-1$ restantes, por lo que $gr(v) = n - 1, \quad \forall v \in K_n$. Esto significa, como ya sabíamos, que K_n es $(n-1)$-regular. Si $n \geqslant 3$, se verifica que $n - 1 \geqslant \frac{n}{2}$. Como consecuencia entonces del teorema anterior, tenemos que los grafos completos K_n son hamiltonianos $\forall\ n \geqslant 3$. Es estos casos es fácil hallar un ciclo



K_4 K_5

Figura 28: Grafos completos y, por tan, hamiltonianos

hamiltoniano, pues si se representan como en la Figura anterior, es decir, con los vértices formando un polígono regular, el propio polígono es un ciclo hamiltoniano.

Observación 7.2. Se puede también demostrar que si un grafo es k-regular con $k \geqslant \frac{n}{2}$, entonces el grafo es hamiltoniano.

No daremos una definición formal de subgrafo de un grafo, pero se puede intuir que un subgrafo es un grafo contenido dentro de otro más grande. Esto sugiere que lo que hay que hacer es "borrar" elementos de un grafo para obtener un subgrafo. En efecto así es, pero teniendo en cuenta que no hay problema alguno es quitar cualquier arista sin más, pero no es posible quitar solamente un vértice sin más, ya que el resultado no sería un grafo, sino que hace falta quitar también todas las aristas que lo tengan por extremo.

En resumen, para obtener un subgrafo a partir de un grafo, podemos:

1. Borrar aristas de G.
2. Borrar vértices de G, en cuyo caso se deben borrar también todas las aristas que tengan por extremos a esos vértices.

Teorema 7.2. *Dado un grafo es hamiltoniano, G,si se suprime uno de sus vértices y todas las aristas que lo tienen por extremo, el grafo obtenido es un subgrafo de G conexo.*

Demostración. Si consideramos un grafo hamiltoniano dibujado sobre un polígono regular, sabemos que el propio polígono es un ciclo hamiltoniano. Al borrar uno de sus vértices y todas las aristas que lo tienen por extremo, el ciclo hamiltoniano anterior deja de ser cerrado, pero sigue recorriendo todos los vértices del subgrafo resultante, por lo que el subgrafo es conexo. □

El teorema anterior da una condición necesaria pero no suficiente para que un grafo sea hamiltoniano. En consecuencia tenemos el siguiente corolario.

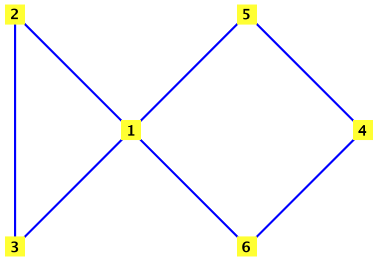
Corolario 7.1 (Criterio de Euler)**.** *Sea G un grafo conexo con más de dos vértices. Si existe un vértice de G tal que al borrarlo junto con todas las aristas que lo tienen por extremo, se obtiene un subgrafo no conexo, entonces G no es hamiltoniano.*

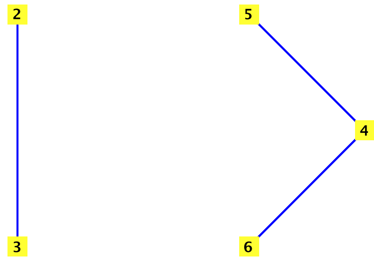
Observación 7.3. Si para un vértice v de un grafo se verifica que al ser borrado junto con todas las aristas que lo tienen como extremo, el grafo queda disconexo, entonces se dice que *v es un punto de corte*. El Criterio de Euler nos dice que *si un grafo tiene un punto de corte, entonces no es hamiltoniano.* Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, porque existen grafos que no tienen puntos de corte y no son hamiltonianos.

El corolario anterior se puede generalizar. Si en lugar de borrar un único vértice, borramos n vértices y todas las aristas que los tengan por extremos, de manera que el subgrafo que obtenemos tiene más de n componente conexas, entonces el grafo no es hamiltoniano.

Ejemplo 7.4. Si consideramos el grafo de la Figura 29, vemos que no es hamiltoniano: En efecto, su vértice "1" es un punto de corte, como se puede observar, donde al borrar ese vértice y las aristas que lo tienen por extremo, vemos que queda un grafo no conexo.

Aunque pueden existir más de un punto de corte, en el ejemplo solo hay un único punto de corte.





Grafo G Subgrafo de G no conexo

Figura 29: Ejemplo de grafo con un punto de corte

Observación 7.4.

1. En los vértices con grado 2 las dos aristas han de formar parte de cualquier posible ciclo hamiltoniano.

2. En los grafos hamiltonianos todos sus vértices tienen grado mayor o igual que 2. Por tanto, cualquier grafo que contenga un vértice de grado 1 no puede ser hamiltoniano.

3. Al construir un ciclo hamiltoniano que pasa por un determinado vértice, se usan exactamente dos de las aristas que lo tienen por extremo. Si un vértice tiene grado mayor que 2, entonces todas las aristas que pasan por él y que no se hayan usado en el ciclo hamiltoniano no pueden formar parte del ciclo.

4. Un ciclo hamiltoniano no puede contener otro ciclo más pequeño dentro de él.

   Estas observaciones suelen resultar útiles a la hora de buscar un ciclo hamiltoniano.

Ejemplo 7.5. Haciendo uso de las observaciones anteriores, se puede demostrar que el grafo de la Figura 30 no es hamiltoniano.

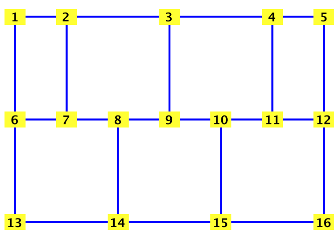


Figura 30

En efecto, los vértices 1, 5, 13 y 16 tienen grado 2, por tanto deben formar parte de cualquier posible ciclo hamiltoniano. Al seleccionar sus aristas vemos que los vértices 6 y 12 ya han sido usados para ese posible ciclo, por lo que su tercera arista no puede formar parte del ciclo. Tendríamos entonces el grafo de la Figura 31:

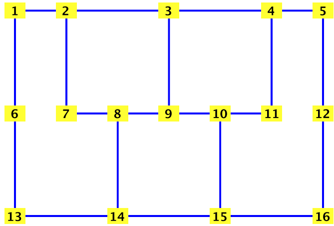


Figura 31

Ahora vemos que en este nuevo grafo, los vértices 7 y 11 tienen grado 2, por lo que sus aristas deben formar parte de cualquier ciclo hamiltoniano del grafo original. Al seleccionarlas junto con las anteriores, vemos que los vértices 2 y 4 ya han sido usados y tienen grado mayor que 2, por lo que borramos la tercera arista que no ha sido usada. Nos queda el grafo de la Figura 32: En este último

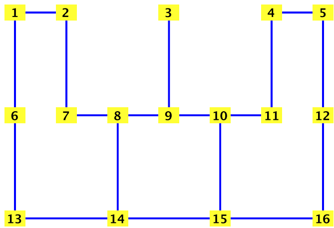


Figura 32

grafo, el vértice 3 tiene grado 1 y esto no podría ocurrir en un ciclo hamiltoniano, por lo que el grafo inicial no es hamiltoniano.

El grafo de la Figura 30 no tiene puntos de corte, lo que prueba que hay grafos sin puntos de corte que no son hamiltonianos.

Nota 7.1. Un *árbol* es un grafo conexo que no tiene ciclos. El alumno encontrará en Moodle un archivo relativo a *árboles y bosques* de un grafo. Si bien este documento es más amplio, el objetivo es sencillamente que se conozca la definición de árbol y bosque.

En Moodle también se deja un breve documento relativo a las *matrices de adyacencia y de incidencia de un grafo*, a fin de que el alumno pueda iniciarse en el conocimiento y la utilidad de estas matrices. En la práctica a realizar con Maple, se muestran algunos ejemplos de su uso.

Referencias

[1] E. Bujalance, J.A. Bujalance, A.F. Costa, E. Martínez, *Elementos de Matemática Discreta*, Sanz y Torres, Madrid, 1993.

[2] F.J. Cirre, *Matemática discreta.* Colección Base Universitaria, Anaya Educación, Madrid, 2004.

[3] F. García , *Matemática Discreta*, Thomson, Madrid, 2005.

[4] R.L. Grimaldi, *Matemática discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Prentice-Hall, México, 1998.

[5] R. Johnsonbaugh, *Matemática Discreta*, 6ª ed., Pearson Prentice Hall, 2005.

[6] K. H. Rosen, *Matemática discreta y sus aplicaciones*, 5ª ed., McGraw-Hill Iberoamericana, 2004.

[7] T. Veerarajan, *Matemáticas discretas. Con teoría de gráficas y combinatoria.* , Mc Graw Hill, México, 2008.

[8] http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/teoriaderedes/informaci %F3n/C3_Arboles.pdf. (Enero 2008).

[9] http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/teoriaderedes/informaci %F3n/C1_Representacion Matrices.pdf. (Enero 2008).