Universidad Politécnica de Madrid

Departamento de Matemática Aplicada

a la Ingeniería Técnica de Telecomunicación

Asignatura: Matemática Discreta

Febrero de 2011

Ejercicios del tema 2 (Conjuntos numéricos)

Fecha límite de entrega: 28 de marzo de 2011

La entrega de los ejercicios se realizará en un único archivo tipo .doc o .mws. Dicho archivo contendrá las explicaciones correspondientes y, en su caso, las sentencias que dan lugar a los resultados obtenidos.

---

1. Demuestra que $\sqrt[3]{5}$ y $\log_3 5$ son irracionales.

2. Sabiendo que los números armónicos se definen como $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$, demuéstrese que:

   a) $H_{2^n} \leq 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   b) $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)\, H_n - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. ¿Es cierto que que 3 divide a $n^3 - n$ $\forall n \in \mathbb{N}$? ¿Y que 3 divide a $n^2 - n$ $\forall n \in \mathbb{N}$? Razona las respuestas.

4. Dados los enteros $k = 1724$, $l = 1225$, $m = 1728$ y $n = 34012224$, averiguar mediante la descomposición en factores primos si:

   a) son cuadrado perfectos

   b) son cubos perfectos

5. Probar que si la descomposición en números primos de un número natural es $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, entonces el número de divisores es $\prod_{i=1}^{k} (1 + \alpha_i)$.

   a) Da la lista de los divisores de 90.

   b) Halla dos números con 15 divisores y que sean divisibles por 3 y por 7, pero por ningún otro primo.

6. Un número natural se dice que es *perfecto* si coincide con la suma de sus divisores positivos que no sean el mismo.

   a) Comprobar que son perfectos el 6 y el 28.

   b) Demostrar que si $2^p - 1$ es primo, entonces $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto

7. ¿Cuántos elementos del conjunto $\{4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots, 52\}$ son primos con 120.

8. El planeta Jupiter tiene 4 satélites. El primero tarda 54 h. en dar una vuelta completa alrededor del planeta; el segundo 85 h.; el tercero 172 h. y el cuarto 400 h. Considerando como posición relativa inicial la actual, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que los cuatro satélites vuelvan a ocupar la misma posición relativa?, ¿cuántas vueltas alrededor del planeta dará en ese tiempo cada satélite?

9. Demostrar:

   a) Si $m.c.d.(m,\ n) = 1$, entonces $m.c.d.(2m + n,\ m + 2n)$ es 1 o 3.

   b) Si $m.c.d.(m,\ 4) = m.c.d.(n,\ 4) = 2$, entonces $m.c.d.(m + n,\ 4) = 4$

10. *a*) Utilizando la factorización en números primos halla el m.c.d. y el m.c.m. de 275427000 y 2482706250

    b) Halla la cantidad de números primos con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 dígitos, respectivamente.