

Asignatura: Matemática Discreta

Marzo de 2011

Ejercicios del Tema 3 (Ecuaciones diofánticas, congruencias y criterios de divisibilidad)

Fecha límite de entrega: 11 de Abril de 2011

La entrega de los ejercicios se realizará en un único archivo tipo .doc, .pdf o .mws. Dicho archivo contendrá las explicaciones correspondientes y, en su caso, las sentencias que dan lugar a los resultados obtenidos.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diofánticas:

a) $111x + 36y = 15$

b) $6x + 10y = 3$

c) $16x + 10y = 20$

2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden tener 430 euros repartidos en billetes de 20 y 50 euros?

3. Hallar los inversos de 13 en \mathbf{Z}_{21} y en \mathbf{Z}_{31} .

4. a) Resolver el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{9} \\ x \equiv -1 \pmod{11} \\ x \equiv -5 \pmod{7} \\ x \equiv 17 \pmod{43} \end{cases}$$

b) Comprueba el resultado anterior utilizando el comando apropiado en Maple.

5. Sea p un número primo. Demostrar que $[a]$ es su propio inverso en \mathbf{Z}_p si y sólo si $a \equiv 1 \pmod{p}$ o $a \equiv -1 \pmod{p}$.

6. Hallar el menor número natural mayor que 100 tal que al dividirlo por 2, 3, 4, 5 y 6 da como resto 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

7. Encontrar todas las soluciones positivas de la ecuación diofántica $x^2 - y^2 = 120$.

8. Demostrar que si el último dígito de un número n es t entonces $n^2 \equiv t^2 \pmod{10}$.

9. Aplicando congruencias y sus propiedades, calcula el resto de dividir 23^{2587} por 7.

10. Demostrar que un número $n = \sum_{i=0}^t a_i 10^i$ es divisible por 11 si y sólo si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^t a_t$ es múltiplo de 11.