Universidad Politécnica de Madrid

Departamento de Matemática Aplicada

a la Ingeniería Técnica de Telecomunicación

Asignatura: Matemática Discreta

Abril de 2011

Ejercicios del tema 4 (Relaciones de recurrencia)

Fecha límite de entrega: 16 de mayo de 2011

La entrega de los ejercicios se realizará en un único archivo tipo .doc o .mws. Dicho archivo contendrá las explicaciones correspondientes y, en su caso, las sentencias que dan lugar a los resultados obtenidos.

---

1. Halla la solución de la relación de recurrencia $x_{n+1} - x_n = 12n^2 - 4n$, para $n \geq 0$ y $x_0 = 5$.

2. Establecer y resolver una relación de recurrencia para calcular el número de secuencias de longitud n, S_n, formadas con las letras de $\mathcal{M} = \{A,\ B, C\}$ que tienen letras A en bloques de longitud par.

3. Un móvil se desplaza en dirección horizontal. La distancia que recorre en cada segundo es igual a cinco veces la distancia que recorre en el segundo previo. Si d_n denota la posición del móvil en el n-ésimo segundo, determina d_n suponiendo que $d_0 = 5$ y $d_2 = 29$.

4. Sea y_n una solución particular de la relación de recurrencia de orden k dada por

$$x_n = a_1(n)\ x_{n-1} + a_2(n)\ x_{n-2} + \ldots + a_k(n)\ x_{n-k} + e_n$$

   Demuestra que z_n es solución de la relación dada si y solo si $y_n - z_n$ es solución de la relación homogénea asociada.

5. Halla la solución de la relación de segundo orden $x_n - 4\ x_{n-1} + 4\ x_{n-2} = 3$, con las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$.

6. Resolver la ecuación de recurrencia $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 7a_n = 2^n\ (13 + 5n)$ para $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $a_0 = 2$ y $a_1 = 11$.

7. Sea la matriz cuadrada de orden n, $A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det\ A_n$ y resuélvela.

8. Resolver $x_n - 10\, x_{n-1} + 21\, x_{n-2} = 2 \cdot 3^n - 8 \cdot 9^n$, con las condiciones iniciales $x_0 = \dfrac{1}{3}$ y $x_1 = -\dfrac{19}{3}$.

9. Se tienen n discos y 3 estacas situadas en posición vertical, e_1, e_2 y e_3. Los discos tienen una abertura central de diámetro superior al diámetro de las estacas. Los diámetros exteriores de los discos, $d_1, \ldots d_n$, son diferentes y están apilados en la primera estaca ordenados de mayor a menor (de abajo hacia arriba). Se pretende pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original y utilizando la otra estaca como auxiliar. Las reglas para hacer los movimientos son:

    a) En cada movimiento se traslada un disco que se encuentra en la parte superior de una estaca a otra.

    b) No se permite que un disco se coloque sobre otro con menor diámetro.

    Si L_n es el número mínimo de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular L_n y resuélvela. (Problema de las Torres de Hanoi).

10. Resolver la ecuación de recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 10a_{n-3} - 3a_{n-4}$, con las condiciones iniciales $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ y $a_4 = 6$.