

## Capítulo 3

# Oscilaciones Lineales con 1 Grado de Libertad

Es muy común que el objetivo de un diseño mecánico sea una estructura o un mecanismo que permanezca cerca de una posición de equilibrio estable, pudiendo realizar sin embargo pequeños movimientos u oscilaciones alrededor de esa posición. Una variante sería un sistema cuyo movimiento objetivo sea una trayectoria determinada, admitiendo pequeñas oscilaciones o variaciones acotadas respecto de la misma.

Las sollicitaciones y la respuesta de un sistema debido a cargas dinámicas pueden superar notablemente los efectos de las mismas cargas en condiciones estáticas, aplicadas de forma suficientemente lenta. Los diseños de ingeniería cada vez requieren más una adecuada respuesta dinámica. Esto puede deberse a que las cargas realmente se apliquen de forma muy rápida, como a asignar una mayor importancia a aspectos como el mantenimiento de la funcionalidad, la resistencia, y el confort ante las vibraciones. Estas condiciones de diseño a menudo se añaden a las puramente estáticas, de estabilidad y resistencia en la posición de equilibrio.

En la mayoría de los casos prácticos, estas pequeñas oscilaciones se pueden considerar como «lineales» (más adelante se precisa el significado de este término) pudiéndose analizar mediante la teoría que se expone en este capítulo y en el capítulo 4 para sistemas con varios grados de libertad.

Comenzamos aquí por los casos más simples de oscilaciones, los de sistemas con 1 grado de libertad. Aunque en la realidad casi todos los casos tienen varios grados de libertad, en numerosas situaciones existe un grado de libertad predominante, pudiéndose despreciar los otros «modos de vibración» en una primera aproximación. Será válido en estos casos el estudio

mediante las técnicas que presentamos en este capítulo; en cualquier caso, serán la base para el estudio de las oscilaciones con varios grados de libertad que se tratan más adelante (capítulo 4).

### 3.1. El Oscilador Armónico Simple

#### 3.1.1. Ecuación del Movimiento

Sea una masa puntual,  $m$ , obligada a moverse según una recta fija, sujeta a un punto dado de la misma por medio de un resorte elástico (es decir, un muelle que ejerce una fuerza proporcional a su elongación), de constante  $k$ , sin que existan otras fuerzas aplicadas. Si se denomina  $x$  la coordenada de  $m$  a lo largo de la recta, el resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación, de valor

$$F = -k(x - x_0),$$

siendo  $x_0$  la que se denomina *longitud natural* del resorte, para la cual éste quedaría sin tensión. El signo ha de ser negativo puesto que la fuerza del resorte tiene sentido contrario a la elongación, es decir, es una resistencia interna que se opone a ella.

Decimos que se trata de un resorte lineal, porque la fuerza desarrollada en el mismo depende linealmente de la elongación: a doble elongación, doble fuerza, y a elongación mitad, la fuerza se divide por dos.

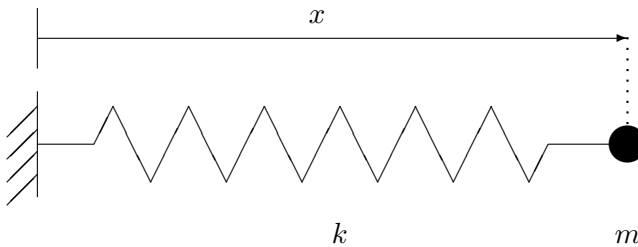


Figura 3.1: *Oscilador armónico simple*

Como podemos elegir el origen de coordenadas donde nos plazca, lo haremos en el punto  $x_0$ , de forma que la expresión de la fuerza del muelle sea

$$F = -kx.$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.2), obtenemos la ecuación dinámica de este sistema:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \quad (3.1)$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria con las siguientes características:

- de *segundo orden*, ya que intervienen derivadas segundas;
- *lineal*, ya que así es la dependencia en relación con la variable  $x$  y sus derivadas;
- de *coeficientes constantes*, pues supondremos fijos  $m$  (masa del sistema) y  $k$  (rigidez del resorte);
- *homogénea*, pues la ecuación está igualada a cero, sin término independiente a la derecha del signo igual.

### 3.1.2. Energía

Antes de proceder a integrar la ecuación, conviene analizar la energía asociada al resorte. La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial  $V(x)$ . Éste se calcula inmediatamente integrando el trabajo realizado por aquélla entre la posición natural y una posición genérica:

$$V = - \int_0^x F \, dx = - \int_0^x (-kx) \, dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva, siendo su valor en un instante genérico

$$E = T + V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2. \quad (\text{cte.}) \quad (3.2)$$

Si el movimiento es oscilatorio y acotado, la elongación  $x(t)$  tendrá máximos en los que la derivada es nula ( $\dot{x} = 0$ ). Particularizando para uno de estos instantes, podemos escribir la ecuación (3.2) en función de una nueva constante  $A$  cuya interpretación es la elongación máxima:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2. \quad (3.3)$$

Físicamente, podemos interpretar la ecuación anterior observando que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ( $V_{\max} = \frac{1}{2} kA^2$ ), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ( $T_{\max} = \frac{1}{2} kA^2$ ). A lo largo del movimiento, la energía total se conserva, oscilando entre estas dos formas.

### 3.1.3. Integración de la Ecuación

El objetivo es resolver la ecuación (3.1), integrándola para obtener el movimiento  $x(t)$ . No se pretende aquí explicar con carácter general los procedimientos de integración de ecuaciones diferenciales con una variable, por lo que nos ceñiremos a los detalles de la solución de ecuaciones del tipo de (3.1), que por otra parte reviste considerable importancia en la física y en la mecánica.

La forma más sencilla es partir de la ecuación (3.3), despejando en ella y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

La integración se puede hacer para cada miembro de esta ecuación de forma independiente, resultando

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi = \arcsen \frac{x}{A},$$

donde  $\varphi$  es una constante de integración. Definimos ahora un nuevo parámetro  $\omega_0$  como

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.4)$$

con lo cual despejando el valor de  $x$  resulta la ecuación del movimiento buscada:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.5)$$

Esta ecuación define una ondulación armónica (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo, denominado periodo, de manera indefinida. En este caso el periodo es  $T = 2\pi/\omega_0$ .

El parámetro  $\omega_0$  recibe el nombre de *pulsación* o *frecuencia angular natural* del sistema; representa la frecuencia angular con la que éste oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que se mueva libremente<sup>1</sup>. La constante  $A$  es la *amplitud* de la oscilación (módulo de la elongación máxima) y por último  $\varphi$  es el *ángulo de fase*, ya que indica la fase de la senoide en que se sitúa el origen de tiempo.

---

<sup>1</sup>En contra de lo que pudiera parecer, la notación  $\omega_0$  no indica «valor inicial de  $\omega$ », tratándose de un valor característico del sistema que se mantiene *constante*. El subíndice en  $\omega_0$  se refiere a que el sistema no tiene amortiguamiento, en comparación con la frecuencia característica  $\omega$  que obtendremos para los sistemas con amortiguamiento, ver ecuación (3.13).

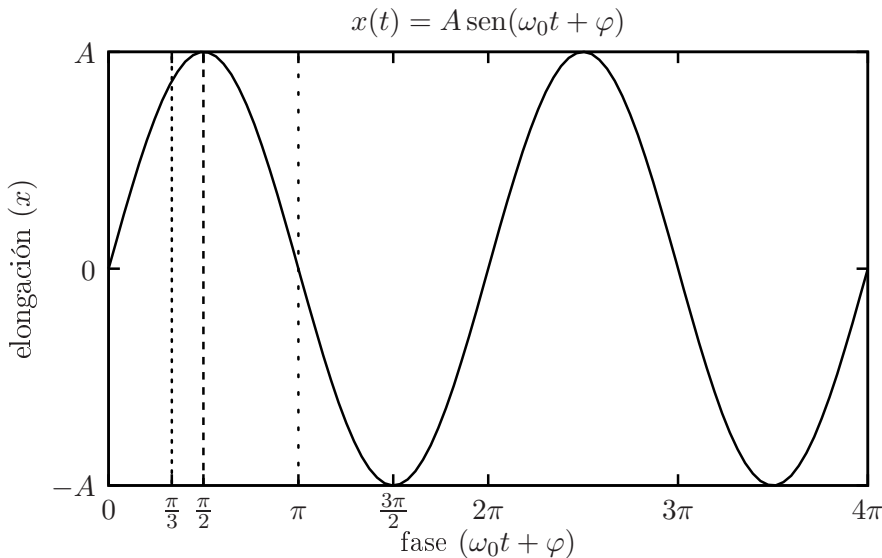


Figura 3.2: *Oscilación armónica, abarcando dos periodos completos del movimiento. Un ángulo de fase  $\varphi \neq 0$  equivale simplemente a una traslación del origen de tiempos.*

La frecuencia angular o pulsación se mide en radianes/segundo. La frecuencia circular  $f$  —o frecuencia propiamente dicha—, indica el número de ciclos o revoluciones por unidad de tiempo, y se expresa mediante Hercios o ciclos por segundo (Hz). La relación entre ambas medidas de la frecuencia es por tanto  $f = \omega/2\pi$ . También es posible expresar la frecuencia en otras unidades como revoluciones por minuto (rpm).

Es inmediato observar de (3.5), que cuanto más rígido sea el muelle (mayor  $k$ ) o más ligera la masa (menor  $m$ ), mayor será la frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ . Por el contrario, sistemas flexibles ( $k$  pequeño) y pesados ( $m$  grande) tendrán frecuencias naturales bajas.

Si el valor de la constante  $k$  fuese negativo, esto correspondería a una repulsión del resorte, y no sería posible la solución anterior al no poderse obtener  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Físicamente, este caso no correspondería a un movimiento de oscilación, ya que la partícula tendería a alejarse cada vez más del origen, sin estar su movimiento acotado. Por tanto, para que el sistema tenga un movimiento oscilatorio acotado ha de poseer una rigidez  $k$  positiva, correspondiente a una atracción hacia la posición de equilibrio estable.

Los dos parámetros  $A$  y  $\varphi$  quedan indeterminados en (3.5), siendo necesario calcularlos a partir de las dos condiciones iniciales (posición y velocidad

iniciales). Por ejemplo, para una vibración que parte desde una elongación inicial  $a$  en reposo,

$$x_0 = a; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = a, \quad \varphi = \pi/2.$$

Para unas condiciones iniciales cualesquiera  $x_0$  y  $v_0$ , particularizando (3.5) se halla

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right); \quad A = \frac{x_0}{\sin \varphi}.$$

Como comprobación, podemos evaluar la energía asociada al movimiento definido por (3.5). En un instante genérico, la velocidad es

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

por lo que

$$T + V = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2.$$

Como era de esperar se obtiene el mismo valor que en (3.3).

### 3.2. Oscilaciones en 2 Dimensiones

Sea una masa  $m$  que se puede mover en un plano, atraída hacia un punto  $O$  del mismo por un resorte lineal.

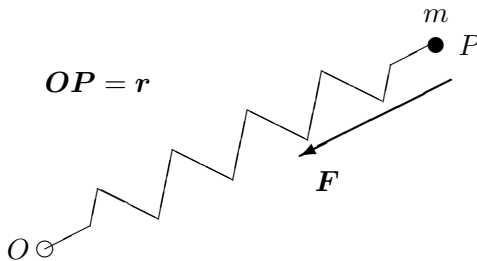


Figura 3.3: Oscilaciones en 2D de una partícula atraída hacia un punto  $O$  del plano.

La expresión vectorial de la fuerza de atracción es

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

y la ecuación vectorial del movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \mathbf{0};$$

En componentes, tomando unos ejes  $Oxy$  en el plano, resultan dos ecuaciones escalares desacopladas:

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad m\ddot{y} + ky = 0. \quad (3.6)$$

La solución general de estas ecuaciones es

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \beta),$$

expresiones que definen la trayectoria de forma paramétrica. Para obtener la ecuación implícita de la trayectoria tengamos en cuenta, en primer lugar, que podremos elegir el origen de tiempos sin pérdida de generalidad de forma que sea  $\alpha = 0$ ; el ángulo de fase para  $y$  será  $\delta = \beta - \alpha$ . De esta forma queda

$$x = A \cos(\omega_0 t); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Desarrollando la expresión de  $y$  y eliminando la variable  $t$ ,

$$y = B(\cos \omega_0 t \cos \delta - \text{sen} \omega_0 t \text{sen} \delta),$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta - \text{sen} \delta \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

de donde se obtiene finalmente

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \text{sen}^2 \delta. \quad (3.7)$$

Para distintos valores de  $\delta$ , esta ecuación representa una familia de elipses con orientación y excentricidad variables, siempre inscritas en el rectángulo  $-A < x < A$ ,  $-B < y < B$ , como es fácil de comprobar. Las elipses degeneran en rectas diagonales para los casos límite  $\delta = 0$  y  $\delta = \pi$  (ver figura 3.4).

Una generalización interesante del caso anterior resulta de considerar una constante de atracción distinta según cada uno de los dos ejes ( $k_x$  y  $k_y$  respectivamente). Realizando esta modificación en las ecuaciones (3.6) es inmediato comprobar que su solución son oscilaciones en  $x$  e  $y$  con distinta frecuencia,  $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$  y  $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$ :

$$x = A \cos(\omega_x t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega_y t + \beta).$$

Las trayectorias descritas son las llamadas curvas de Lissajous (figura 3.5). Estas curvas son cerradas tan sólo si  $\omega_y/\omega_x$  es una fracción racional. En caso contrario, se describen trayectorias abiertas que, a lo largo del tiempo,

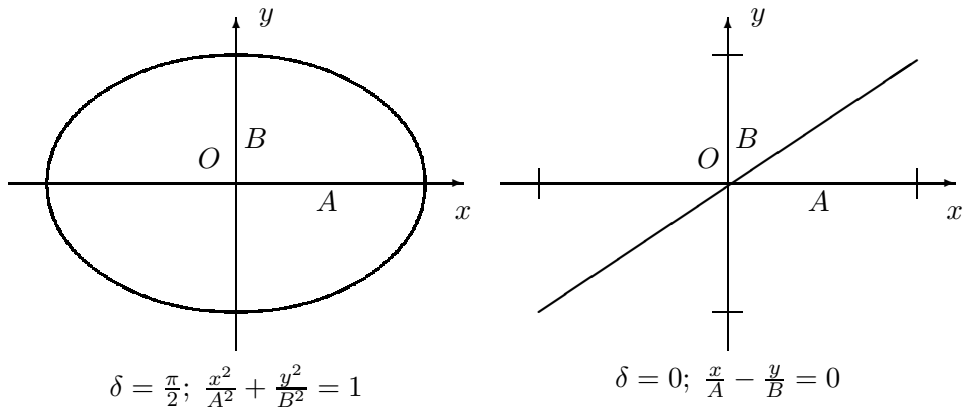


Figura 3.4: Trayectorias de una partícula con atracción elástica a un punto  $O$ , mostrando dos casos extremos de la familia de elipses (3.7). El primer caso corresponde a las condiciones iniciales  $x_0 = A, \dot{x}_0 = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = -B\omega_0$ , y el segundo a  $x_0 = A, \dot{x}_0 = 0, y_0 = B, \dot{y}_0 = 0$ .

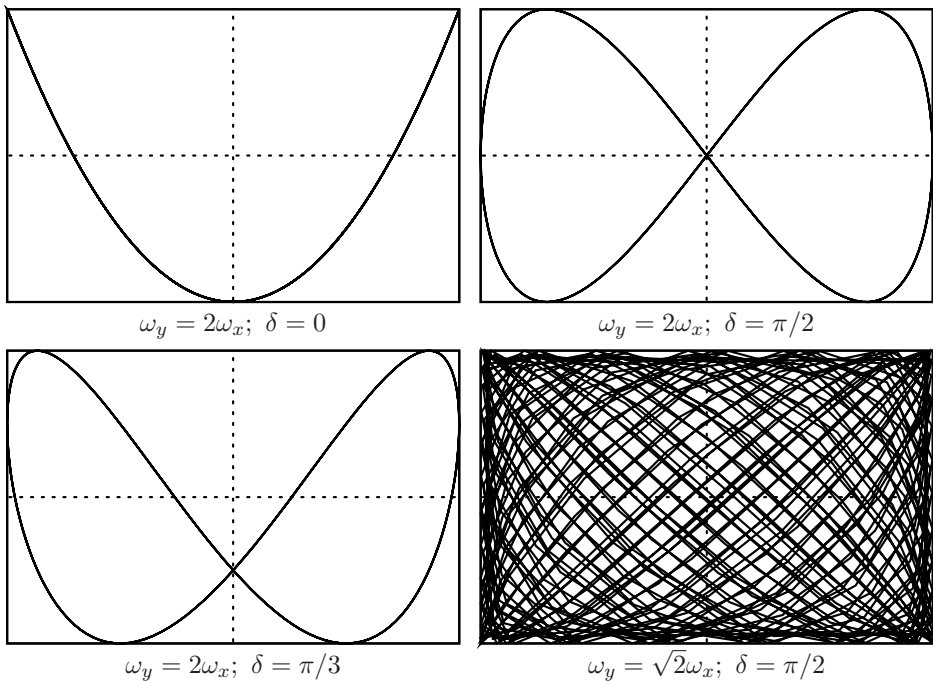


Figura 3.5: Curvas de Lissajous, para diversas condiciones iniciales. En el último caso, al no ser el cociente de frecuencias racional, la curva no es cerrada



acaban siendo densas en el rectángulo  $]-A, A[ \times ]-B, B[$  (pasan tan cerca como se desee de cualquier punto), sin cerrarse nunca.

La trayectoria seguida es sensible a las perturbaciones de los parámetros iniciales; una pequeñísima variación de  $\omega_x$  u  $\omega_y$ , convertirá a una curva de cerrada en abierta, por ejemplo.

### 3.3. Oscilaciones con amortiguamiento

#### 3.3.1. Ecuación del movimiento

Un amortiguador viscoso ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad,  $F_A = -c\dot{x}$ , de sentido contrario a ella. Este modelo

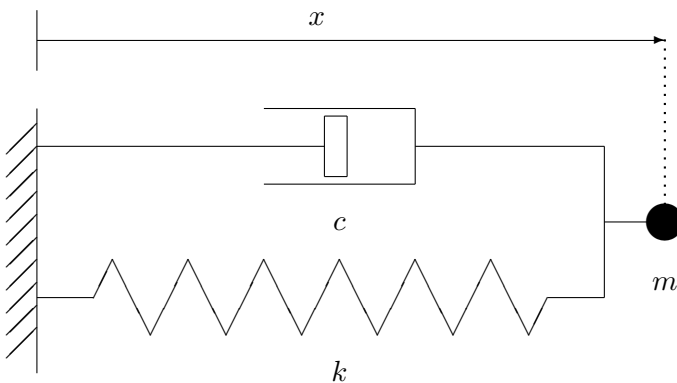


Figura 3.6:  
*Oscilador con  
amortiguamiento  
viscoso*

corresponde aproximadamente a la resistencia desarrollada por un émbolo en un pistón lleno de líquido, al fluir por el hueco libre entre pistón y émbolo. Se trata de una fuerza necesariamente *no conservativa*. Es fácil comprobarlo, ya que en cualquier trayectoria cerrada (origen y final en el mismo punto), el trabajo realizado por la fuerza de amortiguamiento es esencialmente negativo:

$$W_A = \oint \left(-k \frac{dx}{dt}\right) dx = \oint (-k\dot{x}^2) dt < 0.$$

Aunque este modelo no representa de forma exacta la mayoría de las resistencias pasivas reales, resulta sencillo y suficientemente aproximado para una gran cantidad de casos prácticos, permitiendo considerar las inevitables resistencias del medio en que se produce la vibración.

Considerando la fuerza del amortiguador, la fuerza total sobre  $m$  es ahora

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

resultando la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (3.8)$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea.

### 3.3.2. Integración de la ecuación

La solución de la ecuación (3.8) es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento (3.1), es decir, basada en funciones armónicas. Tan sólo es necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo  $x(t) = ae^{rt}$ . En principio, permitiremos que tanto  $a \in \mathbb{C}$  como  $r \in \mathbb{C}$  sean números complejos, aunque por motivos físicos debemos exigir al final que el resultado  $x(t)$  sea real. Como se sabe, la exponencial da lugar a funciones armónicas para exponente imaginario<sup>2</sup>.

Derivando y sustituyendo en la ecuación (3.8), resulta

$$(mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + cr + k = 0. \quad (3.9)$$

Esta expresión se denomina «ecuación característica,» proporcionando los valores que debe tomar  $r$  para que exista la solución buscada:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \quad (3.10)$$

Según el valor del discriminante ( $c^2 - 4km$ ) en la expresión general anterior, pueden distinguirse varios tipos de solución:

a)  $c^2 - 4km > 0$ .- En este caso existen dos raíces reales para (3.9):

$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

Sabemos que necesariamente ambas han de ser negativas, ya que empleando la expresión (3.10) se comprueba que  $r_1 + r_2 < 0$  y  $r_1 \cdot r_2 > 0$ . Mediante la linealidad de la ecuación diferencial se demuestra que, si existen varias soluciones, cualquier combinación lineal de ellas es también solución de la ecuación (propiedad de comprobación inmediata). Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = a_1 e^{-pt} + a_2 e^{-qt}.$$

---

<sup>2</sup>Empleando la notación de Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ .

En definitiva, se trata de una solución exponencial decreciente, que no ocasiona movimiento oscilatorio, debido a que el amortiguamiento  $c$  es excesivamente grande (amortiguamiento *supercrítico*). En la figura 3.7 se muestra el movimiento que se obtiene para un sistema de este tipo, en varios casos con distintas condiciones iniciales.

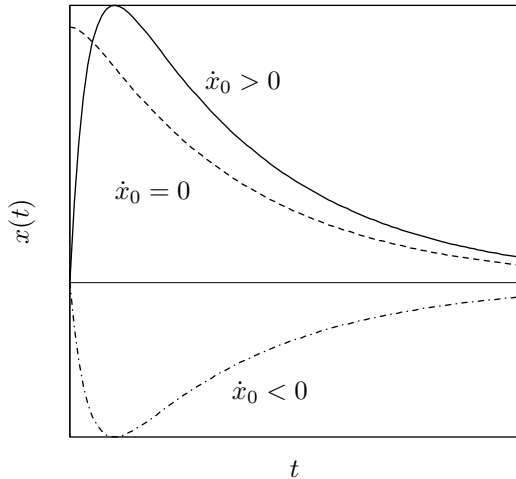


Figura 3.7: *Movimiento de un sistema definido por la ecuación  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ , con amortiguamiento supercrítico ( $c > 2\sqrt{km}$ ), bajo distintas condiciones iniciales; Caso I)  $\dot{x}_0 > 0$ , Caso II)  $\dot{x}_0 = 0$ , Caso III)  $\dot{x}_0 < 0$ .*

**b)  $c^2 - 4km = 0$ .**- Se trata del caso límite, en el que el amortiguamiento posee el valor crítico  $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$ . Existe una raíz real doble, negativa al igual que antes, para (3.9):

$$r = -\frac{c}{2m} = -p,$$

correspondiendo a la solución  $x(t) = ae^{-pt}$ . Se puede comprobar que  $x = bte^{-pt}$  también es solución, por lo que la solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)e^{-pt}.$$

Comprobamos por tanto que en este caso tampoco se produce un movimiento de tipo oscilatorio.

**c)  $c^2 - 4km < 0$ .**- Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (3.9),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

### 3.12 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{(-p+i\omega)t} + a_2 e^{(-p-i\omega)t} \\ &= e^{-pt} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-pt} [(a_1 + a_2) \cos \omega t + i(a_1 - a_2) \operatorname{sen} \omega t] \end{aligned}$$

Aunque en un caso general esta expresión pueda tener componente imaginaria, por motivos físicos sabemos que  $x$  debe ser real. Esto obliga a que las constantes complejas  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  den lugar a unas nuevas constantes reales  $A, B \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (B - iA)/2 \\ a_2 &= (B + iA)/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} B &= a_1 + a_2 \\ A &= i(a_1 - a_2) \end{aligned} \right\}$$

resultando

$$x = e^{-pt} (A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t). \quad (3.11)$$

Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes  $(A, B)$  a otras  $(a, \varphi)$  definidas por:

$$A = a \cos \varphi; \quad B = a \operatorname{sen} \varphi,$$

resultando la expresión

$$\boxed{x = a e^{-pt} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}. \quad (3.12)$$

Este último caso de amortiguamiento subcrítico ( $c < c_{\text{crit}}$ ) es el que más nos interesa, ya que es el único en que se producen vibraciones. La expresión (3.12) representa un movimiento oscilatorio amortiguado de amplitud decreciente ( $a e^{-pt}$ ), al estar modulado por una exponencial negativa. Aunque el movimiento es oscilatorio, no sería correcto en rigor llamarlo periódico, ya que cada oscilación es distinta, al disminuir la amplitud. Se define como amplitud (de forma más rigurosa, «pseudo-amplitud») del movimiento al valor  $a e^{-pt}$ , que tiende a 0 para  $t \rightarrow \infty$ . El movimiento desaparece en la práctica para un tiempo suficientemente grande. Es fácil comprobar que el intervalo entre máximos, al igual que entre pasos por cero, es constante e igual a  $T = 2\pi/\omega$  (periodo de la oscilación). Por tanto, a  $\omega$  se le llama frecuencia angular natural del sistema amortiguado (con mayor rigor formal «pseudo-frecuencia»).

El parámetro  $a$  representa la amplitud inicial y  $\varphi$  el ángulo de fase. Estas dos constantes (o alternativamente las  $A$  y  $B$  si se opta por la otra representación de la solución, definida mediante (3.11)) se calculan a partir de las condiciones iniciales  $(x_0, \dot{x}_0)$ .

En resumen, en función de los parámetros del problema, la solución quedará expresada como:

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}. \quad (3.13)$$

A menudo es útil emplear una notación alternativa para estas expresiones, en función de la frecuencia natural sin amortiguamiento  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$  (ecuación (3.5)), y la tasa de amortiguamiento crítico  $\xi$ , definida como

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

El significado de  $\omega_0$  ya se discutió antes. En cuanto a  $\xi$ , se trata de un valor adimensional, que para los sistemas oscilatorios (amortiguamiento subcrítico) se halla entre 0 y 1. En el caso en que sea  $\xi \geq 1$  el amortiguamiento es crítico o supercrítico y no se producen oscilaciones. Para vibraciones estructurales, los valores usuales de  $\xi$  son pequeños; en una estructura real puede ser del orden de  $\xi = 0,02 = 2\%$  o menor<sup>3</sup>.

En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (3.8) se puede escribir

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.14)$$

mientras que la solución (3.13) se expresa como

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.15)$$

Se observa inmediatamente que la pseudo-frecuencia  $\omega$  de este movimiento es menor que en el caso sin amortiguamiento ( $\omega_0$ ), debido al factor  $\sqrt{1 - \xi^2} < 1$ . Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, al ser  $\xi$  pequeño, ambos valores resultan muy próximos ( $\omega \approx \omega_0$ ).

**EJEMPLO 3.1:** Una masa  $m$  de 400 kg puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte elástico de constante  $k = 10^5$  N/m a una base fija en el eje. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la oscilación a la centésima parte cada 10 s. Se pide:

<sup>3</sup>Por ejemplo, en la nueva norma para acciones de cálculo de puentes de ferrocarril, en los que las acciones dinámicas cobran especial relevancia para trenes de alta velocidad, se proponen amortiguamientos de  $\xi = 0,5\%$  para puentes metálicos o mixtos, y  $\xi = 2,0\%$  para puentes de hormigón estructural

### 3.14 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

- Valor de la constante  $c$  de amortiguamiento y de la tasa  $\xi$  respecto del crítico;
- Suponiendo que parte de  $x_0 = 0,05$  m medido desde la posición de equilibrio en reposo, obtener la ecuación del movimiento así como el valor numérico de la posición al cabo de 2 s;

*Solución.*

a.— El movimiento es un caso de vibraciones libres con amortiguamiento, dado por la ecuación (3.15):

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \phi_0).$$

El valor de la frecuencia natural del sistema sin amortiguar es

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 15,811388 \text{ rad/s} = 2,51646 \text{ Hz.} \quad (3.16)$$

El decremento de la pseudo-amplitud permite calcular la razón de amortiguamiento:

$$ae^{-\xi\omega_0 \cdot 10} = \frac{a}{100} \Rightarrow \xi = \frac{\ln 100}{10\omega_0} = 0,029126 \approx 2,9 \%. \quad (3.17)$$

La constante de amortiguamiento vale  $c = 2\xi\omega_0 = 368,4136 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

b.— Una vez calculados todos los parámetros, se pueden obtener las constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \text{sen } \phi_0 \\ 0 = -A\xi\omega_0 \text{sen } \phi_0 + A\omega \cos \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0,05002122 \\ \phi_0 = 1,541667 = 0,490728\pi \end{array} \right.$$

La expresión numérica de la solución es por tanto

$$x(t) = 0,05002122 e^{(-,4605170 t)} \text{sen}(15,80468 t + 1,541667), \quad (3.18)$$

y la posición a los dos segundos  $x(2) = 0,01964561$  m.  $\square$

## 3.4. Oscilaciones Forzadas

### 3.4.1. Ecuación del movimiento

En este caso consideramos que sobre la masa  $m$  actúa una fuerza externa  $f(t)$ , además de las fuerzas internas antes descritas correspondientes al muelle y al amortiguador.

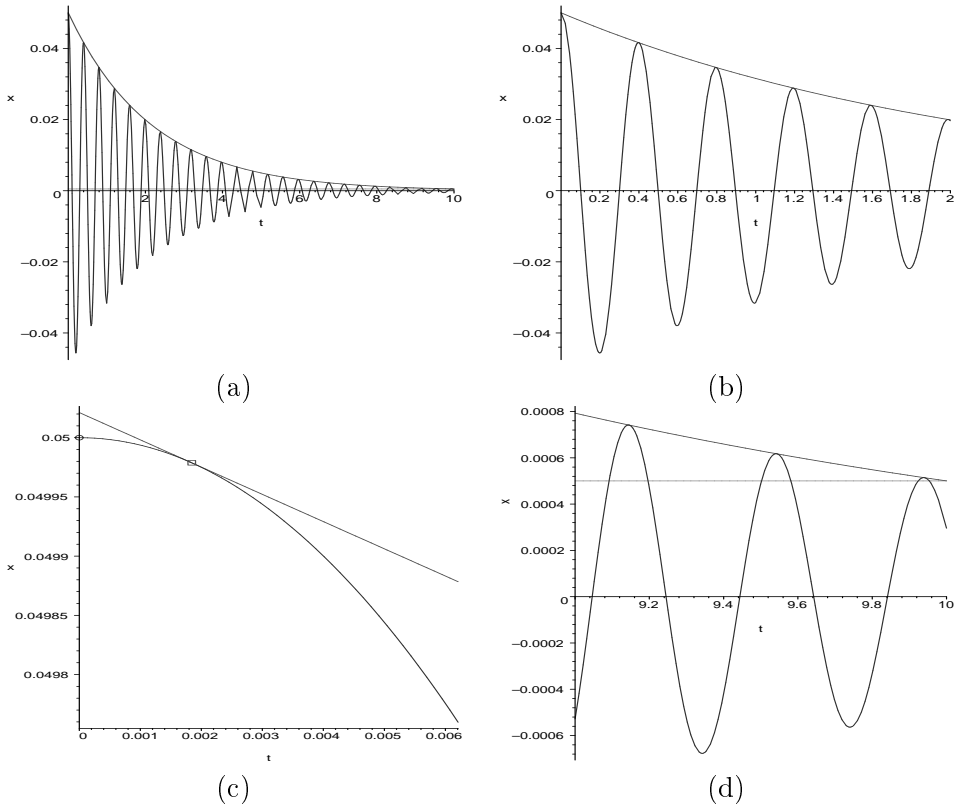


Figura 3.8: Resultados del ejemplo 3.1: (a) Gráfica para  $t \in [0, 10]$ ; (b) Detalle de la gráfica para  $t \in [0, 2]$ , en la que se aprecian mejor las oscilaciones amortiguadas; (c) Detalle del comienzo del movimiento (duración =  $1/64$  periodos) en el que se aprecia que en el instante inicial la curva no es tangente a la envolvente de pseudo-amplitud, junto con el punto de tangencia en que  $(\omega t + \phi_0) = \pi/2$ ; (d) Detalle de la fase final ( $t \in [9, 10]$ ) comprobando que se alcanza la centésima parte de la elongación inicial (recta horizontal).

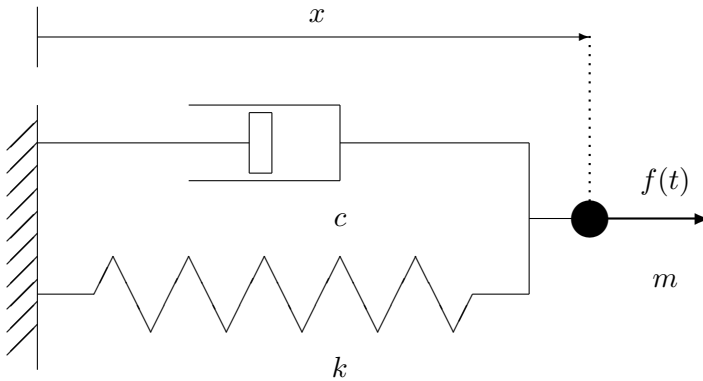


Figura 3.9: *Oscilador simple con amortiguamiento sometido a fuerza externa.*

La ecuación es ahora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (3.19)$$

Al incluir el término independiente  $f(t)$  la ecuación diferencial deja de ser homogénea. Esto da lugar a una estructura de la solución distinta, como se ve a continuación.

### 3.4.2. Integración de la ecuación

Sean dos soluciones cualesquiera  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de la ecuación completa (3.19):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= f(t), \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= f(t); \end{aligned}$$

restando término a término se obtiene

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Por tanto su diferencia,  $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$ , es solución de la ecuación homogénea (3.8). Esto nos sirve para poder expresar la solución general de la completa como una solución particular de la misma, que hallaremos por cualquier procedimiento, más la solución general de la homogénea que ya sabemos calcular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

El problema se limita pues a calcular una solución particular de (3.19). Cualquier procedimiento que nos permita hallarla es bueno (todo vale). Como regla general, buscaremos una solución particular del mismo tipo que el término de fuerza  $f(t)$ . Veremos a continuación las soluciones particulares para algunos casos significativos.



**a) fuerza constante,  $f(t) = D$ .** Este caso puede corresponder a una fuerza constante estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que la aplicación sea súbita. En cualquier caso, la solución particular es otra constante, de valor

$$x_p = \frac{D}{k}.$$

La comprobación es inmediata, al ser  $\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0$ .

Este caso corresponde, por ejemplo, al de un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad; al de la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante); o al de una fuerza constante o escalón cualquiera.

Por otra parte, llamando  $x_0 = D/k$  (cte.), la adición de una solución  $x_p = x_0$  puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas,  $x'(t) = x(t) - x_0 = x_h(t)$ . De esta forma el movimiento puede describirse como una oscilación libre alrededor de un nuevo centro, trasladado  $x_0$ .

Éste sería el caso, por ejemplo, de una masa  $m$  colgando de un resorte de constante  $k$  en dirección vertical, sometida a su propio peso ( $mg$ ). El movimiento puede interpretarse como una oscilación libre, alrededor de un punto de equilibrio situado a la distancia  $mg/k$  por debajo del punto de longitud natural del muelle.

**b) fuerza lineal,  $f(t) = Et$ .** Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo. Tanteamos la solución  $x_p = mt + n$ , también lineal. Sustituyendo en (3.19) se obtienen los valores de  $m$  y  $n$ :

$$cm + k(mt + n) = Et \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

por lo que resulta

$$x_p = \frac{E}{k} \left( t - \frac{c}{k} \right).$$

Este caso sirve para definir un tramo en forma de rampa en una función de fuerza.

**c) fuerza armónica,  $f(t) = q \operatorname{sen} \Omega t$ .** Este caso tiene especial importancia, ya que no sólo sirve para una fuerza armónica en sí misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier (aptdo. 3.7.3).

### 3.18 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase  $\delta$  respecto de la carga:

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta).$$

Sustituyendo en (3.19):

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \operatorname{sen} \Omega t,$$

y particularizando para dos valores distintos de  $t$  se puede calcular  $A$  y  $\delta$ :

1. para  $\underline{t = 0}$ ,

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen} \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$

y despejando  $\delta$ ,

$$\boxed{\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \quad (3.20)$$

2. para  $\underline{\Omega t + \delta = 0}$ ,

$$\begin{aligned} c\Omega &= \frac{q}{A} \operatorname{sen}(-\delta) \\ A &= -\frac{q}{c\Omega} \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

Para expresar  $A$  en función de los parámetros del problema, debemos obtener en primer lugar la expresión de  $\operatorname{sen} \delta$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \frac{\tan \delta}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} \\ &= \frac{-c\Omega}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \\ &= \frac{-2\xi\Omega\omega_0}{\pm\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

resultando finalmente las expresiones siguientes para  $A$ :

$$A = \frac{q}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \quad (3.22)$$

Debido a la indeterminación del signo de la raíz en las expresiones anteriores ((3.21) para  $\operatorname{sen} \delta$  y (3.22) para  $A$ ), podría resultar un valor negativo para

esta última constante. A veces es conveniente sin embargo tomar el signo de la raíz que hace  $A$  positivo, concordando con su interpretación física como amplitud. Esto obligaría a su vez a tomar el valor apropiado para  $\delta$ , de forma que  $\text{sen } \delta$  tenga el signo que le corresponde. Conviene observar que para cambiar de signo ( $\text{sen } \delta$ ) basta con tomar  $(\delta + \pi)$  en lugar de  $\delta$ , es decir, se trata de un simple cambio del origen de tiempo, lo que siempre es lícito.

Una vez conocidos  $A$  y  $\delta$  es posible escribir la solución general de la ecuación completa (3.19) que resulta:

$$x(t) = \underbrace{ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea}} + \underbrace{A \text{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa}}. \quad (3.23)$$

En esta expresión quedan tan sólo por determinar los parámetros  $a$  y  $\varphi$ , que se obtendrán particularizando para las condiciones iniciales. Conviene subrayar que, aunque estos parámetros afectan sólo a la parte de la solución que proviene de la homogénea, es la solución completa (3.23) la que se debe particularizar. No debe cometerse el error de particularizar el sumando correspondiente a la solución homogénea, sino que debe ser la suma de ambas.

Por otra parte, es importante observar que la solución particular de la completa que hemos obtenido es *independiente de las condiciones iniciales*, al ser función únicamente de los parámetros  $A$  y  $\delta$ , definidos por las expresiones (3.21) y (3.22) en las que no influyen dichas condiciones iniciales.

**Régimen transitorio y permanente.**- En el caso en que exista amortiguamiento, la solución de la homogénea al cabo de cierto tiempo —cuánto tiempo sea dependerá del amortiguamiento— desaparece. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término correspondiente a la solución de la homogénea, siendo significativos ambos sumandos en (3.23), se llama *régimen transitorio*. El movimiento durante este régimen posee dos componentes armónicas de distinta frecuencia, la de la excitación ( $\Omega$ ) y la natural del sistema en vibración libre ( $\omega$ ).

*El régimen permanente* es el que se alcanza cuando el término correspondiente a la solución de la homogénea en (3.23) se amortigua hasta hacerse despreciable, quedando tan sólo la solución particular de la completa. Como se ha dicho antes, esta solución particular se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales<sup>4</sup>. Por lo tanto, éstas sólo tendrán

---

<sup>4</sup>La elección de solución particular no es única, siendo por tanto también posible escoger ésta de forma que una parte de ella sí dependa del estado inicial; sin embargo,

influencia durante el régimen transitorio. Dicho de otra manera, en un movimiento forzado y amortiguado, al cabo de un tiempo el movimiento es siempre el mismo independientemente de las condiciones iniciales.

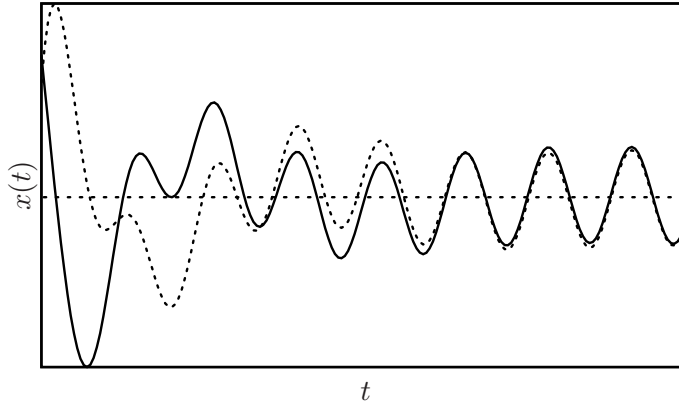


Figura 3.10: *Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.*

Para una excitación periódica de tipo armónico, el régimen permanente tiene la misma frecuencia que la excitación, y un desfase  $\delta$  respecto a ella, dado por la expresión (3.21). De ésta se desprende que si no existe amortiguamiento, el desfase es también nulo. El desfase también depende de la relación entre  $\Omega$  y  $\omega_0$ , de forma que, por ejemplo, para  $\Omega = \omega_0$ , resulta  $\delta = \pm 1$  y por tanto  $\delta = \pm \pi/2$ .

### 3.5. Amplificación dinámica y resonancia

Una carga aplicada de forma dinámica puede producir un efecto considerablemente mayor que aplicada de forma estática, es decir, suficientemente lenta para que no se llegue a producir oscilación. Este efecto se denomina *amplificación dinámica*.

Un ejemplo sencillo es la aplicación de una carga constante  $P_0$ , sobre un sistema formado por una masa  $m$  y un resorte  $k$ , sin amortiguamiento. Si se aplica de forma estática (mediante una rampa suficientemente lenta), el desplazamiento sería  $x_{\text{est}} = P_0/k$ .

---

en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , esta parte de la solución particular también se verá reducida a cero.

Si se aplica de forma súbita, como un escalón de carga, suponiendo que inicialmente el resorte está en su posición natural y sin velocidad, la respuesta es

$$x_{\text{din}}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k} \cos(\omega_0 t).$$

El desplazamiento máximo se produce para  $\omega_0 t = \pi$  y vale  $x_{\text{din,max}} = 2P_0/k$ . Por tanto, la amplificación dinámica de la carga es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = 2,$$

es decir, el efecto dinámico es el doble del estático.

Supongamos ahora que se aplica la misma carga, pero modulada por una función armónica,  $P_0 \sin(\Omega t)$ . Supondremos que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, por lo que el movimiento llega a un régimen permanente, pero que sin embargo se puede despreciar su efecto en la ecuación de dicho régimen, al ser su valor muy pequeño. Decimos, abusando de la expresión, que es un caso «sin amortiguamiento,» aunque queda claro implícitamente que algún amortiguamiento, por pequeño que sea, ha debido existir para que desaparezcan los términos transitorios. En el régimen permanente la respuesta es un movimiento igualmente armónico, cuya amplitud se puede deducir de la ecuación (3.22):

$$x_{\text{din,max}} = A(\Omega) = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}.$$

La amplificación dinámica es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega_0^2}. \quad (3.24)$$

Si  $\Omega = 0$ , el factor de amplificación es la unidad, como debería ser en buena lógica, al tratarse de una carga estática. Si  $\Omega \rightarrow \infty$ , el factor de amplificación tiende a cero, lo que quiere decir que la excitación es demasiado rápida y el resorte no tiene tiempo para deformarse, la masa no llegaría a moverse. Por último, si  $\Omega \rightarrow \omega_0$ , el factor de amplificación tiende a  $\infty$ .

Se denomina *resonancia* al fenómeno por el cual la amplitud de la oscilación se hace máxima para determinadas condiciones de la excitación<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Estrictamente hablando, la definición hecha corresponde a la *resonancia en amplitud*. Cabe definir también la *resonancia en energía cinética*, como aquella que hace máximo  $T = m\dot{x}^2/2$ , pudiendo demostrarse que corresponde a una frecuencia de excitación igual a  $\omega_0$  (frecuencia propia sin amortiguamiento). Si existe amortiguamiento, esta frecuencia de resonancia es ligeramente distinta a la obtenida en (3.25). Al ser la energía potencial proporcional al cuadrado de la elongación, la resonancia en energía potencial equivale a la resonancia en amplitud.

### 3.22 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la amplitud puede tender a  $\infty$  bajo determinadas circunstancias (ecuación (3.24)). En este caso la resonancia conduciría a un fallo completo del sistema, por una amplitud de movimiento excesiva.

En un caso general con amortiguamiento, la expresión (3.22) proporciona la amplitud ( $A$ ) del régimen permanente. Utilizando dicha ecuación, es posible dibujar la gráfica de la amplitud obtenida para un valor dado del amortiguamiento ( $\xi$ ), en función de la frecuencia de excitación ( $\Omega$ ) (figura 3.11). Se observa que para amortiguamiento  $\xi \neq 0$  la curva muestra en general un máximo de la amplitud, mientras que para  $\xi = 0$  no existe máximo, tendiendo la amplitud resonante a  $\infty$ .

Desde un punto de vista de cálculo, la frecuencia de resonancia se obtiene hallando el máximo de (3.22):

$$A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}};$$

puesto que el numerador es constante, se busca el mínimo del radicando en el denominador,

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2\omega_0^2\Omega = 0,$$

obteniéndose finalmente:

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (3.25)$$

La amplitud resonante se obtiene sustituyendo el valor de  $\Omega_r$  en la expresión (3.22) de  $A$ :

$$A_r = \frac{q}{c\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/c}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}. \quad (3.26)$$

Conviene observar que las expresiones (3.4), (3.13) y (3.25) definen tres frecuencias características del sistema, que ordenadas de mayor a menor quedan:

$$\omega > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}^{\omega} > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}^{\Omega_r}.$$

Aunque sus valores sean distintos para un caso con amortiguamiento, en los casos prácticos reales, el amortiguamiento  $\xi$  suele ser pequeño y las tres

frecuencias tienen valores muy próximos. Para los valores usuales del amortiguamiento en vibraciones estructurales (del orden de 1%-2% o incluso menores), la resonancia se produce muy próxima a  $\omega_0$ , como se aprecia en la figura 3.11. Por ello, en la práctica ingenieril a menudo se confunden las

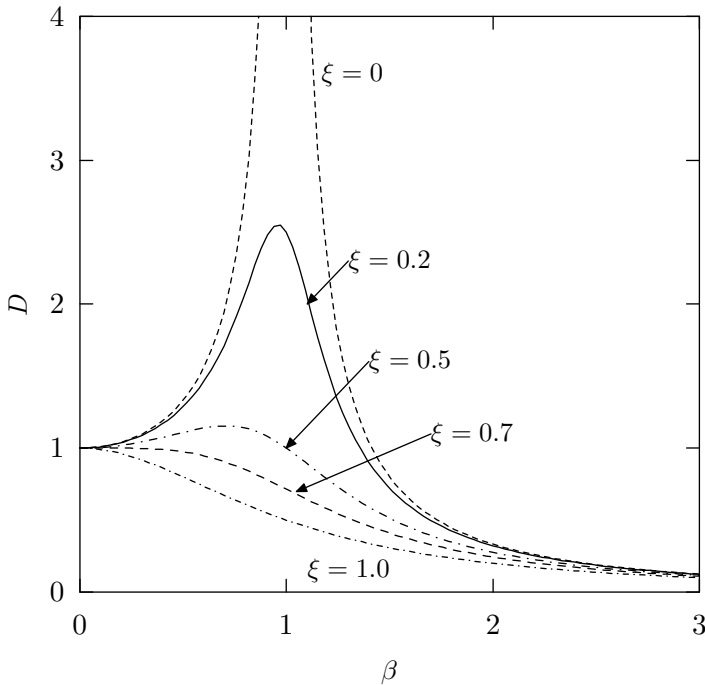


Figura 3.11: *Amplitud de oscilación para una excitación armónica, en función de la frecuencia de excitación  $\Omega$ , para diversos valores del amortiguamiento  $\xi$ . Los ejes representan magnitudes adimensionales, en abscisas  $\beta = \Omega/\omega_0$ , y en ordenadas  $D = A/(q/k)$  (factor de amplificación dinámica).*

dos frecuencias  $\omega_0$  y  $\Omega_r$ . La diferencia de frecuencias es mayor para valores altos del amortiguamiento  $\xi$ , aunque entonces también ocurre que la resonancia tiene menor importancia. Si  $\xi^2 \geq 1/2$  ( $\xi \geq 0,71$ ) no se llega a producir máximo de  $A$ , por lo que no hay resonancia. En este caso la función  $A(\Omega)$  es monótona decreciente y no tiene máximo local, como puede apreciarse en la figura 3.11.

**EJEMPLO 3.2:** Como continuación del ejemplo 3.1, resolver las siguientes cuestiones adicionales:

- Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud 0,05 m y frecuencia 2 Hz, obtener el

### 3.24 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

movimiento tanto durante el régimen transitorio como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte del reposo en la posición de equilibrio.

- b. Obtener la frecuencia de la excitación anterior que produce la máxima amplitud del movimiento, el valor de dicha amplitud máxima y el factor de amplificación.

*Solución.*

a.— Sea  $x(t)$  el movimiento de elongación del resorte, relativo a la base, y  $x_b(t)$  el movimiento impuesto de la base. El movimiento absoluto es por tanto  $X(t) = x(t) + x_b(t)$ . La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{X} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b.$$

Teniendo en cuenta  $x_b(t) = B \operatorname{sen}(\Omega t)$ , resulta

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mB\Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t). \quad (3.27)$$

La solución general consta de la solución general de la homogénea más una solución particular de la completa,  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ . Suponiendo una solución particular del tipo

$$x_p(t) = C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta), \quad (3.28)$$

y obligando a que  $x(t)$  cumpla la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= \arctan\left(\frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k}\right) = -0,125031 \text{ rad}; \\ C &= -\frac{mB\Omega^2}{\sqrt{c^2\Omega^2 + (m\Omega^2 - k)^2}} = -0,0850728 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

(Estos parámetros podrían haberse deducido también directamente de aplicar las expresiones (3.20) y (3.22), con  $q = mB\Omega^2$ .) La solución completa de la ecuación es

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + Ae^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0). \quad (3.30)$$

Obligando a que cumpla las condiciones iniciales ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ), se obtienen las constantes  $A$  y  $\phi_0$ :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2\omega_0^2}\right) = -0,157492 \text{ rad}; \\ A &= -\frac{C\Omega}{\omega} = 0,0676418 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.31)$$



Con estos datos y los parámetros  $\xi, \omega_0$  calculados anteriormente (ecuaciones (3.16) y (3.17)) queda determinada la ecuación del movimiento (3.30):

$$x(t) = -0,0850728 \operatorname{sen}(4\pi t - 0,125031) + 0,0676418 e^{-0,4605170t} \operatorname{sen}(15,80468t - 0,157492). \quad (3.32)$$

Esta solución es la «completa», que corresponde al llamado *régimen transitorio*. Pasado suficiente tiempo, el segundo sumando en esta expresión (la solución de la homogénea) desaparece, debido a la exponencial decreciente, y queda el denominado *régimen permanente*, que se identifica con la solución particular (3.28). En la figura 3.12 pueden observarse estas dos soluciones. Refiriéndose al régimen permanente, el factor de amplificación dinámica (respecto a la amplitud del movimiento impuesto en la base) es  $FA = 0,0850728/0,05 = 1,701457$ .

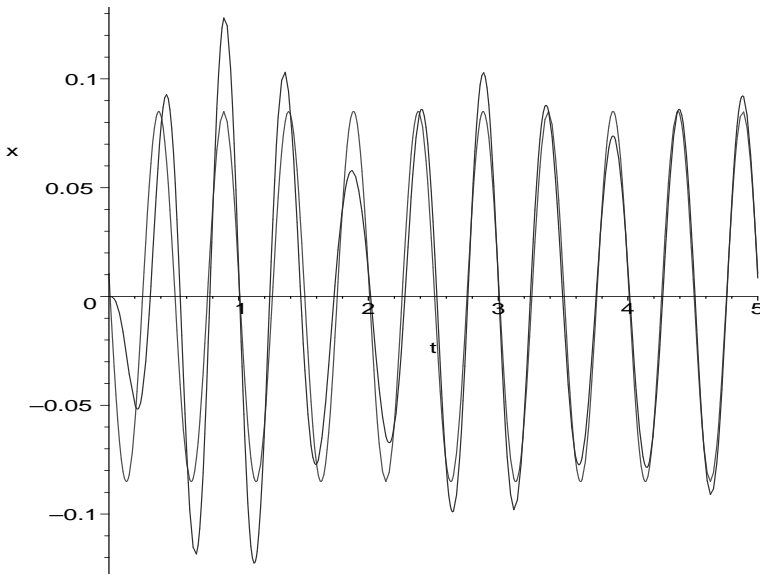


Figura 3.12: Régimen transitorio y permanente, pudiendo observarse como a medida que avanza el tiempo el movimiento se va aproximando al régimen permanente.

b.— Para hallar el máximo de la amplitud en régimen permanente, basta con derivar la expresión de  $C$  en 3.29<sub>2</sub> e igualar a cero. Desarrollando las operaciones se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 15,82482 \text{ rad/s}. \quad (3.33)$$

Obsérvese que para este caso en que la excitación es por movimiento armónico en la base la frecuencia de resonancia no coincide con la obtenida anteriormente para una fuerza armónica (3.25). El motivo es que el numerador en la expresión 3.29<sub>2</sub> también depende ahora de  $\Omega$ , y el máximo no coincide para ambos casos.

Sustituyendo esta frecuencia en 3.29<sub>2</sub> se calcula la amplitud máxima (resonante):

$$C = -0,858714 \text{ m.} \tag{3.34}$$

El factor de amplificación lo expresamos en este caso como cociente entre la amplitud dinámica obtenida y la amplitud de la excitación:

$$FA = \frac{0,858714}{0,05} = 17,17428.$$

En la figura 3.13 se aprecia la variación del factor de amplificación con la frecuencia  $\Omega$ , marcándose claramente el pico de resonancia. □

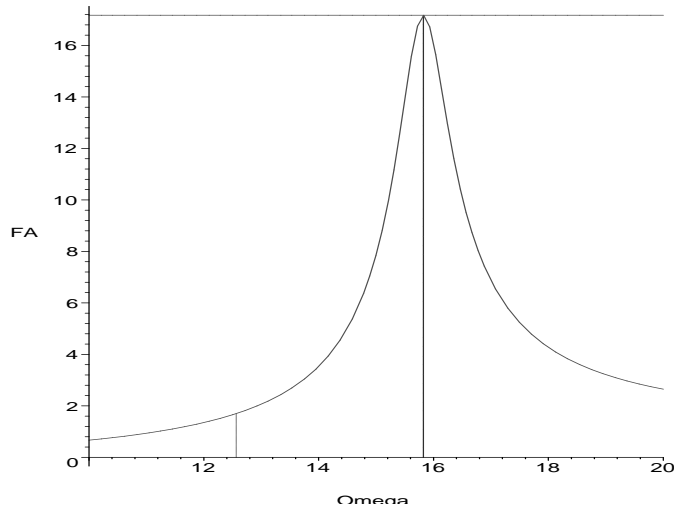


Figura 3.13: *Factor de amplificación dinámica en función de la frecuencia de excitación de la base. Se marcan con líneas verticales la situación para la excitación definida en el primer apartado y la situación de resonancia.*

### 3.6. El Espacio de las Fases

Es posible realizar una transformación de la ecuación diferencial de segundo orden del oscilador armónico simple (3.1), en función de la variable

$x$ , a un sistema equivalente de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, con dos variables:  $x$  y  $p \stackrel{\text{def}}{=} m\dot{x}$  (cantidad de movimiento o momento conjugado a  $x$ ). Este cambio origina las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{p} + kx = 0 \\ p = m\dot{x} \end{cases} \quad (3.35)$$

El espacio de las fases permite una descripción distinta del problema a la realizada en los apartados anteriores, en función de las variables  $(x, p)$ . Este tipo de variables son las que se emplean en la dinámica analítica de Hamilton (capítulo 5). Tiene especial interés cuando se desea estudiar la dinámica del sistema de forma geométrica o cualitativa, por la dificultad o incluso imposibilidad de resolverlo de manera cuantitativa.

Para obtener la trayectoria del sistema en el espacio de las fases, observamos:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dx}\dot{x} = \frac{dp}{dx}\frac{p}{m};$$

sustituyendo en (3.35<sub>1</sub>):

$$\frac{dp}{dx}\frac{p}{m} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{m}dp + kx dx = 0.$$

Integrando esta ecuación de variables separadas se obtiene

$$\boxed{\frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2 = E}, \quad (3.36)$$

donde la constante de integración  $E$  es precisamente la energía total del sistema,  $m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ , que se mantiene constante e igual a su valor inicial como ya sabemos (apartado 3.1.2).

La trayectoria definida por (3.36) es una elipse con semiejes  $\sqrt{2E/k}$  y  $\sqrt{2Em}$  (figura 3.14). El punto por donde se empiece a recorrer la elipse depende de las condiciones iniciales, siendo la trayectoria siempre la misma elipse. El tamaño depende de la energía,  $E$ : las órbitas más energéticas corresponden a elipses de mayor tamaño.

Si el sistema tiene amortiguamiento, la energía  $E$  disminuye a lo largo del movimiento. La trayectoria física del sistema será pues una elipse cuyo tamaño va disminuyendo a lo largo del tiempo; es decir, se recorre una espiral elíptica que termina en el origen, correspondiente al estado de reposo con elongación nula del resorte, cuando el movimiento se ha amortiguado completamente. Decimos en este caso que el origen es un *atractor* del sistema, puesto que la trayectoria física tiende irremediamente a él.

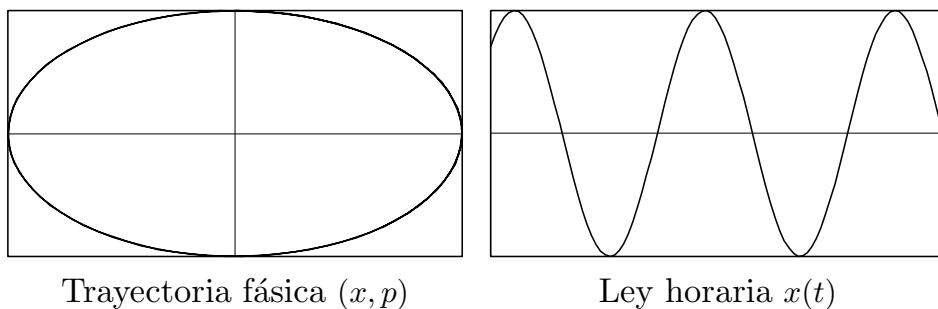


Figura 3.14: *Oscilador sin amortiguamiento; trayectoria elíptica en el espacio fásico, correspondiente a un movimiento con amplitud constante.*

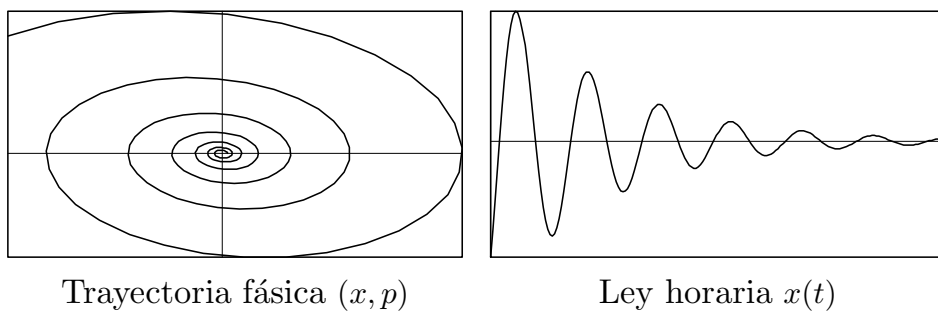


Figura 3.15: *Oscilador con amortiguamiento; trayectoria en espiral elíptica correspondiente a amplitud decreciente, con atractor en el origen.*

Por último, una oscilación forzada con excitación armónica acaba oscilando en un régimen permanente, también armónico, que corresponde a otra elipse en el espacio de las fases. Se dice que el sistema tiene un *ciclo límite*, al que tiende siempre independientemente de las condiciones iniciales.

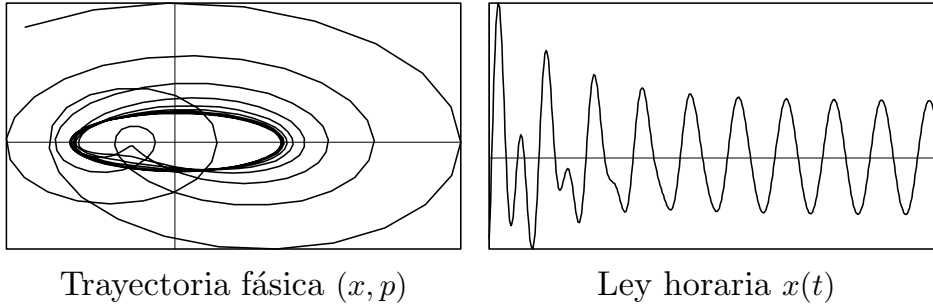


Figura 3.16: *Oscilador forzado con amortiguamiento; la trayectoria fásica muestra claramente un ciclo límite.*

En casos más generales de sistemas dinámicos complejos, pueden existir varios atractores o ciclos límite, cada uno con su correspondiente «cuenca de atracción». En los sistemas caóticos, a pesar del desorden e impredecibilidad que su nombre indica, a menudo se pueden establecer también atractores o ciclos límite. Sin embargo, ocurrirá que pequeñísimas perturbaciones pueden hacer que el sistema salte de uno a otro, de manera impredecible. En este último caso no es útil estudiar de forma determinista el sistema, por la extrema sensibilidad al cambio de cualquier parámetro o condición inicial. Sin embargo, el estudio de sus trayectorias en el espacio de las fases sí puede proporcionar un medio útil para describir cualitativamente su respuesta.

En sistemas complejos con comportamiento caótico, la representación gráfica de las distintas trayectorias dinámicas y cuencas de atracción da lugar en ocasiones a figuras de tipo *fractal*, con una estructura compleja y que se repite a cualquier escala de observación.

### 3.7. Análisis mediante Series de Fourier

El desarrollo en serie de Fourier es una herramienta importante que permite obtener la solución de un oscilador forzado sometido a una excitación cualquiera, sin necesidad de que ésta se ajuste a las funciones típicas estudiadas en el apartado (3.4). Su aplicabilidad radica en la linealidad de la ecuación.

### 3.7.1. Carácter Lineal de las Ecuaciones

Supongamos un oscilador con amortiguamiento, sometido a una fuerza externa  $F(t)$ . La ecuación (3.19) se puede escribir como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t), \quad (3.37)$$

siendo  $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t)/m$ , habiendo dividido ambos términos de la ecuación por  $m$ . Otra manera de expresar esta ecuación es mediante la definición de un operador  $L(\cdot)$ , que actúa sobre la función  $x(t)$ , definido de la siguiente manera:

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] (x) = \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x. \quad (3.38)$$

El operador  $L(\cdot)$  es una aplicación definida en el espacio de las funciones  $C^2$ . La imagen de una función  $x(t)$  mediante  $L(\cdot)$  es otra función, definida a partir de (3.38). De esta manera, la ecuación dinámica (3.37) se puede expresar en forma compacta como

$$L(x) = f.$$

Es inmediato comprobar el carácter lineal de  $L(\cdot)$ : para dos funciones cualesquiera  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y dos números arbitrarios  $\alpha$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$ ,

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2).$$

Por tanto, conocidas las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para dos funciones de fuerza dadas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , la solución de la combinación lineal  $f = \alpha f_1 + \beta f_2$  es la combinación lineal de las soluciones respectivas:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Esta propiedad se puede extender a una serie con  $N$  sumandos,  $f_n(t)$ , de los que suponemos conocidas las soluciones individuales,  $x_n(t)$ :

$$L\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(t) = f(t)$$

Por lo que la solución de  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n$  es la suma de las soluciones de cada término,  $\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n$ .

### 3.7.2. Análisis de Series de Armónicos

Supongamos ahora que el término de fuerza externa,  $f(t)$ , se puede expresar mediante una serie de armónicos, es decir, como suma de senos y cosenos con distintas frecuencias y afectados de distintas amplitudes. Conocemos ya por lo estudiado en este capítulo la solución a cada uno de los términos armónicos individuales. Como vimos, esta solución consta de un término que sólo interviene durante el régimen transitorio (solución general de la homogénea) y de otro que caracteriza el régimen estacionario o permanente (solución particular de la completa). En el desarrollo que sigue estudiaremos tan sólo el régimen permanente, admitiendo la hipótesis por otra parte bastante usual, de que el transitorio sólo dura un tiempo breve y por tanto carece de importancia a nuestros efectos.

Así, si la serie que define la fuerza aplicada es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos \omega_n t,$$

la solución (régimen estacionario) para cada término de la serie es una función armónica cuya amplitud viene dada por la ecuación (3.22):

$$x_n(t) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \omega_0^2 \xi^2}} \cos(\omega_n t - \delta_n),$$

siendo el desfase el definido por (3.20):

$$\delta_n = \arctan \frac{2\omega_n \omega_0 \xi}{\omega_0^2 - \omega_n^2}.$$

Sumando todas estas soluciones obtendremos la solución global,  $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$ .

### 3.7.3. Desarrollo en Serie de Fourier

El *Teorema de Fourier* afirma que cualquier función periódica  $f(t)$ , de periodo  $\tau$ , se puede desarrollar en serie de armónicos, de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t), \quad (3.39)$$

siendo  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/\tau$ .

Este teorema quedará demostrado si somos capaces de proporcionar un método para calcular los coeficientes  $a_n, b_n$  que hacen posible el desarrollo (3.39). En primer lugar, calculemos la integral

$$\int_0^\tau f(t) \cos m\omega t dt.$$

Al estar  $f(t)$  definida mediante la serie (3.39) y suponiendo los requisitos necesarios de convergencia de ésta, la integral anterior se puede descomponer en la suma de las integrales de cada uno de los términos. Multiplicando cada uno de estos términos por  $\cos m\omega t$  e integrando, resultan entonces las siguientes integrales, según los valores de  $m$  y  $n$ :

a. si  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} a_n \int_0^\tau \cos n\omega t \cos m\omega t dt &= \\ a_n \int_0^\tau \frac{1}{2} [\cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t] dt &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n \int_0^\tau \sen n\omega t \cos m\omega t dt &= \\ b_n \int_0^\tau \frac{1}{2} [\sen(n+m)\omega t + \sen(n-m)\omega t] dt &= 0 \end{aligned}$$

b. si  $n = m$ ,

$$\begin{aligned} a_m \int_0^\tau \cos^2 m\omega t dt &= a_m \int_0^\tau \frac{1 + \cos 2m\omega t}{2} dt = a_m \frac{\tau}{2} \quad (3.40) \\ b_m \int_0^\tau \sen m\omega t \cos m\omega t dt &= b_m \int_0^\tau \frac{1}{2} \sen 2m\omega t dt = 0 \end{aligned}$$

Vemos pues que el único término que da una contribución no nula es el correspondiente a  $a_m \cos m\omega t$ . Análogamente, multiplicando (3.39) por  $\sen m\omega t$  e integrando, la única integral no nula de la serie resulta ser:

$$\int_0^\tau f(t) \sen m\omega t dt = b_m \int_0^\tau \sen^2 m\omega t dt = b_m \frac{\tau}{2}. \quad (3.41)$$

Por último, la integral directa de  $f(t)$  es:

$$\int_0^\tau f(t) dt = \int_0^\tau \frac{1}{2} a_0 dt = a_0 \frac{\tau}{2}. \quad (3.42)$$



De (3.40), (3.41) y (3.42) deducimos los coeficientes de (3.39), que son:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (3.43)$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \quad (3.44)$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \, dt \quad (3.45)$$

Al tener un método para calcular estos coeficientes para cualquier valor de  $n$ , queda demostrado el teorema de Fourier y definido el desarrollo en serie.

El desarrollo en serie de Fourier tiene aplicaciones importantísimas en la ingeniería, ya que convierte el análisis de una función periódica cualquiera en los análisis de casos elementales de términos armónicos, cuya solución nos es conocida. La función  $f(t)$  no tiene limitación, salvo que sea periódica. Puede estar definida mediante una función analítica cualquiera, por puntos, etc. En la práctica, bastará tomar tan sólo un cierto número de términos del desarrollo, para obtener la precisión suficiente, truncando el resto de la serie.

Es posible extender el método del desarrollo en serie de Fourier a una función cualquiera, aunque no sea periódica. Para ello se emplea el truco de construir una nueva función periódica, con un periodo suficientemente largo que abarca el intervalo de tiempo de interés de la función no periódica. En esta nueva función se añade a la función original, al cabo del intervalo de tiempo de interés, un intervalo de silencio, hasta un tiempo suficientemente grande,  $\tau \rightarrow \infty$ . Al cabo de un tiempo  $\tau$ , nuestra función se volvería a repetir. Sin embargo, como sólo estamos interesados en la solución para  $t < \tau$ , esto no supone ningún inconveniente.

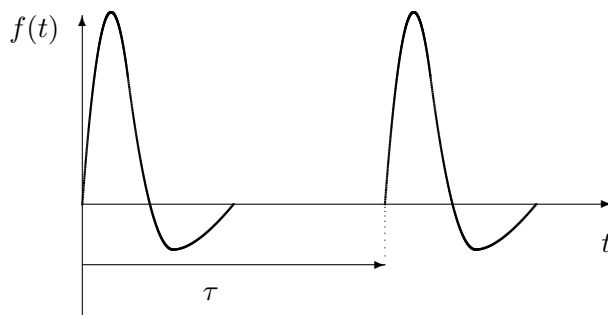


Figura 3.17: Desarrollo en serie de Fourier de funciones no periódicas

En este último caso, si  $\tau \rightarrow \infty$ , los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  deducidos de (3.43, 3.44) se convierten en infinitésimos, puesto que  $\tau$  está en el denominador. La suma del desarrollo en serie de Fourier se transforma (en el límite)

en una integral, denominada *transformada de Fourier*. Esta integral tiene exactamente la forma inversa de las integrales para los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  expresadas en las ecuaciones (3.43, 3.44), términos que están relacionados con cada valor de la frecuencia,  $\omega_n = n\omega$ . Este conjunto de frecuencias discreto, al aumentar  $\tau$  tiende a una distribución continua. La transformada de Fourier se puede interpretar entonces como un cambio de formulación, pasando a expresar el problema inicialmente formulado en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. No desarrollaremos más este tema, para no alargar innecesariamente este capítulo, pudiendo consultarse en el libro de Fernández Palacios o en otros textos más específicos de vibraciones<sup>6</sup>

### 3.8. Análisis de Transitorios mediante la Función de Green

El desarrollo en serie de Fourier proporciona la solución del régimen estacionario, ya que en su deducción despreciamos deliberadamente el efecto de los transitorios. Para los casos en los que sea necesario obtener el régimen transitorio se puede aplicar el método de la función de Green, que desarrollamos a continuación.

#### 3.8.1. Respuesta a una Función Impulso

Partimos, como antes, de la ecuación general del movimiento oscilatorio forzado (3.37),

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t),$$

cuya solución general es  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ .

Suponemos que este sistema está sometido a un impulso instantáneo en el instante  $t = \theta$ , un pico de fuerza que se puede suponer de duración prácticamente nula, pero que por su intensidad tiene un efecto apreciable sobre el sistema. Matemáticamente, una función impulso se representa mediante la función  $\delta$  de Dirac, definida como:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \delta(0) \rightarrow \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>Se recomiendan: R.W. Clough y J. Penzien: *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, New York, 1975; L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw Hill, New York, 1986.

Una manera de entender el significado de la función singular  $\delta(t)$  es considerarla como el límite de una función continua como la representada en la figura 3.18, con forma de triángulo isósceles de base  $2\epsilon$  y altura  $1/\epsilon$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Así, un impulso de valor  $I$  en  $t = \theta$  se representa por  $f(t) = I \delta(t - \theta)$ .

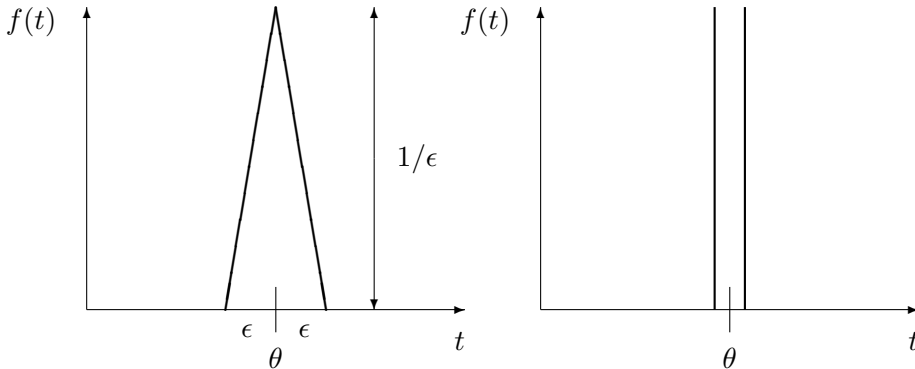


Figura 3.18: Impulso, representado por la función delta de Dirac.

Integrando esta fuerza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} I \delta(t - \theta) dt = I$$

Puesto que  $f(t) = F(t)/m$ ,  $I$  será el impulso por unidad de masa, o sea, el incremento de velocidad que adquiere  $m$  por virtud de la impulsión. Podemos entender ésta por lo tanto como una causa instantánea que modifica el estado de velocidad en  $t = \theta$ , quedando después el sistema en vibración libre, ya que  $f(t)$  desaparece.

La solución a un impulso elemental es pues la respuesta en vibraciones libres con las condiciones iniciales  $x(\theta) = 0$ ;  $\dot{x}(\theta) = I$ . La solución para  $t > \theta$  es la de la homogénea:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t), \quad \text{para } t > \theta,$$

siendo  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ .

Sustituyendo en la ecuación del movimiento las dos condiciones iniciales, obtenemos las constantes  $A$  y  $B$ :

$$A = -\frac{I e^{-\xi\omega_0 \theta}}{\omega} \operatorname{sen} \omega \theta,$$

$$B = -\frac{I e^{-\xi\omega_0 \theta}}{\omega} \cos \omega \theta.$$

Quedando, finalmente, la solución para la respuesta a un impulso elemental como:

$$x(t) = \frac{I}{\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \text{sen } \omega(t-\theta), \quad \text{para } t > \theta. \quad (3.46)$$

### 3.8.2. Análisis de Transitorios para una Excitación Arbitraria

Suponemos ahora que sobre el oscilador actúa una fuerza  $F(t)$  cualquiera, no impulsiva. Podremos descomponer, dividiendo el tiempo en intervalos infinitesimales, esta fuerza como una serie de impulsos elementales, correspondientes a los rectángulos elementales en el diagrama de  $F(t)$  (figura 3.19):

$$dI = \frac{F(\theta)}{m} d\theta.$$

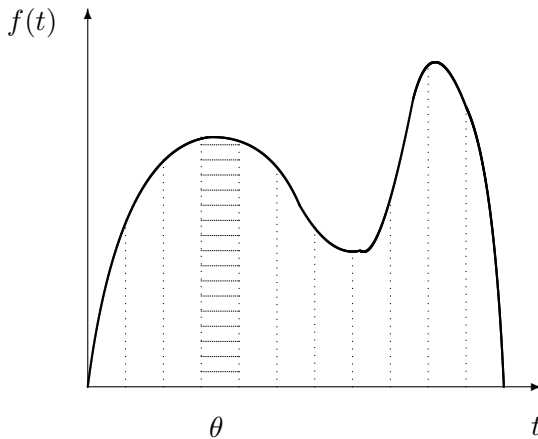


Figura 3.19: Descomposición de  $f(t)$  en impulsos elementales

Por la linealidad del operador, podremos obtener la respuesta global en un instante  $t$  dado, como la suma o integral de las respuestas a todos estos impulsos elementales  $dI$  para  $\theta < t$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(\theta)}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \text{sen } \omega(t-\theta) d\theta.$$

Se define la *función de Green*  $G(t, \theta)$  como:

$$G(t, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \text{sen } \omega(t-\theta), \quad \text{para } t > \theta.$$

En función de  $G(t, \theta)$  la integral anterior queda por tanto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(\theta)G(t, \theta) d\theta.$$

Esta integral se llama también *integral de Duhamel*. En la práctica, las integrales se evaluarán numéricamente, salvo casos particulares simples que admitan resolución analítica.

Resumiendo, el método de análisis mediante la función de Green:

- Proporciona la respuesta transitoria completa, no limitándose al régimen permanente.
- Incluye automáticamente la información sobre las condiciones iniciales.
- Sirve para funciones de carga arbitrarias.

### 3.9. Métodos Numéricos para Integración Directa

En la práctica la resolución de problemas dinámicos reales se realiza, salvo casos particulares simplificados, mediante cálculo numérico en ordenadores digitales. Los métodos anteriormente expuestos son susceptibles de tratamiento numérico a través de las transformadas discretas de Fourier, o de la evaluación numérica de las integrales de convolución de Duhamel (función de Green).

Otra técnica interesante que permite resolver numerosos problemas de índole muy general es la utilización de métodos numéricos para la *integración directa* de las ecuaciones de la dinámica. Este método tiene la ventaja sobre los anteriormente expuestos que no necesita presuponer la linealidad del oscilador, por lo cual es posible aplicarlo también a otros casos más generales en que los osciladores no sean lineales. Además, de forma automática se incluyen todos los términos, tanto transitorios como permanentes.

Aunque existen numerosos métodos de integración paso a paso en el tiempo, expondremos de forma resumida sólo dos: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de 4.º orden. Ambos son métodos de un paso, sencillos de formular, y se encuentran entre los más usados en la práctica. Para una exposición más detallada de estos y de otros métodos de integración de ecuaciones diferenciales, se recomienda consultar otros textos más especializados<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Véase, por ejemplo, W.E. Boyce y R.C. DiPrima: *Elementary Differential Equations*

En ambos casos se realiza una *integración paso a paso*, para lo cual supondremos que el tiempo se ha discretizado en intervalos pequeños  $\Delta t$ , definiendo instantes discretos  $t_n$ :

$$t_0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n\Delta t, \quad \dots, \quad t_{fin}$$

La ecuación a resolver será, como siempre:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t). \quad (3.47)$$

Suponemos conocida la solución en el instante  $t_n$ :  $x_n = x(t_n)$ ,  $\dot{x}_n = \dot{x}(t_n)$ . Se trata de obtener un procedimiento para avanzar la solución al instante  $t_{n+1}$ :  $x_{n+1}$ ,  $\dot{x}_{n+1}$ .

### 3.9.1. Método de Euler

Suponemos conocidos en un instante dado  $x_n$  y  $\dot{x}_n$ . A partir de la ecuación (3.47) se despeja  $\ddot{x}_n$ :

$$\ddot{x}_n = f(t_n) - 2\xi\omega_0\dot{x}_n - \omega_0^2x_n.$$

Los valores en  $n + 1$  se obtienen mediante un desarrollo en serie de Taylor truncado a partir del segundo término:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \ddot{x}_n\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n\Delta t \end{aligned}$$

Así, procederíamos a partir del estado inicial conocido  $(x_0, \dot{x}_0)$  para obtener primeramente  $(x_1, \dot{x}_1)$ , luego  $(x_2, \dot{x}_2)$ , y así sucesivamente hasta el instante  $t_{fin}$ .

El método de Euler es muy sencillo de formular y de operar, siendo los algoritmos evaluables de manera explícita. Admite fácilmente la extensión al caso en que los coeficientes de la ecuación dependen del tiempo, o cuando la ecuación es no lineal.

El error de truncamiento local (el cometido para la solución de  $x$  en cada paso) es del orden  $O(\Delta t^2)$ . Por lo tanto, disminuyendo el tamaño del paso  $\Delta t$  suficientemente, se podrá llegar a reducir el error de truncamiento local tanto como se desee. Por ejemplo, al dividir  $\Delta t$  por 2, el error de truncamiento local quedará dividido por cuatro. Sin embargo, para el cómputo de la solución global, necesitaremos el doble de intervalos para alcanzar el

---

*and Boundary Value Problems*, (5.<sup>a</sup> ed.), Wiley, 1992, o a nivel más avanzado, C.W. Gear: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1971.

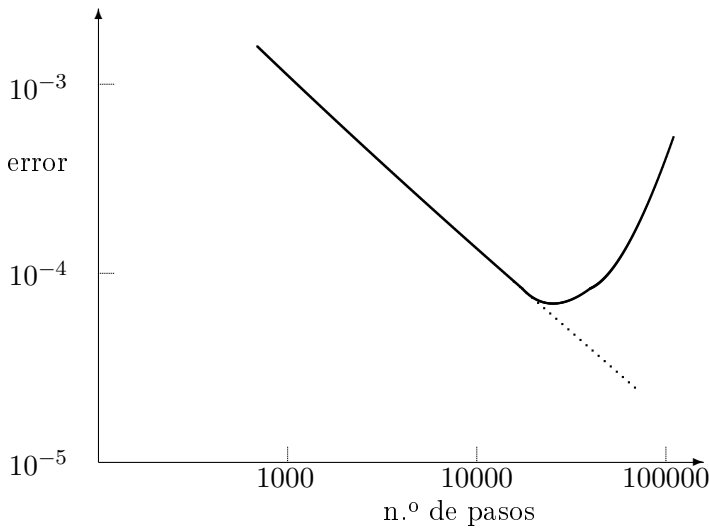


Figura 3.20: *Error obtenido en la solución numérica de la ecuación  $\dot{x} = x$  mediante el método de Euler, para  $t \in [0, 1]$ , con  $x_0 = 1$ . Precisión de cálculo: 32 bits.*

mismo valor del tiempo final, por lo que si se adopta como cota del error la suma absoluta de los errores de truncamiento en cada intervalo, el error global final será la mitad del obtenido anteriormente.

Por tanto, se dice que el método de Euler tiene convergencia de primer orden o lineal: el error global es de orden  $O(\Delta t)$ , por lo que disminuye tanto como se desee al reducir  $\Delta t$ , de manera lineal.

Sin embargo, en la práctica hay que considerar otra fuente de error además de la puramente algorítmica: los errores de redondeo debido a la aritmética con precisión limitada. Esto es inevitable, especialmente en los ordenadores digitales, en que la computación se hace con un número fijo de dígitos. Cuanto más subdivisiones del tiempo se realicen, mayor es este error acumulado. Por este motivo, la convergencia lineal a menudo resulta demasiado débil: al realizar gran cantidad de operaciones, puede llegar un momento en el que los errores de redondeo predominen y la solución no converja con la precisión requerida (3.20).

Debido a su débil convergencia, es aconsejable bastante prudencia antes de emplear el método de Euler, comprobando en cada caso que se obtiene un nivel de error aceptable.

### 3.9.2. Método de Runge-Kutta

Se trata de un método más preciso que el de Euler, aunque también más costoso de formular y, sobre todo, de operar. Para exponerlo transformaremos en primer lugar ecuación dinámica de segundo orden en un sistema de

### 3.40 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}u &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}, \\ \dot{u} &= f(t) - 2\xi\omega_0 u - \omega_0^2 x.\end{aligned}$$

Para emplear una notación más compacta, definimos la variable «vectorial»  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}.$$

Con esta notación, el problema se formula como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ f(t) - 2\xi\omega_0 y_2 - \omega_0^2 y_1 \end{Bmatrix}$$

Para fijar ideas, con esta notación el método de Euler explicado arriba se escribiría simplemente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n \Delta t.$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se basa en la utilización de cuatro coeficientes  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ , que se definen como:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1 \Delta t/2) \\ \mathbf{k}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2 \Delta t/2) \\ \mathbf{k}_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3 \Delta t)\end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, la expresión de  $\mathbf{y}_{n+1}$  es:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$$

Una vez obtenido  $\mathbf{y}_{n+1}$  repetiríamos el proceso para el siguiente paso.

Con este método<sup>8</sup> se obtiene una convergencia del orden  $O(\Delta t^4)$ , razón por la cual se denomina de 4.º orden. Por tanto, es mucho más exacto que el método de Euler, alcanzando una precisión suficiente en la gran mayoría de los casos. También es aplicable a problemas no lineales. Sin embargo, requiere un esfuerzo mucho mayor para su cómputo, siendo necesario evaluar

---

<sup>8</sup>En el libro de Fernández Palacios se incluye un programa en lenguaje BASIC para el método de Runge-Kutta de 4.º orden, fácilmente adaptable a cualquier ecuación que se desee integrar, para ordenadores personales o calculadoras de bolsillo.



en cada paso los coeficientes  $k_i$ . En los casos en los que se tengan muchas variables y funciones complejas de evaluar, su coste computacional puede resultar excesivo. En cambio, para problemas con un sólo grado de libertad es muy recomendable al ser su solución en los ordenadores actuales muy rápida.

### 3.10. Problemas propuestos.

**Problema 3.1.** Un vehículo de masa  $m = 10\text{ T}$  ( $1\text{ T} = 10^3\text{ kg}$ ) posee una suspensión que se puede representar como un resorte elástico de constante  $k$  interpuesto entre la masa  $m$  y el terreno. El vehículo viaja a una velocidad de  $72\text{ km/h}$  sobre terreno ondulado, definido por la ecuación  $z = 0,01 \sin x$ , donde  $z$  es la elevación de la superficie y  $x$  la coordenada en la dirección de la marcha. Se pide:

- Supuesto alcanzado el régimen permanente, valor máximo de la rigidez  $k$  para que la aceleración máxima experimentada por el vehículo no exceda de  $1/10$  de la correspondiente al vehículo sin suspensión.
- Tomando el valor de  $k$  del apartado anterior y un amortiguamiento viscoso igual al  $1\%$  del crítico, estando el vehículo en reposo sobre una superficie plana sufre un impacto vertical que le produce una velocidad inicial de  $2\text{ m/s}$ . Calcular la amplitud inicial de las oscilaciones producidas en el vehículo, así como el tiempo necesario para que dicha amplitud se reduzca a la mitad.

(examen final, 13/2/1991)

**Problema 3.2.** Una masa  $M$  se halla sujeta a un resorte lineal de constante  $k$ , con un amortiguamiento viscoso de constante  $c$ . El valor de  $c$  es tal que, sometido a vibraciones libres, la amplitud del movimiento se reduce a la mitad al cabo de un tiempo  $T$ . El sistema se halla sometido a una fuerza senoidal de intensidad máxima  $q$ . Se pide calcular el factor de amplificación dinámico en la resonancia. Tomar los valores numéricos  $m = 1\text{ kg}$ ,  $T = 20 \ln 2\text{ s}$ ,  $k = 100\text{ N/m}$ .

(NOTA: se denomina factor de amplificación dinámico al cociente entre la amplitud máxima debida a la carga senoidal y la amplitud estática para una carga  $q$  constante)

(Examen parcial, 15/6/1992)

**Problema 3.3.** Una balanza está formada por un platillo de masa  $m$ , sustentado por un resorte lineal sin amortiguamiento. Se sabe que al colocar el platillo sobre el resorte, éste sufre un descenso  $\delta$  hasta la nueva posición

### 3.42 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

de equilibrio. Con la balanza en reposo, cae sobre el platillo desde una altura  $h$  una masa  $M = 3m$ , siendo el choque perfectamente plástico (coeficiente de restitución nulo). Se pide:

- Ecuaciones del movimiento subsiguiente.
- Valor mínimo de  $h$  para que a lo largo del movimiento la masa  $M$  se despegue del platillo (se debe considerar que, después del primer choque,  $M$  no queda adherida al platillo, pudiendo por tanto separarse llegado el caso).

(Examen final, 1/9/1993)

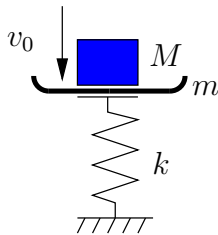


Figura 3.21: *Problema 3.3*

**Problema 3.4.** Un vehículo de masa  $m$  posee una suspensión que se puede representar mediante un resorte elástico de constante  $k$  y amortiguamiento despreciable, interpuesto entre la masa del vehículo y las ruedas (consideradas de masa despreciable), tal como se muestra en la figura 3.22. El vehículo viaja con velocidad constante  $v$  sobre un pavimento regular y horizontal en el que existe un pequeño escalón transversal de altura  $h$  y longitud  $L$ . Estudiar el movimiento vertical del vehículo, calculando el periodo propio y la amplitud de las oscilación. Se supondrá: que el tamaño de la rueda es despreciable frente al escalón, por lo que pasa instantáneamente del pavimento al escalón y viceversa; que no existen efectos relativos a percusiones; y que se puede despreciar el desplazamiento vertical que pueda sufrir la carrocería del vehículo mientras que se sube el escalón.

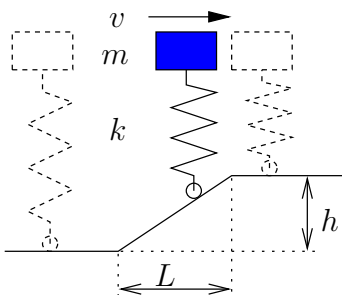


Figura 3.22: *Problema 3.4*

**Problema 3.5.** Una masa  $m$  se mueve sobre una recta horizontal con rozamiento de constante  $\mu$ , sometida a la acción de un resorte lineal de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , cuyo otro extremo está anclado a la recta. Se pone en movimiento estirando el resorte una elongación inicial  $\delta_0 = x_0 - l_0$  y soltándolo con velocidad inicial nula. Se observa que la masa efectúa un movimiento de ida y otro de vuelta, parándose después de esta primera vuelta. Se pide:

- Ecuación diferencial del movimiento, distinguiendo si fuere necesario entre las diversas fases del mismo.
- Integración de la ecuación, para obtener de forma explícita  $x(t)$ .
- Rango de valores que puede tomar  $\delta_0$  para que el movimiento sea una única ida y vuelta.
- Adoptando el valor máximo del rango anterior, calcular la energía disipada en el movimiento.

(Examen final, 13/6/2000)

**Problema 3.6.** Cuatro varillas iguales, lisas y de longitud  $2b$  cada una, están soldadas entre sí formando un cuadrado horizontal fijo de lado  $2b$ . Sobre cada una de ellas puede moverse una partícula de masa  $m$ . Cada partícula está unida a las dos situadas sobre lados contiguos, mediante sendos resortes elásticos de constante  $k$  y longitud natural despreciable. Se abandona el sistema en reposo, estando situada cada partícula a una distancia  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) del centro de la varilla sobre la que debe permanecer. Se pide:

- Ecuaciones del movimiento de las partículas.
- Demostrar que al cabo de un cierto tiempo  $t$  (cuyo valor se calculará) las posiciones de las partículas determinan un cuadrado (cuyo lado  $l$  también se calculará) con independencia de los valores iniciales  $a_i$ .

(Examen final, 29/1/97)

**Problema 3.7.** Un equipo tiene un bastidor rígido de masa  $M$  sobre una fundación elástica que puede idealizarse como un resorte de constante  $k$  que permite únicamente el movimiento vertical, con un amortiguamiento del 5% del crítico. Dentro del bastidor hay un motor cuyo efecto dinámico equivale a una masa  $m$  con excentricidad  $e$ , girando a una velocidad constante  $\Omega$ . Considerando los valores numéricos  $M = 900$  kg,  $m = 100$  kg,  $e = 0,01$  m,  $k = 10^7$  N/m,  $\Omega = 2000$  r.p.m., se pide:

- Ecuación diferencial del movimiento.

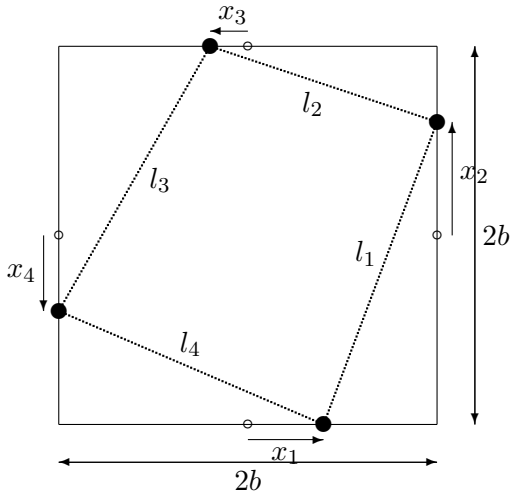


Figura 3.23: Problema 3.6

- b. Solución general de la ecuación anterior, tanto para el régimen transitorio como para el permanente (pasado suficiente tiempo). Se considerará que en el instante inicial la masa excéntrica está en la posición inferior con el bastidor en reposo.
- c. Obtener el valor de  $\Omega$  que produce resonancia para la amplitud del movimiento, y calcular dicha amplitud resonante.

(Examen parcial, 30/1/1999)

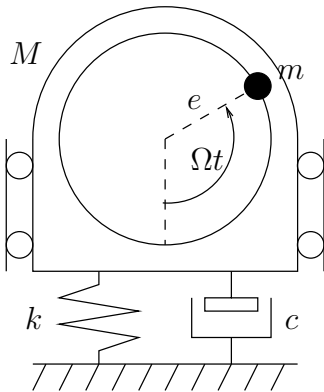


Figura 3.24: Problema 3.7