

Capítulo 4

Cinemática de Sistemas Rígidos

Antes de comenzar con el estudio de la dinámica de sistemas, conviene profundizar en la descripción geométrica del movimiento o cinemática. Podríamos definir la cinemática como la geometría parametrizada por un parámetro «tiempo» (t), en la que se estudia el movimiento sin atender a las causas del mismo (fuerzas). El propósito de este capítulo es desarrollar los conceptos necesarios de movimiento relativo de sistemas, y su aplicación al estudio de los campos de velocidades y aceleraciones de sólidos rígidos.

Más adelante (capítulo 8) retornaremos a la cinemática de sólidos rígidos, estudiando los movimientos de rotación finita en tres dimensiones.

4.1. Derivación de Vectores en Sistemas Móviles

Supongamos un sistema de referencia S que denominaremos absoluto o «fijo», y otro S' que se mueve respecto a él, al que llamaremos sistema relativo o «móvil». Consideremos un vector \mathbf{p} dado. Este, por su naturaleza intrínseca, puede ser «medido» desde cada uno de los sistemas de referencia S y S' , dando lugar a distintas ternas de coordenadas, que estarán relacionadas entre sí mediante las relaciones de cambio de coordenadas en el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^3 . Estas coordenadas están asociadas a las bases de vectores, $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ ligada a S , y $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ligada a S' , ambas ortogonales. En un instante dado se pueden expresar coordenadas en distintos sistemas para caracterizar un vector; sin embargo, no debe haber duda de que el vector es único por su definición intrínseca.

Por el contrario, la derivada del vector \mathbf{p} será distinta, según la mida

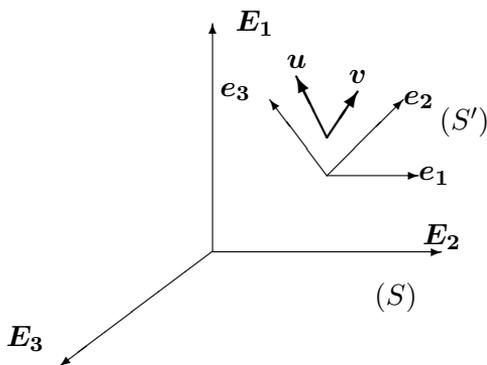


Figura 4.1: *Sistemas de referencia fija (S) y móvil (S').*

un observador ligado al sistema fijo o un observador solidario con el sistema móvil¹. Distinguiremos ambas velocidades denominándolas derivada «absoluta» —o simplemente derivada— en el primer caso, $\dot{\mathbf{p}} = (d\mathbf{p}/dt)_{\text{abs}}$, y derivada «relativa» en el segundo, $(d\mathbf{p}/dt)_{\text{rel}}$.

Para obtener la relación entre ambas derivadas, imaginemos en primer lugar dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , constantes para el observador ligado al sistema móvil. Es decir, se trata de dos vectores que se mueven rígidamente unidos a S' , como si pudiéramos imaginarlos «pinchados» en S' . En estas condiciones, tanto su módulo como el ángulo que forman se conserva, por lo que su producto escalar será también constante:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \quad (4.1)$$

Conviene recalcar que, según la notación anterior, $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{v}}$ representan las derivadas absolutas; las derivadas relativas al sistema móvil se anularían de manera trivial, al tratarse de vectores fijos en relación con ese sistema.

La expresión (4.1) caracteriza la derivada como una *aplicación hemisimétrica*. Antes de desarrollar más el significado y consecuencias de esta propiedad, veamos la definición y algunas características de este tipo de aplicaciones.

Aplicaciones hemisimétricas.—

DEFINICIÓN: *Se llama aplicación hemisimétrica en un espacio vectorial Euclídeo \mathbb{R}^3 a toda aplicación L del espacio vectorial en sí mismo, $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow$*

¹Insistimos en que esta derivada es *otro vector*, no se trata simplemente de distintas coordenadas. De aquí la importancia que adquiere en la mecánica el concepto de observador cuando se caracteriza la variación de las magnitudes del movimiento.

$\mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \mapsto L(\mathbf{u})$, tal que para una pareja cualquiera de vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , se cumple:

$$L(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = -L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

A partir de esta definición es inmediato comprobar las propiedades siguientes:

1. $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$
2. Si $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base, se pueden definir los siguientes coeficientes² asociados a la aplicación:

$$\widehat{\Omega}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot L(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \widehat{\Omega}_{ij} = -\widehat{\Omega}_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.2)$$

3. $L(\cdot)$ es lineal, es decir, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v}).$$

En efecto, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= -(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot L(\mathbf{x}) = -[\alpha\mathbf{u} \cdot L(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{v} \cdot L(\mathbf{x})] \\ &= \mathbf{x} \cdot [\alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

Por tanto, para un vector genérico $\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j$:³

$$L(\mathbf{x}) = x_j L(\mathbf{e}_j).$$

Si denominamos σ_i a las coordenadas del vector imagen de \mathbf{x} , es decir $L(\mathbf{x}) = \sigma_i \mathbf{e}_i$, estas σ_i se obtienen proyectando $L(\mathbf{x})$ sobre \mathbf{e}_i :

$$\sigma_i = \mathbf{e}_i \cdot [x_j L(\mathbf{e}_j)] = \widehat{\Omega}_{ij} x_j;$$

en notación matricial⁴,

$$\{\sigma_i\} = [\widehat{\Omega}_{ij}] \{x_j\}, \quad (4.3)$$

²Éstos pueden también considerarse como componentes de un tensor hemisimétrico

³En lo sucesivo adoptaremos el convenio de sumación implícita de Einstein, por el que, salvo indicación en contra, los índices repetidos se deben entender sumados a lo largo de todo su rango.

⁴Adoptaremos en lo sucesivo la siguiente notación para las expresiones matriciales: $\{\mathbf{b}\} = \{b_i\}$ para matrices columna, $\|\mathbf{a}\| = \|a_i\|$ para matrices fila, es decir, $\|\mathbf{a}\| = \{\mathbf{a}\}^T$, y $[\mathbf{C}] = [C_{ij}]$ para matrices de dos índices.

siendo $[\widehat{\Omega}_{ij}]$ una matriz hemisimétrica, según se vió en (4.2). Así, la diagonal principal es nula y tan sólo tiene tres elementos no nulos independientes. Eligiendo convencionalmente la nomenclatura para estos tres elementos, podemos representarla sin pérdida de generalidad de la siguiente manera⁵:

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{ij} &= \Omega_k \epsilon_{kji} \\ \Omega_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \widehat{\Omega}_{jk} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad [\widehat{\Omega}_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La denominación empleada para los 3 componentes no nulos de $[\widehat{\Omega}_{ij}]$ permite asociar esta matriz hemisimétrica con una terna $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$. Es posible comprobar, verificando que sigue las reglas de transformación de coordenadas ante cambios de base propias de un espacio vectorial⁶, que esta terna corresponde a un vector que denominaremos $\boldsymbol{\Omega}$, *vector axial* asociado a la aplicación hemisimétrica $L = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}$:

$$\boldsymbol{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_i \mathbf{e}_i = \Omega_1 \mathbf{i} + \Omega_2 \mathbf{j} + \Omega_3 \mathbf{k}.$$

Al tratarse de un vector, estarán definidas sobre $\boldsymbol{\Omega}$ las operaciones propias de los vectores euclídeos: suma, producto por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial.

La definición hecha del vector $\boldsymbol{\Omega}$ permite establecer la equivalencia del producto por la matriz hemisimétrica $[\widehat{\Omega}_{ij}]$ con el producto vectorial por $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x} &= \widehat{\Omega}_{ij} x_j \mathbf{e}_i \\ &\equiv [\widehat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\mathbf{x}\} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_2\Omega_3 + x_3\Omega_2 \\ x_1\Omega_3 - x_3\Omega_1 \\ -x_1\Omega_2 + x_2\Omega_1 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x} &= \epsilon_{ijk} \Omega_i x_j \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_3\Omega_2 - x_2\Omega_3)\mathbf{e}_1 + (x_1\Omega_3 - x_3\Omega_1)\mathbf{e}_2 + (x_2\Omega_1 - x_1\Omega_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

⁵Las componentes ϵ_{ijk} corresponden al tensor permutación, siendo su valor +1 ó -1 según la permutación sea par o no, e igual a cero si algún índice se repite.

⁶Ver por ejemplo H. Goldstein: *Mecánica Clásica*, 2.^a ed., cap. 4, apartado 4.8.

En resumen, como consecuencia de lo anterior, concluimos:

la derivación de un vector constante que se mueve rígidamente unido al sistema móvil es una transformación hemisimétrica, o expresado de forma equivalente, resulta ser el producto vectorial por un determinado vector Ω :

$$\dot{\mathbf{u}} = \Omega \wedge \mathbf{u}.$$

El vector Ω caracteriza el movimiento del sistema de referencia móvil (S'), y se corresponde con el concepto intuitivo de velocidad angular de rotación de un sistema rígido. Para comprender esto, consideremos la velocidad de un punto definido por el radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{u}$ (o lo que es lo mismo, la velocidad del extremo de \mathbf{u}) cuando el triedro gira con velocidad angular Ω alrededor de un eje dado (figura 4.2).

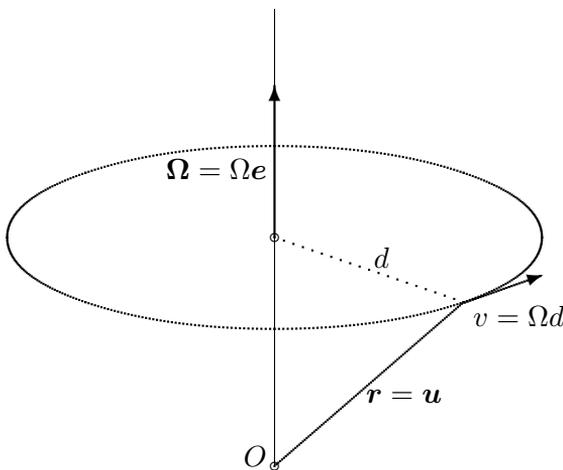


Figura 4.2: Interpretación de Ω como una velocidad de rotación.

Si el punto en cuestión se halla situado a distancia d del eje, su velocidad es Ωd , en dirección tangencial a la circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro es la intersección del eje con el plano. Este mismo resultado se obtiene del desarrollo geométrico de la expresión $\Omega \wedge \mathbf{r}$. Por este motivo, a Ω se le llama *velocidad de rotación* del sistema móvil.

Considerando ahora el caso más general de un vector cualquiera $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$, no necesariamente constante respecto del sistema móvil, su derivada (absoluta) será:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i (\Omega \wedge \mathbf{e}_i).$$

En esta expresión, el primer término corresponde a la derivada que mediría un observador móvil para el cual los vectores de base móvil \mathbf{e}_i no varían. Así llegamos a

$$\dot{\mathbf{p}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{abs}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{p} \quad (4.6)$$

Es decir, para obtener la derivada (absoluta) de un vector referido a un sistema móvil se precisa añadir a la derivada relativa un término complementario debido a la rotación del sistema móvil, que es el producto vectorial de $\boldsymbol{\Omega}$ por el propio vector que se deriva.

Es importante recalcar la diferencia entre la derivada relativa a S' y la derivada relativa a S pero expresada en las coordenadas propias de S' . En el primer caso se trata de dos vectores distintos, debido a las distintas medidas de derivada observadas desde los dos sistemas de referencia, mientras que en el segundo se trata de distintas coordenadas para el mismo vector.

EJEMPLO 4.1: Deducir la *velocidad de rotación del triedro de Frenet*.

Solución. La derivada temporal de \mathbf{t} es

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \mathbf{n} v.$$

Interpretando la derivada mediante la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\Omega_n \mathbf{b} + \Omega_b \mathbf{n},$$

y de la comparación de ambas expresiones se deduce $\Omega_b = \kappa v$; $\Omega_n = 0$. Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = -\tau \mathbf{n} v;$$

e interpretándola como producto vectorial

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{b} = -\Omega_t \mathbf{n} + \Omega_n \mathbf{t}.$$

De donde se deduce que $\Omega_t = \tau v$. Por tanto, la velocidad angular buscada tiene la expresión

$$\boldsymbol{\Omega} = v\tau \mathbf{t} + v\kappa \mathbf{b}.$$

Esta ecuación permite interpretar la evolución del triedro intrínseco, al desplazarse con velocidad unidad según la curva, como una rotación con dos componentes: una de torsión, alrededor de la tangente, con velocidad angular τ , y una de curvatura, alrededor de la binormal, con velocidad angular κ . \square

4.2. Velocidad y Aceleración en Sistemas Móviles

Supongamos un sistema de referencia fijo S , y otro móvil respecto de él S' . El vector posición de un punto cualquiera respecto de S es \mathbf{r} , y respecto de S' lo denominamos $\boldsymbol{\rho}$. La relación entre los vectores posición (figura 4.3) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad (4.7)$$

donde \mathbf{r}_O define la posición del origen O de S' . Derivando esta igualdad, y teniendo en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles (4.6):

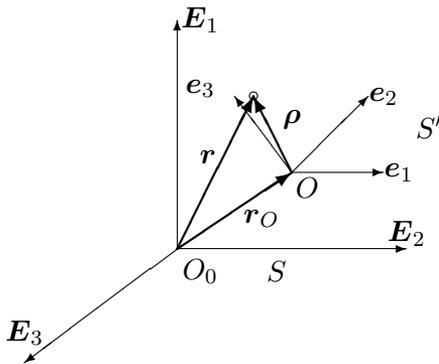


Figura 4.3: Vectores posición (\mathbf{r} , $\boldsymbol{\rho}$) en las referencias fija $S \equiv \{O_0, \mathbf{E}_i\}$ y móvil $S' \equiv \{O, \mathbf{e}_i\}$ respectivamente.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho},$$

en donde el primer término ($\dot{\mathbf{r}}_O$) es la derivada (absoluta) de la posición de O , y corresponde a una velocidad de traslación; el segundo se trata de la derivada relativa de $\boldsymbol{\rho}$, que denominaremos velocidad relativa, $\mathbf{v}_{\text{rel}} \stackrel{\text{def}}{=} (d\boldsymbol{\rho}/dt)_{\text{rel}}$; y el tercero es el término complementario de derivación de $\boldsymbol{\rho}$ debido a la rotación de S' .

Así, la expresión general de la velocidad es:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \quad (4.8)$$

Se llama *velocidad de arrastre* a la suma de los dos primeros términos, $\mathbf{v}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$, correspondiente a la velocidad que tendría un punto si estuviera fijo respecto al sistema móvil. Es decir, se trata de la velocidad con la que se ve «arrastrado» un punto, si estuviera rígidamente unido al sistema móvil. De esta manera podemos expresar de forma resumida la velocidad como suma de la velocidad de arrastre (debida al movimiento de S') y la velocidad relativa a S' :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.}$$

Derivando de nuevo la expresión (4.8) conforme a la regla expresada por (4.6), se obtiene la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

y agrupando términos,

$$\boxed{\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}} \quad (4.9)$$

En esta expresión distinguimos las siguientes componentes de la aceleración:

- *Aceleración de arrastre,*

$$\mathbf{a}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}),$$

es la aceleración que tendría un punto fijo al sistema móvil (S'), es decir «arrastrado» por el movimiento de (S');

- *Aceleración de Coriolis* o complementaria,

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

- *Aceleración relativa,* \mathbf{a}_{rel} .

Así, podemos expresar (4.9) en forma resumida:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}.}$$

Como se ve, en la expresión de la aceleración aparece un término adicional a los de arrastre y relativo, que depende de la velocidad relativa, al contrario de lo que sucedía en el campo de velocidades. Esto complica el análisis de aceleraciones respecto del de velocidades.

EJEMPLO 4.2: Desarrollar la velocidad y aceleración de la partícula del ejemplo 2.2 (pág 2.26) a través del movimiento de arrastre del aro y del movimiento de la partícula relativo al aro.

Solución. El movimiento se compone de un arrastre del aro, con velocidad de rotación (constante) ω , y de un movimiento de la partícula relativo al aro que es una rotación alrededor de su centro con ángulo φ . Haciendo

referencia a los vectores básicos definidos en la figura 2.17, las componentes de la velocidad son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{arr}} &= \rho\omega \mathbf{u}_\theta = 2R\omega \cos(\varphi/2) \mathbf{u}_\theta; \\ \mathbf{v}_{\text{rel}} &= R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

La aceleración se descompone como $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$, siendo las componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{arr}} &= -\rho\omega^2 \mathbf{u}_\rho = -2R\omega^2 \cos(\varphi/2) \mathbf{u}_\rho; \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= -R\dot{\varphi}^2 \boldsymbol{\nu} + R\ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}; \\ \mathbf{a}_{\text{cor}} &= 2\omega \mathbf{k} \wedge R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau} = -2R\omega\dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Proyectando esta aceleración sobre las direcciones tangencial y normal al aro $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ resulta:

$$\begin{aligned} a_\tau &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = R\ddot{\varphi} + R\omega^2 \sin \varphi; \\ a_\nu &= \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = -R(\omega + \dot{\varphi})^2 - R\omega^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido por otros métodos en el ejemplo 2.2. □

4.3. Campo de Velocidades del Sólido Rígido

Supongamos ahora un sólido \mathcal{B} en movimiento, y un triedro móvil de referencia ligado a él. Una manera gráfica de describir este triedro es imaginando los tres ejes cartesianos Ox , Oy y Oz «pinchados» en el sólido.

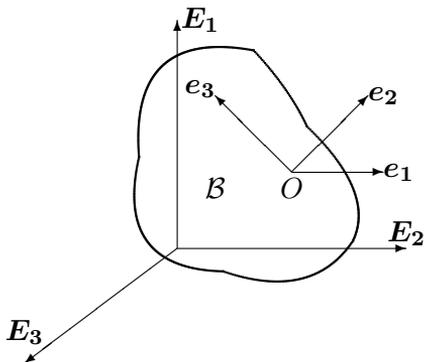


Figura 4.4: *Triédro móvil $\{O, \mathbf{e}_i\}$, ligado al sólido rígido \mathcal{B} .*

La velocidad de una partícula del sólido relativa a este triedro es obviamente nula. Para expresar la velocidad respecto del triedro fijo, podemos emplear la ecuación general deducida anteriormente (4.8), siendo ahora $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$, por lo que sólo queda la \mathbf{v}_{arr} :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}. \quad (4.10)$$

En esta ecuación, los dos sumandos que componen la velocidad tienen una interpretación clara. En primer lugar, \mathbf{v}_O es un término constante (se entiende que *constante* sobre el dominio \mathcal{B} , no a lo largo del tiempo), independiente del punto que consideremos, por lo que se trata de una componente de traslación. Por otra parte, $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ es la velocidad correspondiente a una rotación instantánea de velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje que pasa por O .

La ecuación (4.10) caracteriza el campo de velocidades del sólido rígido como un *campo de momentos*⁷. Como tal, queda descrito por los siguientes elementos básicos:

- Resultante: $\boldsymbol{\Omega}$;
- Momento en un punto O : \mathbf{v}_O ;
- Campo de momentos: $\forall P \in \mathcal{B}, \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OP}$.

De la ecuación del campo de momentos se deducen algunas propiedades interesantes:

1. *Equiproyectividad:*

$$\forall (O, P) \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{r}_{OP};$$

2. *Invariante escalar:*

$$\forall P \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$$

3. *Eje central y momento mínimo:*

Existe un eje en el cual el momento es igual para todos los puntos del mismo, con la particularidad de que es paralelo a la propia dirección del eje y además el mínimo. En nuestro caso, llamaremos a éste *eje del movimiento helicoidal*, y su obtención y propiedades las veremos en el apartado siguiente.

⁷Para una descripción y resumen de las propiedades de los Sistemas de Vectores Deslizantes y los campos de momentos resultantes, consultar J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, Anejo 1B, o M. Prieto Alberca: *Curso de Mecánica Racional – Cinemática y Estática*, Cap. I: Cálculo Vectorial

4.3.1. Movimiento Helicoidal Tangente

Busquemos los puntos en los que la velocidad dada por (4.10) se anula:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{v}_O;$$

se obtiene una ecuación vectorial en la que son datos $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{v}_O , siendo la incógnita $\boldsymbol{\rho}$. Para que tenga solución, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad⁸:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0. \quad (4.11)$$

En un caso general, no tienen porqué existir puntos de velocidad nula; Sólo los habrá si se cumple esta condición de compatibilidad. Si existen puntos de velocidad nula diremos que el movimiento es una rotación.

Generalizando algo más, busquemos ahora puntos en que la velocidad sea paralela a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir, $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega},$$

o bien

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O. \quad (4.12)$$

Esta es, de nuevo, una ecuación vectorial en $\boldsymbol{\rho}$. Veamos la solución genérica a una ecuación de este tipo:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{B}, \quad (4.13)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son dados, y \mathbf{x} es la incógnita. Es inmediato comprobar que:

1. Para que exista solución, \mathbf{A} debe ser perpendicular a \mathbf{B} (condición de compatibilidad): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.
2. Si \mathbf{x} es solución, $\mathbf{x} + \alpha \mathbf{A}$ también lo es; por lo tanto la solución no es única, sino que si existe será una familia uniparamétrica de soluciones, es decir, una recta paralela a \mathbf{A} .

Para despejar la incógnita \mathbf{x} , premultiplicamos (4.13) vectorialmente por \mathbf{A} y desarrollamos el doble producto vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{x}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})\mathbf{A} - A^2\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}. \end{aligned}$$

⁸El producto vectorial es normal a los dos argumentos

Despejando \mathbf{x} , y englobando las componentes en dirección de \mathbf{A} (es decir, $-(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})\mathbf{A}$) en un término genérico $\alpha\mathbf{A}$ (recuérdese la propiedad 2. arriba expuesta), se obtiene:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}}{A^2} + \alpha\mathbf{A}. \quad (4.14)$$

Esta expresión define, no una solución única, sino una familia de soluciones en función del parámetro α , formando un eje de dirección \mathbf{A} .

Aplicando esta solución a la ecuación (4.12), obtenemos:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha\boldsymbol{\Omega}. \quad (4.15)$$

El lugar geométrico de las soluciones dadas por (4.15) define un *eje paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$* . Por otra parte, la condición de compatibilidad exige que:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (\lambda\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = \lambda\Omega^2,$$

por lo que:

- a. Si $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O \neq 0$, es $\lambda \neq 0$, y la velocidad en el eje es $\mathbf{v} = \lambda\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$; (no existen puntos de velocidad nula)
- b. Si $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$, es $\lambda = 0$, y la velocidad en el eje es $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (el movimiento es una rotación).

Todos los puntos del eje (4.15) tienen la misma velocidad; en efecto, si $\boldsymbol{\rho}_1$ y $\boldsymbol{\rho}_2$ pertenecen al eje:

$$\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1 = \beta\boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\beta\boldsymbol{\Omega})}_{= \mathbf{0}}.$$

Por otra parte, tomando como referencia un punto O del eje, la velocidad en un punto cualquiera queda descompuesta en un término constante en dirección del eje, \mathbf{v}_O , y uno perpendicular a este primero, por serlo a $\boldsymbol{\Omega}$ (figura 4.5):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (4.16)$$

Es fácil comprender por tanto que el eje contiene los puntos de *velocidad mínima* del sólido: la velocidad de cualquier otro punto, además de la componente constante ($\lambda\boldsymbol{\Omega}$), tiene una componente adicional perpendicular a la velocidad del eje, por lo que siempre será mayor en módulo.

Esta descripción caracteriza el llamado *movimiento helicoidal tangente*. El eje de este movimiento de «sacacorchos» es el obtenido anteriormente

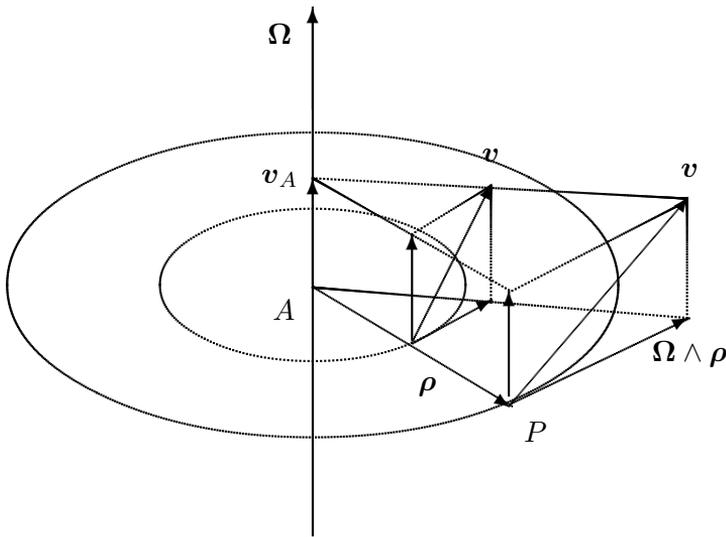


Figura 4.5: Descripción del campo de velocidades como un movimiento helicoidal tangente. La velocidad de un punto P cualquiera se obtiene sumando la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje (\mathbf{v}_A) y el momento $\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$

(4.15). Los puntos que no estén sobre el eje tienen una componente adicional de la velocidad ($\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$) perpendicular al mismo.

Esta caracterización del movimiento varía con el tiempo, tanto por el cambio de la dirección de $\mathbf{\Omega}$ cómo de su módulo. Por lo tanto, en cada momento existe un movimiento helicoidal, tangente al movimiento en ese instante. Debido a esto, (4.15) se llama «eje instantáneo» del movimiento.

Por otra parte, se denomina «tangente» porque caracteriza, al igual que las tangentes, la derivada primera del movimiento. El movimiento helicoidal tangente sirve para interpretar el campo de velocidades, pero en cambio no es válido para interpretar el campo de aceleraciones. Al igual que la tangente a una curva, es una aproximación local al movimiento, que reproduce tan sólo la primera derivada, mientras que la aceleración es la segunda derivada (ver apartado 4.4).

4.3.2. Axoides del Movimiento

A lo largo del movimiento, el eje del movimiento helicoidal tangente describe una superficie reglada, denominada *axoide*. La ecuación paramétrica del axoide será simplemente la expresada por (4.15), tomando como parámetros α y el tiempo t . Según describamos el axoide en el sistema de

referencia móvil o en el fijo obtendremos dos superficies regladas distintas denominadas, respectivamente, *axoide móvil* o *axoide fijo*:

- *Axoide móvil*

$$\rho = \frac{\Omega \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \Omega \quad (4.17)$$

- *Axoide fijo*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\Omega \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \Omega \quad (4.18)$$

Por su definición, ambos axoides son superficies regladas y en cada instante tienen en común la generatriz, que es precisamente el eje del movimiento helicoidal tangente en ese instante. Una propiedad importante de los axoides es que *son tangentes entre sí en todos los puntos del eje*. Esta afirmación, a pesar de lo que pudiera parecer intuitivamente en una primera consideración, no es evidente. Conviene precisar que una superficie reglada, en general, no tiene necesariamente un único plano tangente a lo largo de una generatriz; esto sólo será así si la superficie reglada es además desarrollable, como es el caso de los conos o los cilindros. Sin embargo, un hiperboloide reglado (de una hoja) no es desarrollable y el plano tangente es distinto en cada punto de la generatriz.

Para demostrar la propiedad arriba enunciada supongamos una curva C trazada sobre el axoide fijo, que en un instante dado tiene un punto A de

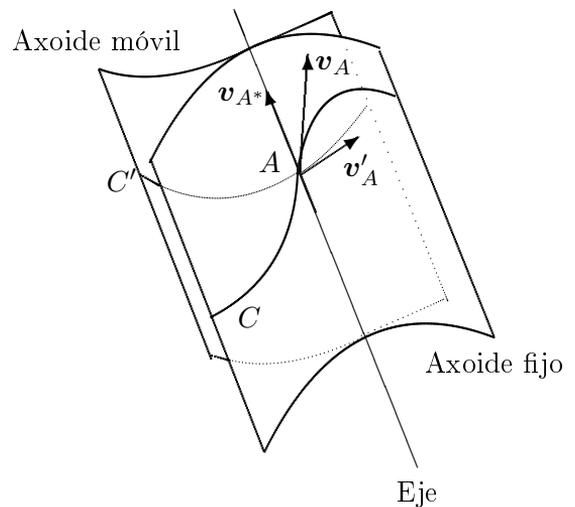


Figura 4.6: *El axoide fijo y el móvil son tangentes en todos los puntos de la generatriz común.*

intersección con el eje instantáneo (figura 4.6). Sea C' la curva correspondiente al axoide móvil, definida como la «huella» que deja el punto A sobre

el mismo, como si en A se situase constantemente un mosquito manchado de tinta. El punto A común a C y C' en cada instante es un punto geométrico que, en general, no coincidirá con una misma partícula del sólido o punto material a lo largo del movimiento; en caso contrario la curva C' se reduciría a ese punto como es lógico.

Si expresamos el vector posición del punto A en ambas referencias,

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_A,$$

y derivando mediante (4.8) para obtener la velocidad:

$$\mathbf{v}_A = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_A}_{\mathbf{v}_{A^*}} + \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}_A}{dt} \right)_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}'_A}, \quad (4.19)$$

donde:

- \mathbf{v}_A es la velocidad del punto geométrico A , que llamaremos también «velocidad de sucesión» de A ;
- \mathbf{v}_{A^*} es la velocidad de la partícula del sólido móvil A^* que coincide con A en un instante dado, o velocidad de arrastre de A ;
- \mathbf{v}'_A es la velocidad de sucesión de A (como punto geométrico), pero ahora relativa al sólido móvil.

Como la velocidad es tangente siempre a la trayectoria, se cumple que \mathbf{v}_A y \mathbf{v}'_A son tangentes, respectivamente, a las curvas C y C' . Por tanto, \mathbf{v}_A es tangente al axoide fijo y \mathbf{v}'_A al móvil. \mathbf{v}_{A^*} , por ser A^* un punto situado sobre el eje helicoidal, lleva la dirección de dicho eje y es por tanto tangente a ambos axoides. Consecuentemente, \mathbf{v}_A , al ser suma de dos vectores tangentes al axoide móvil ($\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_{A^*}$), es también tangente al mismo.

El razonamiento anterior demuestra que un vector arbitrario \mathbf{v}_A (recordemos que la curva C era arbitraria), tangente al axoide fijo en un punto del eje helicoidal, lo es también al axoide móvil. Esto quiere decir que ambos axoides son tangentes en todos los puntos del eje.

De la ecuación (4.19) se deduce la velocidad relativa del punto A entre ambos sistemas, que es precisamente la velocidad de arrastre:

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_{A^*}.$$

La anulación de esta velocidad ($\mathbf{v}_{A^*} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A = \mathbf{0}$) indicaría una rodadura sin deslizamiento entre ambos axoides. En un caso general

está claro (apartado 4.3.1) que no se tiene porqué producir necesariamente dicha rodadura perfecta, sino que puede existir además un deslizamiento en la dirección del propio eje ($\mathbf{v}_{A^*} = \lambda\boldsymbol{\Omega}$). Por lo tanto podemos interpretar el movimiento del sólido, caracterizado por la evolución del axoide móvil solidario con él, como una *rodadura del axoide móvil sobre el axoide fijo, unido a un deslizamiento en la dirección del eje*.

4.4. Campo de Aceleraciones del Sólido Rígido

El campo de aceleraciones del sólido se obtiene particularizando la expresión general de la aceleración en el movimiento relativo (4.9) al caso del sólido rígido, en el que $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) \quad (4.20)$$

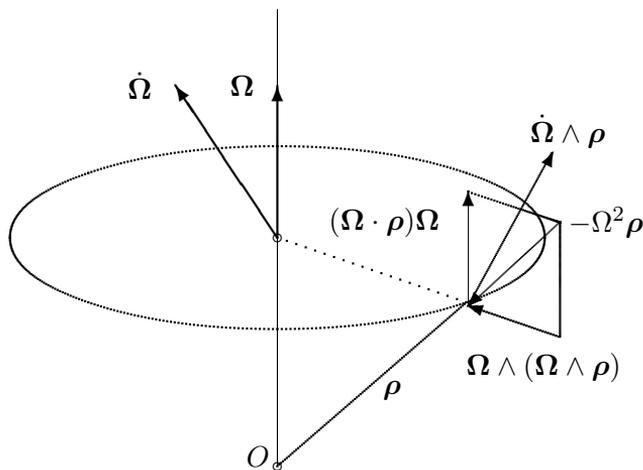


Figura 4.7: Interpretación geométrica de las componentes de la aceleración del sólido

El significado de cada uno de estos tres términos es el siguiente:

- \mathbf{a}_O es la *aceleración del origen* O , constante para todo el sólido (aceleración de traslación).
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$ es un término perpendicular a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\boldsymbol{\rho}$. Aunque por similitud con las fórmulas del movimiento circular pudiera parecer en primera instancia que este término corresponde a una aceleración tangencial, éste término sólo será tangente a la trayectoria si $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ y la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ no varía, correspondiendo entonces el movimiento a una rotación

alrededor de un eje fijo por O . En un caso general este término no será tangencial ni siquiera en el movimiento plano (ver en el apartado 4.6.3 la descomposición en aceleración normal y tangencial para el movimiento plano).

- $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}\Omega^2$ es una aceleración axípeta, descompuesta en los dos términos anteriores, uno dirigido hacia el centro O ($-\boldsymbol{\rho}\Omega^2$) y otro según el eje ($\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})$).

Conviene precisar que el movimiento helicoidal tangente descrito antes y expresado por (4.16) sirve tan sólo para describir el campo de velocidades. Al ser función tan sólo de \mathbf{v}_O y $\boldsymbol{\Omega}$, no puede representar el campo de aceleraciones, en concreto los dos primeros sumandos de la expresión (4.20), \mathbf{a}_O y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$. Sería posible encontrar un punto en que \mathbf{a}_O se anule —como veremos abajo en la discusión del polo de aceleraciones—, sin embargo el término $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ contiene información sobre el cambio de $\boldsymbol{\Omega}$, tanto en dirección como en módulo, que no se puede obtener a partir del movimiento helicoidal instantáneo.

Se llama *polo de aceleraciones* al punto en que la aceleración se anula. En general, existe un único punto en que se verifica esto, salvo casos particulares, en que puede no existir, o bien existir una recta de polos. Para obtener el polo, buscamos la solución para $\boldsymbol{\rho}$ de la expresión (4.20) igualada a cero,

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}).$$

Empleando notación matricial, podemos representar los productos vectoriales como productos por matrices hemisimétricas (ver expresiones (4.4) y (4.5)). Sean $[\hat{\boldsymbol{\Omega}}]$ y $[\hat{\boldsymbol{\Omega}}^2]$ las matrices hemisimétricas que corresponden respectivamente a los productos vectoriales por $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{a}_O\} + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\boldsymbol{\rho}\} + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]([\hat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\boldsymbol{\rho}\}) = \{\mathbf{a}_O\} + ([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}^2])\{\boldsymbol{\rho}\},$$

cuya solución,

$$\{\boldsymbol{\rho}\} = -([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}^2])^{-1}\{\mathbf{a}_O\},$$

es por lo general única, siempre que $([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}^2])$ admita inversa. En caso contrario, si $([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}^2])$ es singular, en general no existe polo de aceleraciones, salvo casos degenerados.

4.5. Composición de Movimientos

4.5.1. Composición del Movimiento de 2 Sistemas

Comenzaremos por el caso elemental de la composición de movimientos relativos a dos sistemas. Suponemos uno S_0 «fijo» y otro S_1 «móvil». Según las expresiones del movimiento relativo (4.8) y (4.9), las velocidades

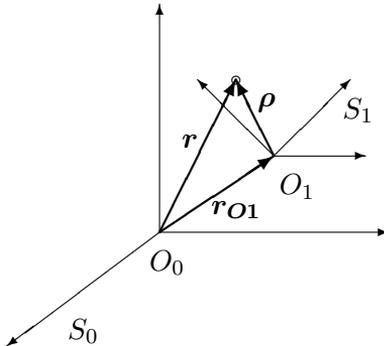


Figura 4.8: Composición de movimientos entre dos sistemas S_0 y S_1 .

y aceleraciones son:

$$\underbrace{\mathbf{v}_{\text{abs}}}_{\mathbf{v}_{S_0}} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}_{S_1}}$$

$$\underbrace{\mathbf{a}_{\text{abs}}}_{\mathbf{a}_{S_0}} = \underbrace{\mathbf{a}_{\text{arr}}}_{\text{depende}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\text{cor}}(\mathbf{v}_{S_1})}_{\text{de } \mathbf{v}_{S_1}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{S_1}};$$

donde se han tomado las magnitudes \mathbf{v}_{S_1} , \mathbf{a}_{S_1} como relativas, y \mathbf{v}_{S_0} , \mathbf{a}_{S_0} como absolutas. Así, para obtener las velocidades respecto a S_0 basta con sumar a la velocidad respecto a S_1 el término de arrastre correspondiente al movimiento del punto como sólido rígido. En cambio, para las aceleraciones es preciso añadir, además del término de arrastre, el término de Coriolis que depende de la velocidad relativa.

4.5.2. Composición del Movimiento de n Sistemas

Supongamos ahora el caso general de composición de n movimientos, en el que el movimiento esté definido respecto de un sistema S_n , el de éste a su vez respecto de otro S_{n-1} , y así sucesivamente hasta llegar a S_0 . Interesa conocer el movimiento absoluto (respecto de S_0), resultante de esta composición de n movimientos.

El campo de velocidades de S_n respecto a S_{n-1} es:

$$\mathbf{v}_{n|n-1} = \mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n,$$

siendo \mathbf{v}_{O_n} la velocidad del origen de S_n , O_n , relativa a S_{n-1} , y $\boldsymbol{\Omega}_n$ la velocidad de rotación de S_n relativa a S_{n-1} .

Para obtener el movimiento respecto a S_{n-2} basta considerar la expresión anterior de $\mathbf{v}_{n|n-1}$ como velocidad relativa respecto a S_{n-1} , y sumarle el término de arrastre correspondiente al movimiento de S_{n-1} respecto a S_{n-2} :

$$\mathbf{v}_{n|n-2} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_{n-1}} + \boldsymbol{\Omega}_{n-1} \wedge \boldsymbol{\rho}_{n-1}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{n-1|n-2}} + \underbrace{\mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n}_{\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{n|n-1}}$$

A continuación se repite la operación, considerando $\mathbf{v}_{n|n-2}$ como velocidad relativa, y así consecutivamente hasta llegar a S_0 .

Se puede interpretar esta composición considerando cada campo de velocidades relativo como el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes (S.V.D.). La velocidad absoluta, composición de los diversos movimientos relativos, es el resultado de la suma de los campos de momentos. Esta suma es igual al campo de momentos del sistema suma, composición de todos los campos de momentos. La composición de S.V.D. se realiza sumando las resultantes ($\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Omega}_i$) y los momentos en un punto O dado ($\mathbf{v}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_O)_{i|i-1}$). Por lo tanto, realizando la suma de los S.V.D. relativos tendremos caracterizado el S.V.D. que corresponde al movimiento absoluto composición de los mismos.

El campo de aceleraciones, como ya se ha dicho, no constituye un campo de momentos y por tanto no vale para éste el método de composición de S.V.D. Es necesario ir componiendo uno a uno los movimientos relativos, calculando para cada uno los términos de aceleración relativa y Coriolis correspondientes.

EJEMPLO 4.3: Composición de *dos traslaciones*.

Solución. Cada traslación se reduce a un par (momento $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$, resultante $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$). La suma los dos S.V.D. se reduce a otro par, suma vectorial de los dos; por lo tanto, el movimiento compuesto es otra traslación, de velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. \square

EJEMPLO 4.4: Composición de *dos rotaciones de ejes concurrentes*.

Solución. Son dos sistemas con resultante no nula ($\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$) y momento nulo en el eje ($\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ para $O \in$ eje). La suma es otra rotación pura, de resultante $\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$, aplicada en el punto de intersección de los ejes de rotación. \square

EJEMPLO 4.5: Composición de *dos rotaciones de ejes paralelos*.

Solución. Se puede interpretar como un caso particular de ejes concurrentes que se cortan en un punto impropio. El resultado es otra rotación, de eje paralelo y coplanario a los anteriores, situado a la distancia adecuada (se calcula ésta de forma que el momento \boldsymbol{v} en un punto sea igual y de signo contrario para cada una de las rotaciones componentes). En el caso degenerado en que ambas rotaciones sean iguales y de distinto signo, el resultado es una traslación pura, con velocidad igual al producto de la velocidad de rotación por la distancia entre los ejes. \square

EJEMPLO 4.6: Composición de *dos rotaciones de ejes no concurrentes ni paralelos*.

Solución. El resultado es un sistema general (traslación más rotación), por lo que la interpretación como S.V.D. no ofrece ventaja especial. \square

EJEMPLO 4.7: Interpretación del movimiento de la tierra.

Solución. Se trata de un caso particular interesante, que se puede interpretar como resultado de la composición de dos movimientos:

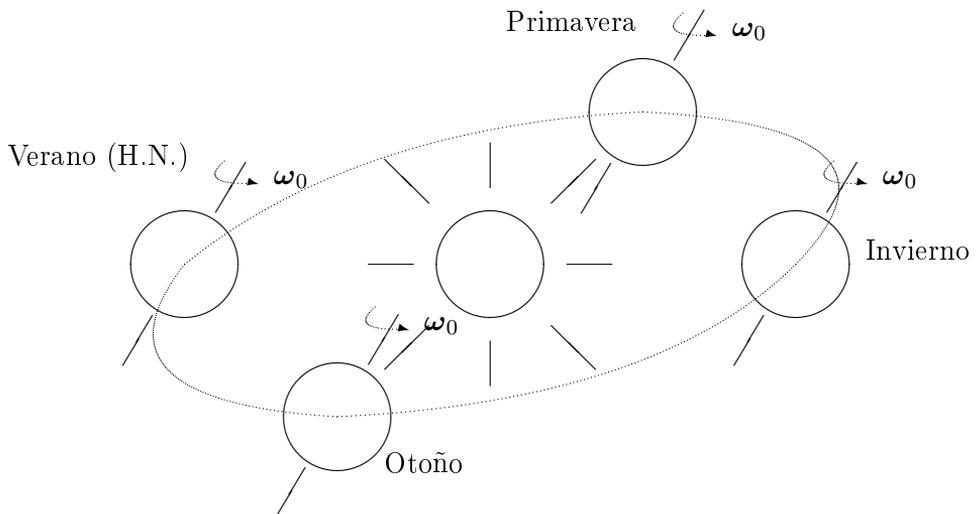


Figura 4.9: *Movimiento de la tierra: composición de traslación y rotación.*

- a. *Traslación* alrededor del Sol, con órbita elíptica (aproximadamente circular)⁹, a la distancia media de 149 millones de kilómetros. El período orbital es de 365,2564 días.
- b. *Rotación* de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, que mantiene su dirección aproximadamente invariante, con una inclinación aproximada de 66° respecto del plano de la eclíptica. La rotación propia de este movimiento es la rotación sidérea, que tiene un período (día sidéreo) algo menor a 1 día solar¹⁰.

En la realidad, el movimiento de la tierra tiene algunas perturbaciones adicionales sobre el sencillo esquema delineado arriba, como por ejemplo, las pequeñas oscilaciones de la dirección del eje de la Tierra, o el fenómeno de precesión de los equinoccios. Este último consiste en una lenta variación de la orientación del eje de rotación de la tierra, precesionando alrededor de la perpendicular al eje de la eclíptica, de periodo 26.000 años (ver el apartado 2.3.2 para una discusión de éste fenómeno desde el punto de vista de la dinámica). \square

4.5.3. Movimiento de Sólidos Tangentes

Consideremos dos sólidos, S_1 (fijo) y S_2 (móvil) que permanecen tangentes durante el movimiento. A lo largo del mismo, el punto de tangencia A define sendas curvas en cada uno de los dos sólidos, que denominamos C_1 y C_2 (figura 4.10). Es posible imaginar intuitivamente estas curvas como dibujadas por un mosquito entintado, que se sitúa constantemente en el punto A , y que va manchando los dos sólidos. Expresando la velocidad de sucesión del punto geométrico A en cada sistema:

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{A|1} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{A|2} \quad (4.21)$$

$\mathbf{v}_{A|1}$ es tangente a C_1 , y $\mathbf{v}_{A|2}$ lo es a C_2 . A su vez, ambas velocidades pertenecen al plano tangente común. Por lo tanto, $\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$ (velocidad del punto del sólido S_2 que coincide con A en un instante dado) ha de ser

⁹No debe confundirse una traslación circular o elíptica con una rotación; en la traslación todos los puntos del sólido tienen igual velocidad en un instante dado, aunque esta velocidad del conjunto varíe con el tiempo, describiendo así trayectorias curvas para cada punto.

¹⁰Para volver a estar enfrentado con el sol, un punto de la superficie de la tierra tiene que girar algo más que 360° , ya que durante ese tiempo la tierra se ha trasladado algo en su órbita alrededor del sol; por tanto, 1 día solar (86 400 s.) equivale a un giro algo mayor a los 360° del día sidéreo (86 164 s.).

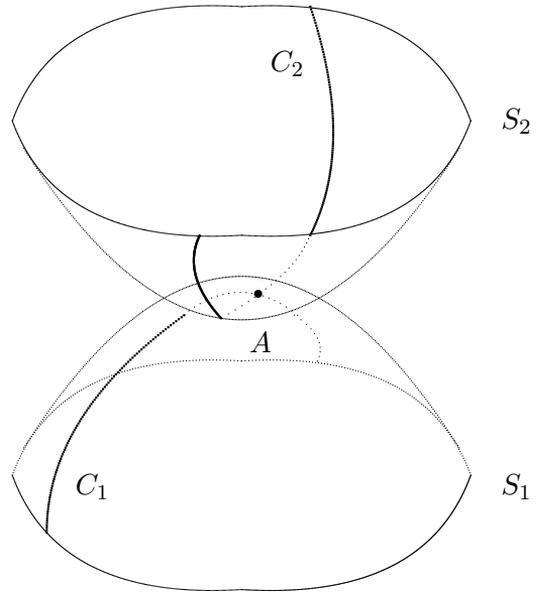


Figura 4.10: *Huella dejada por el punto de tangencia A sobre los sólidos tangentes S_1 y S_2 .*

tangente a ambos sólidos. Esta velocidad se llama *velocidad de deslizamiento*: $\mathbf{v}_d \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$.

El movimiento (relativo) en el punto de contacto se puede reducir entonces a una velocidad de deslizamiento \mathbf{v}_d y una rotación de velocidad instantánea $\boldsymbol{\Omega}$, cuyo eje pasa por el punto de tangencia.

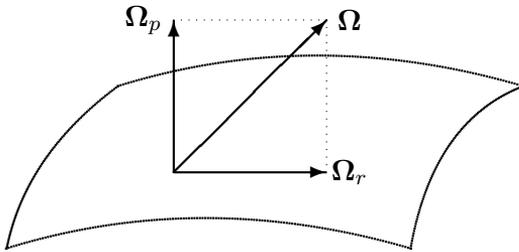


Figura 4.11: *Componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad de rotación, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_p + \boldsymbol{\Omega}_r$.*

En un caso general, $\boldsymbol{\Omega}$ tendrá una componente según el plano tangente, llamada velocidad de rodadura $\boldsymbol{\Omega}_r$, y otra normal al mismo, llamada velocidad de pivotamiento $\boldsymbol{\Omega}_p$. Denominando \mathbf{N} a la normal común en el punto de tangencia,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_p &\stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \\ \boldsymbol{\Omega}_r &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p\end{aligned}$$

Cuando la velocidad relativa en el punto de contacto es nula, ($\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$),

no hay deslizamiento entre ambos sólidos. Se dice entonces que un sólido «rueda sin deslizar» sobre el otro. Este término no implica, por lo general, que la rodadura se efectúe sin pivotamiento, sino tan sólo la ausencia de deslizamiento.

EJEMPLO 4.8: Un cilindro recto de radio r se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base r y semiángulo α , de forma que comparten en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, de forma que realiza una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo τ . La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice del cono. Obtener las expresiones de:

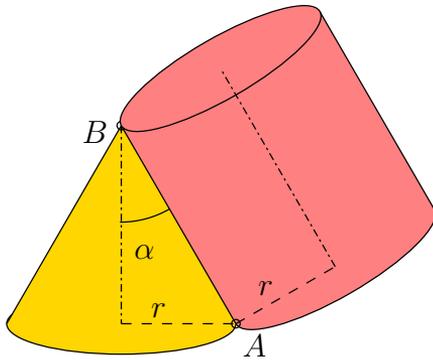


Figura 4.12: *Ejemplo 4.8; sección del cono y cilindro por el plano meridional.*

- velocidad de rotación del cilindro, calculando la componente de pivotamiento;
- axoides del movimiento y aceleración angular del cilindro;
- aceleración del punto A de la base del cilindro en contacto con la base del cono.

(Examen parcial, 3/2/1995)

Solución.

a.— En la figura se muestra una sección por el plano meridional, que contiene a los ejes del cono (BC) y del cilindro (QM), así como a la generatriz común AB . El punto A de contacto entre las bases tiene velocidad nula, debido a la condición de rodadura. Asimismo, el punto O de corte del eje del cilindro con el eje del cono es un punto fijo del movimiento. Por lo tanto, el movimiento instantáneo es una rodadura alrededor del eje OA . A su vez, en los sucesivos instantes del movimiento, el plano meridional de

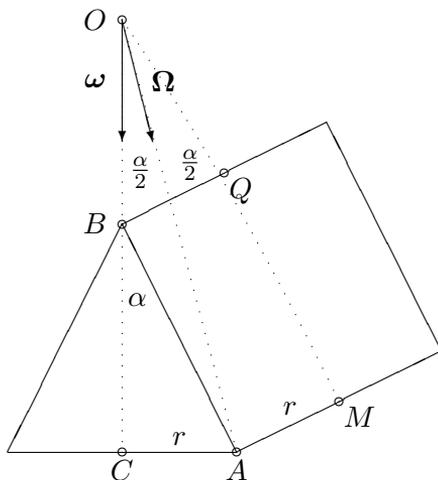


Figura 4.13: *Ejemplo 4.8; eje instantáneo de rotación y descomposición del vector Ω*

la figura va girando alrededor del eje OC . En consecuencia, a lo largo del movimiento el eje instantáneo OA define un cono de eje OC .

En la figura observamos que el ángulo $\widehat{COM} = \alpha$. Asimismo, los triángulos rectángulos AOC y AOM son iguales por compartir hipotenusa y tener un cateto igual (r), por lo que los ángulos $\widehat{AOC} = \widehat{AOM} = \alpha/2$ son iguales.

El punto Q del eje del cilindro desarrolla un movimiento circular, alrededor del eje OC . Su velocidad es

$$v_Q = \frac{2\pi}{\tau} r \cos \alpha;$$

por otra parte, interpretando el movimiento como rotación de velocidad Ω alrededor del eje OA

$$v_Q = \Omega \cdot OQ \sin \frac{\alpha}{2} = \Omega r \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Igualando ambas expresiones, y en función del versor $\mathbf{u} = \mathbf{OA}/|\mathbf{OA}|$, se obtiene

$$\boxed{\Omega = \frac{4\pi}{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}}$$

La componente de pivotamiento es la proyección sobre la normal a AB :

$$\Omega_p = \Omega \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \sin \alpha}$$

b.— En el movimiento, el eje OA gira alrededor del eje OC con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (2\pi/\tau)\mathbf{k}$, siendo $\mathbf{k} = \mathbf{OC}/|\mathbf{OC}|$. Por tanto los axoides son:

Axoides fijo: cono de eje OC , vértice O , semiángulo $\alpha/2$.

Axoides móvil: cono de eje OM , vértice O , semiángulo $\alpha/2$.

La aceleración angular, al ser constante el módulo de $\boldsymbol{\Omega}$, proviene de la rotación $\boldsymbol{\omega}$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}$$

siendo \mathbf{j} el versor normal al plano de la figura.

c.— Para obtener la aceleración de A se aplica la expresión general

$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_O}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OA}}_{=0})$$

obteniéndose

$$\mathbf{a}_A = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \mathbf{v} = \frac{8\pi^2}{\tau^2} r \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{v}$$

siendo \mathbf{v} el versor perpendicular a OA dentro del plano de la figura. \square

4.6. Movimiento Plano

Decimos que un sólido tiene un movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano Π fijo. Para que esto se cumpla, la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ ha de ser perpendicular al plano. En efecto, recordando la expresión del campo de velocidades (4.10),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho};$$

tanto \mathbf{v} como \mathbf{v}_O pertenecen al plano Π , por lo tanto, para que $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ pertenezca también al plano Π , $\boldsymbol{\Omega}$ ha de ser normal al mismo.

Bastará con estudiar el movimiento de una sección plana del sólido paralela al plano dado para caracterizar el movimiento de cualquier punto, aunque el sólido en sí no sea plano. Los puntos fuera de esta sección tendrán idéntica velocidad que sus proyecciones sobre el plano de referencia.

Tomaremos convencionalmente el triedro de referencia de forma que el versor \mathbf{k} defina la normal al plano. Así, la velocidad de rotación se puede representar tan sólo por una magnitud escalar, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$.

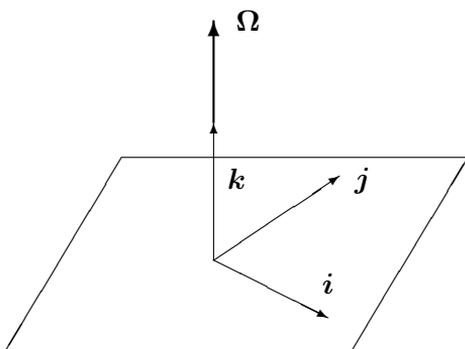


Figura 4.14: Orientación del triédro en el movimiento plano.

4.6.1. Centro Instantáneo de Rotación

En un movimiento plano, el eje del movimiento helicoidal tangente es una recta normal al plano Π . Puesto que se cumple $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$, esta recta es además de velocidad nula, siendo por tanto todo movimiento plano siempre una *rotación pura*.

El centro de la rotación será la intersección del eje del movimiento helicoidal con el plano, y se denomina *Centro Instantáneo de Rotación* (C.I.R.). Para definir sus coordenadas en el plano, particularizamos las del eje del movimiento helicoidal (4.17):

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \underbrace{\alpha \boldsymbol{\Omega}}_{=0},$$

ya que $\alpha = 0$ en el plano Π . Sustituyendo $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ obtenemos

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega}}. \quad (4.22)$$

En el movimiento plano se puede medir la rotación absoluta mediante un parámetro angular φ , ángulo girado por una recta determinada del plano móvil con respecto a una referencia fija. Teniendo en cuenta entonces $\Omega = d\varphi/dt$ y $\mathbf{v}_O = d\mathbf{r}_O/dt$,

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}}. \quad (4.23)$$

4.6.2. Curvas Polares

Análogamente a los axoides definidos para el movimiento general, el centro instantáneo de rotación en el movimiento plano describe unas curvas determinadas a lo largo del movimiento. Este lugar geométrico se llama *polar*

móvil, si se define respecto a la referencia móvil, y *polar fija* si se describe en la referencia fija. Alternativamente, se pueden llamar también *ruleta* y *base*, respectivamente. Las expresiones de estos lugares geométricos son:

- *Polar móvil*

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}} \quad (4.24)$$

- *Polar fija*

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{r}_O + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}} \quad (4.25)$$

La expresión en coordenadas cartesianas de las curvas polares se puede obtener directamente desarrollando en componentes las ecuaciones vectoriales (4.24) y (4.25).

Emplearemos sin embargo otro método para deducir las ecuaciones de las polares en coordenadas cartesianas; para ello nos basaremos en que, para un punto O cualquiera, la velocidad \mathbf{v}_O proviene de una rotación instantánea respecto al C.I.R.:

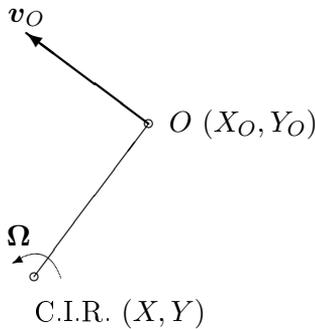


Figura 4.15: El campo de velocidades del movimiento plano como una rotación alrededor del C.I.R.

$$\begin{aligned} v_{O_x} = -(Y_O - Y)\Omega &\Rightarrow Y = Y_O + \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \\ v_{O_y} = (X_O - X)\Omega &\Rightarrow X = X_O - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \end{aligned}$$

En definitiva, resultan las expresiones:

- *Polar fija:*

$$\boxed{X = X_O - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt}, \quad Y = Y_O + \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt}} \quad (4.26)$$

- *Polar móvil:*

restando (X_O, Y_O) y proyectando las expresiones (4.26) sobre los ejes móviles,

$$\begin{aligned} x &= \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{sen} \varphi - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{cos} \varphi, \\ y &= \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{cos} \varphi + \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad (4.27)$$

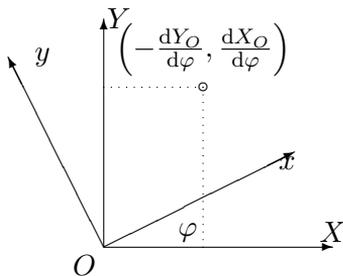


Figura 4.16: Proyección de $(-dY_0/d\varphi, dX_0/d\varphi)$ sobre los ejes móviles

Las polares son curvas intrínsecas del movimiento; no dependen del tiempo, cumpliendo éste únicamente la función del parámetro para la definición de las mismas. Para un movimiento determinado, la polar fija será pues una curva fija, y la polar móvil una curva distinta que acompaña al plano móvil en su movimiento.

Las polares sirven para describir el movimiento plano en términos geométricos. Esta descripción se caracteriza por la *propiedad fundamental* de los polares que establece que, la polar móvil rueda sin deslizar sobre la polar fija, permaneciendo tangente a la misma. Esta propiedad es inmediato demostrarla, como particularización de la propiedad general de los axoides (apartado 4.3.2), considerando que en el movimiento plano la velocidad de deslizamiento es nula.

4.6.3. Aceleraciones

Recordemos la expresión general del campo de aceleraciones (4.20):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho});$$

particularizando para el movimiento plano,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \Omega \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} &= \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) &= -\Omega^2 \boldsymbol{\rho}, \end{aligned}$$

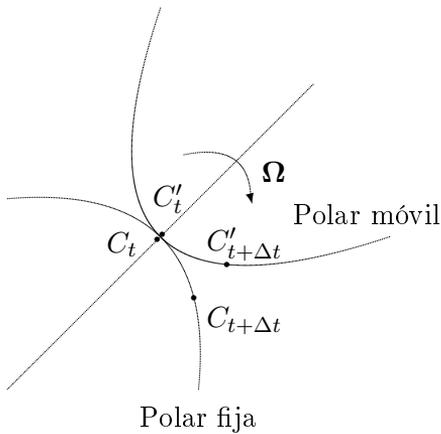


Figura 4.17: Rodadura sin deslizamiento de la polar móvil respecto de la fija.

obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}. \tag{4.28}$$

Los términos en esta ecuación tienen la siguiente interpretación:

- \mathbf{a}_O es la aceleración de O (traslación);
- $\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}$ es una componente perpendicular al radio vector $\boldsymbol{\rho}$ (no necesariamente tangencial a la trayectoria, tan sólo lo será en el caso de que O coincida con el C.I.R.);
- $-\Omega^2 \boldsymbol{\rho}$ es una componente «centrípeta», dirigida hacia O (dirección que no tiene porqué ser normal a la trayectoria, salvo en el caso arriba mencionado).

El polo de aceleraciones se obtiene igualando a cero la expresión (4.28) y despejando $\boldsymbol{\rho}$. Para ello, multiplicamos vectorialmente la igualdad por \mathbf{k} , y eliminamos $(\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho})$ entre la nueva expresión obtenida y (4.28), resultando finalmente:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}_O + \Omega^2 \mathbf{a}_O}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4} \quad (\text{polo de aceleraciones})$$

Otra forma de expresar la aceleración es mediante la consideración del movimiento como una rotación instantánea en torno al C.I.R. Así, la velocidad de un punto cualquiera P es:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d} = \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C),$$

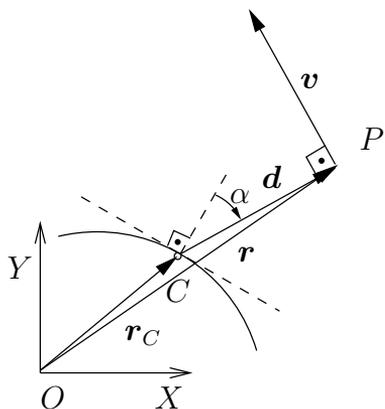


Figura 4.18: *Velocidad de un punto cualquiera en relación al C.I.R. (C).*

donde \mathbf{r} es el vector posición de P , \mathbf{r}_C el del C.I.R. (C), y $\mathbf{d} = \mathbf{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$.

Derivando respecto a t :

$$\mathbf{a} = \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d} + \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C),$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del punto P del sólido, mientras que \mathbf{v}_C es la velocidad de sucesión del punto geométrico C (C.I.R.)¹¹.

Considerando finalmente que $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}$, resulta:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}}_{\text{tangenc.}} - \underbrace{\Omega^2 \mathbf{d}}_{\text{normal}} - \underbrace{\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_C}_{\text{tangenc.} + \text{normal}}. \quad (4.29)$$

Aceleración del centro instantáneo de rotación.— Otra consideración interesante surge al desarrollar el campo de aceleraciones en relación al punto material situado en un instante dado sobre el C.I.R. Para diferenciar este *punto material* del sólido del *punto geométrico* C.I.R., denominaremos C^* al punto material, mientras que el C.I.R. (punto geométrico) es C . Aunque en un instante dado la posición de ambos coincide ($\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{C^*}$), su

¹¹Nótese que C , Centro Instantáneo de Rotación, queda definido por una condición geométrica, por lo que no coincidirá necesariamente con una misma partícula del sólido a lo largo del movimiento. Sería incorrecto por tanto asignar a la derivada de \mathbf{r}_C el valor (nulo) de la velocidad del punto del sólido situado en C . En general, $d\mathbf{r}_C/dt = \mathbf{v}_C$ tiene un valor no nulo, que para distinguir de la velocidad del punto del sólido, denominamos «velocidad de sucesión».

velocidad difiere:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_{C^*} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

El campo de aceleraciones puede calcularse particularizando la expresión general (4.20) para $O \equiv C^*$ y $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{C^*} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}).$$

Otra expresión equivalente para el campo de aceleraciones es la proporcionada por (4.29).

Si se particulariza la expresión (4.29) para el propio centro instantáneo de rotación C^* , teniendo en cuenta $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, resulta

$$\mathbf{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_C.$$

Como consecuencia, debe quedar claro que, aunque la velocidad del punto del sólido situado en el C.I.R. sea nula ($\mathbf{v}_{C^*} = \mathbf{0}$), su aceleración no lo tiene porqué ser ($\mathbf{a}_{C^*} \neq \mathbf{0}$). Esto se debe a que el C.I.R. coincide con distintos puntos del sólido en distintos instantes, y una partícula que está situada sobre el C.I.R. en un momento dado dejará de tener velocidad nula al instante siguiente, por lo que su aceleración no será en general nula.

Circunferencias de aceleraciones

La ecuación (4.29) permite expresar separadamente la aceleración en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria (figura 4.19):

$$a_t = \dot{\Omega}d + \Omega v_C \operatorname{sen} \alpha \quad (4.30)$$

$$a_n = \Omega^2 d - \Omega v_C \operatorname{cos} \alpha \quad (4.31)$$

donde α es el ángulo formado por la normal común a las polares y $\mathbf{CP} = \mathbf{d}$. Por otra parte, se ha tomado como positivo el sentido centrípeto (hacia C) para a_n .

Estas expresiones dan lugar a dos nuevos lugares geométricos.

Circunferencia de las inflexiones.— Es el lugar Geométrico de puntos con aceleración normal nula, Aplicando la ecuación (4.31),

$$\Omega^2 d = \Omega v_C \operatorname{cos} \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{v_C}{\Omega} \operatorname{cos} \alpha} \quad (4.32)$$

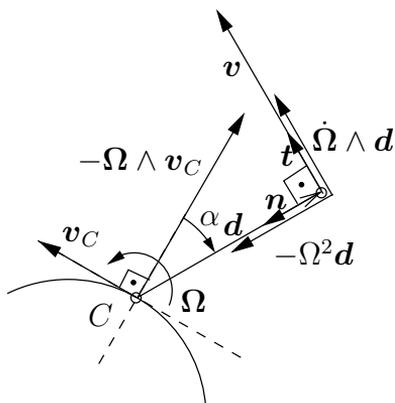


Figura 4.19: Componentes de la aceleración en direcciones normal \mathbf{n} y tangencial \mathbf{t} .

En función de las coordenadas polares (d, α) esta expresión define una circunferencia, de diámetro $D_n = v_C/\Omega$, denominada *Circunferencia de inflexiones*. Esta circunferencia es tangente a las 2 polares en el C.I.R. (C). Es por otra parte el lugar de los puntos del sólido que siguen trayectorias rectas, ya que éstos no tienen aceleración normal.

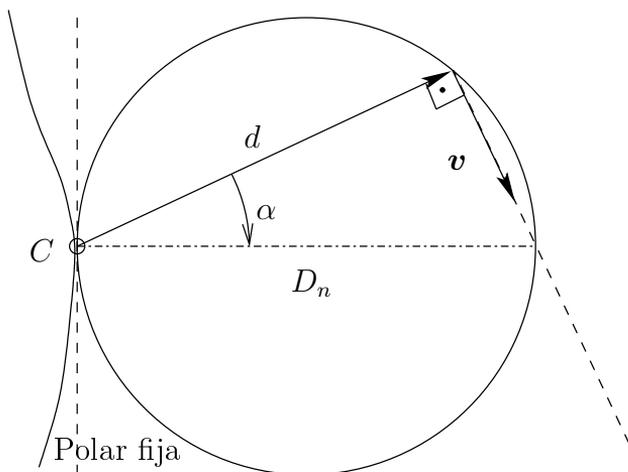


Figura 4.20: *Circunferencia de las inflexiones*

Circunferencia estacionaria.— Es el lugar geométrico de puntos con aceleración tangencial nula. Aplicando la ecuación (4.30),

$$\dot{\Omega}d + \Omega v_C \text{sen } \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = -\frac{\Omega v_C}{\dot{\Omega}} \text{sen } \alpha}$$

Se trata asimismo de una circunferencia en polares, de diámetro $D_t = \Omega v_C/\dot{\Omega}$, denominada *Circunferencia estacionaria*. Es perpendicular a las

polares y a la circunferencia de inflexiones en C . En el caso $\dot{\Omega} = 0$ la circunferencia degenera en una recta perpendicular a las polares.

La intersección de la circunferencia estacionaria y la de las inflexiones es el polo de aceleraciones, en el que las dos componentes de la aceleración se anulan ($a_n = a_t = 0$) (figura 4.23).

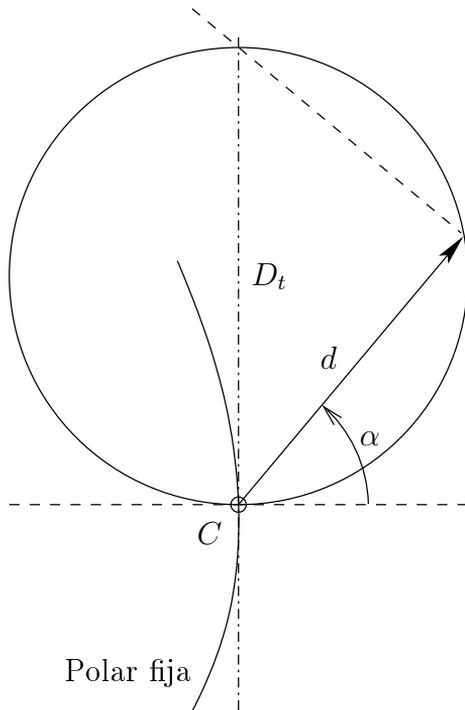


Figura 4.21: *Circunferencia estacionaria*

Circunferencia de los retrocesos.—

«Todo punto Q del plano fijo, por el que pase constantemente una recta dada del plano móvil, pertenece a una circunferencia de diámetro $D_n = v_C/\Omega$, simétrica a la de las inflexiones respecto a la tangente común a las polares, denominada circunferencia de los retrocesos.»

DEMOSTRACIÓN. Sea r una recta del plano móvil que pasa constantemente por un punto Q del plano fijo, y $Q^* \in r$ el punto del plano móvil que instantáneamente está situado sobre Q (figura 4.22).

El movimiento real es el del plano móvil al que pertenece r con respecto al fijo, pero podemos imaginar también el movimiento relativo del plano fijo con respecto al móvil, cuyo campo de velocidades sería igual pero con signo

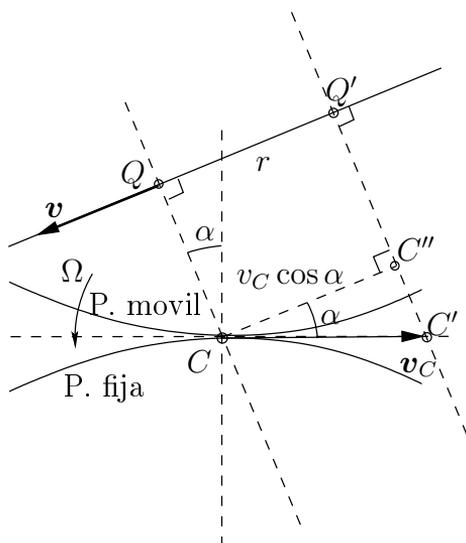


Figura 4.22: Construcción geométrica para la circunferencia de los retrocesos

opuesto. En este movimiento con respecto a r , el punto Q se traslada según r , es decir su velocidad lleva la dirección de r .

Simétricamente, la velocidad del punto del plano móvil Q^* , al ser igual que la anterior pero con signo cambiado, estará también contenida en la recta r , no puede tener componente normal a ella.

Por otra parte, la velocidad de Q^* debe ser perpendicular al segmento desde el centro instantáneo de rotación, CQ . Adicionalmente, el movimiento de sucesión de C será tal que constantemente se mantenga esta propiedad; por tanto, en un incremento infinitesimal dt , suponiendo que C se traslada a C' (figura 4.22) el desplazamiento de C normal a QC , determinado por el punto C'' en la figura 4.22, está asociado a la velocidad $v_C \cos \alpha$. En ese mismo intervalo dt , en el movimiento relativo a r , el punto Q pasaría a Q' , cumpliéndose $\overline{QQ'} = -\Omega \overline{QC} dt$. Puesto que debe cumplirse que $\overline{QQ'} = \overline{CC''}$, se concluye que

$$\overline{QC} \Omega = -v_C \cos \alpha.$$

Por tanto, despejando,

$$\overline{QC} = -\frac{v_C}{\Omega} \cos \alpha. \quad (4.33)$$

esta ecuación define una circunferencia en polares, con origen en C , similar a la de las inflexiones (4.32) salvo por el signo $-$, que indica que será simétrica de aquella (figura 4.23). \square

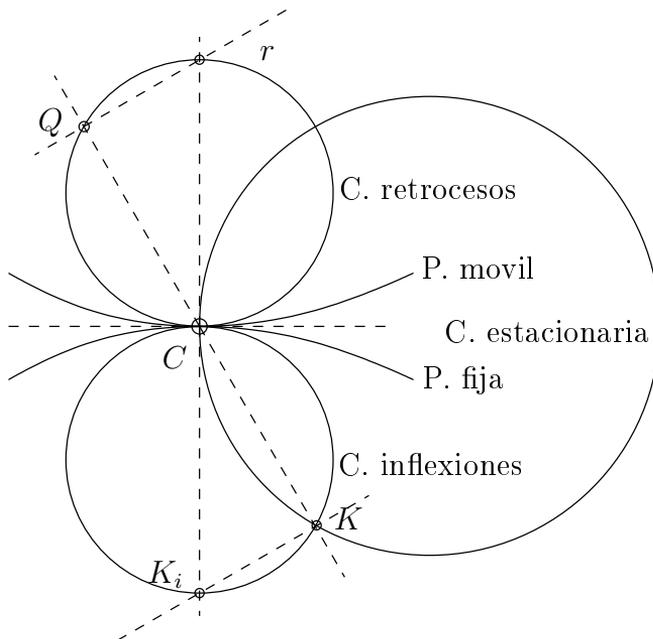


Figura 4.23: Posición relativa de las tres circunferencias en relación con las polares. La intersección de las circunferencias de inflexiones y estacionaria se produce en el polo de aceleraciones K .

EJEMPLO 4.9: La escalera recta de la figura 4.24 se mueve en un plano vertical, apoyándose sobre la arista superior de un muro vertical de altura h perpendicular al plano del movimiento, mientras el extremo A desliza sobre el suelo horizontal con velocidad constante v dirigida hacia el muro. En el instante inicial la distancia entre el muro y el extremo A tiene un valor b . Se pide determinar, en función del ángulo ϕ que forma la escalera con la horizontal:

- Velocidad y aceleración angulares de la escalera;
- Posición del centro instantáneo de rotación y velocidad del punto C de la escalera;
- Ecuaciones de las polares fija y móvil;
- Circunferencias estacionaria y de las inflexiones, así como el polo de aceleraciones.

Solución.

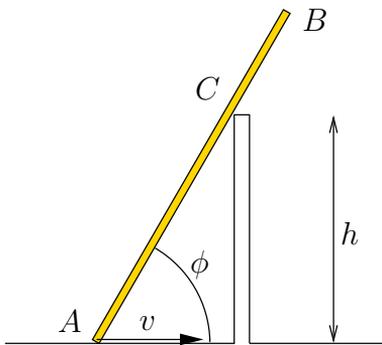


Figura 4.24: *Ejemplo 4.9; escalera que desliza sobre el suelo horizontal y se apoya sobre un muro de altura h .*

a.— La velocidad del punto C de la escalera ha de ser paralela a la propia escalera. Como también conocemos la velocidad del punto A , trazando perpendiculares a ambas se obtiene el C.I.R. que llamaremos I (figura 4.25). Escribiendo la relación geométrica que define el ángulo ϕ y derivando:

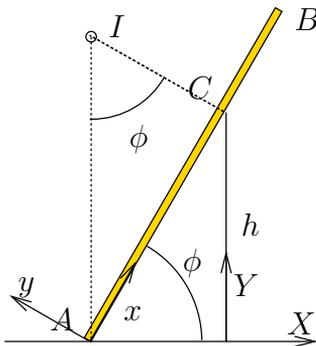


Figura 4.25: *Ejemplo 4.9; El C.I.R. (I) se encuentra sobre las perpendiculares a las velocidades de los puntos A y C de la escalera.*

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{b - vt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) = \frac{vh}{(b - vt)^2}.$$

De aquí despejamos la velocidad angular $\Omega = \dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{vh}{(b - vt)^2 + h^2}.$$

Derivando una segunda vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\phi} = \frac{2hv^2(b - vt)}{[(b - vt)^2 + h^2]^2}.$$

Otras expresiones de velocidad y aceleración que resultan convenientes son en función del propio ángulo ϕ :

$$(-X_A) = \frac{h}{\operatorname{tg} \phi} \Rightarrow v = -\frac{h\dot{\phi}}{\operatorname{sen}^2 \phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{h} \operatorname{sen}^2 \phi \quad (4.34)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{v}{h} 2\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 2\frac{v^2}{h^2} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \quad (4.35)$$

b.— El centro instantáneo de rotación tiene las coordenadas:

$$\begin{aligned} X_I &= -\frac{h}{\operatorname{tg} \phi} = -(b - vt); \\ Y_I &= \frac{h}{\operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{(b - vt)^2 + h^2}{h}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

la velocidad del punto C de la barra se puede obtener empleando la propiedad de equiproyectividad, con el punto A de velocidad conocida. Llamando α al ángulo que forma la velocidad en cada punto con la recta que los une:

$$v_A \cos \alpha_A = v_C \cos \alpha_C \Rightarrow v_C = v \cos \phi.$$

También podría haberse obtenido v_C considerando que es una rotación alrededor del C.I.R.:

$$v_C = \dot{\phi} \overline{IC} = \dot{\phi} Y_I \cos \phi = v \cos \phi.$$

En expresión vectorial,

$$\mathbf{v}_C = v \cos \phi (\cos \phi \mathbf{I} + \operatorname{sen} \phi \mathbf{J}).$$

c.— La polar fija (base) viene definida por la ecuación del C.I.R. (4.36), de forma paramétrica a través de ϕ (o t). Eliminando este parámetro se puede escribir la ecuación implícita:

$$Y = h + \frac{X^2}{h}.$$

Se trata de una parábola de eje vertical cuyo vértice está en C .

La polar móvil (ruleta) se define a través de las coordenadas del C.I.R. en la referencia móvil (Axy):

$$x = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi}; \quad y = \frac{x}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \phi}$$

En la figura 4.26 se dibujan las polares en varias configuraciones distintas del movimiento, pudiéndose observar el movimiento de rodadura sin deslizamiento de la polar móvil sobre la fija.

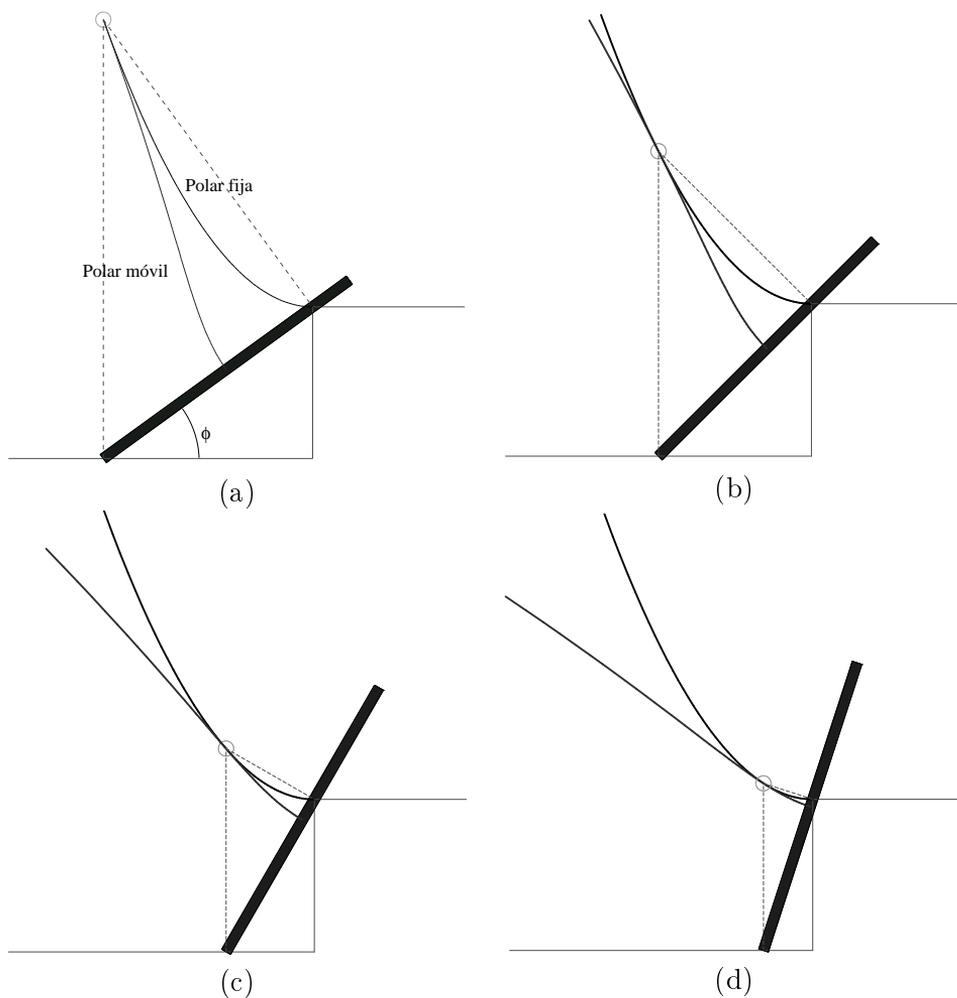


Figura 4.26: Ejemplo 4.9; configuración del sistema, C.I.R. y dibujo de las polares fija y móvil en distintas posiciones (a) $\phi = \pi/5$ (b) $\phi = \pi/4$ (c) $\phi = \pi/3$ (d) $\phi = 2\pi/5$

d.— La circunferencia de inflexiones es el lugar geométrico de los puntos con aceleración normal nula, por tanto pertenecen a ella los puntos que recorren rectas del plano fijo, como es el caso de A . Por tanto será la circunferencia tangente a las polares en I y que pase además por el punto A .

Se puede obtener el diámetro de esta circunferencia mediante la expresión $D_n = v_I/\dot{\phi}$. Para obtener la velocidad de sucesión del C.I.R. (v_I) derivamos las coordenadas (4.36):

$$v_I = \sqrt{\dot{X}_I^2 + \dot{Y}_I^2} = \dot{\phi} \frac{h}{\text{sen}^3 \phi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi} \quad \Rightarrow \quad D_n = \frac{h}{\text{sen}^3 \phi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi}.$$

La circunferencia estacionaria es el lugar de los puntos con aceleración tangencial nula, luego A también pertenece a la misma por ser su velocidad constante. La circunferencia queda definida como tangente a la normal común a las polares en I que pasa por A . Por tanto A es el polo de aceleraciones, punto de aceleración nula al ser su velocidad rectilínea y constante.

Podemos también en este caso calcular el diámetro de la circunferencia estacionaria, mediante la expresión

$$D_t = v_I \frac{\dot{\phi}}{\ddot{\phi}} = \frac{h \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi}}{2 \text{sen}^2 \phi \cos \phi}.$$

En la figura 4.27 se representan ambas circunferencias de aceleraciones junto con las polares, para una configuración dada del sistema. \square

4.7. Problemas propuestos.

Problema 4.1. Un triángulo rectángulo isósceles desliza con velocidad constante v sobre un plano horizontal. Un disco de radio r se apoya sobre ese triángulo y sobre un plano vertical, de forma que no existe deslizamiento en el contacto disco-triángulo. Se pide:

- C.I.R. del disco, velocidad angular del disco y velocidad del centro del disco.
- Velocidad y aceleración del punto más alto del disco.
- Base y ruleta del movimiento absoluto del disco.

Problema 4.2. Un sólido rígido se mueve de forma que dos de sus puntos A y B recorren una circunferencia de radio R con velocidad constante v , siendo la distancia entre ellos $\overline{AB} = R$. Además, el sistema rígido gira en torno de la recta AB con una velocidad angular $\Omega = v/R$. Se pide:

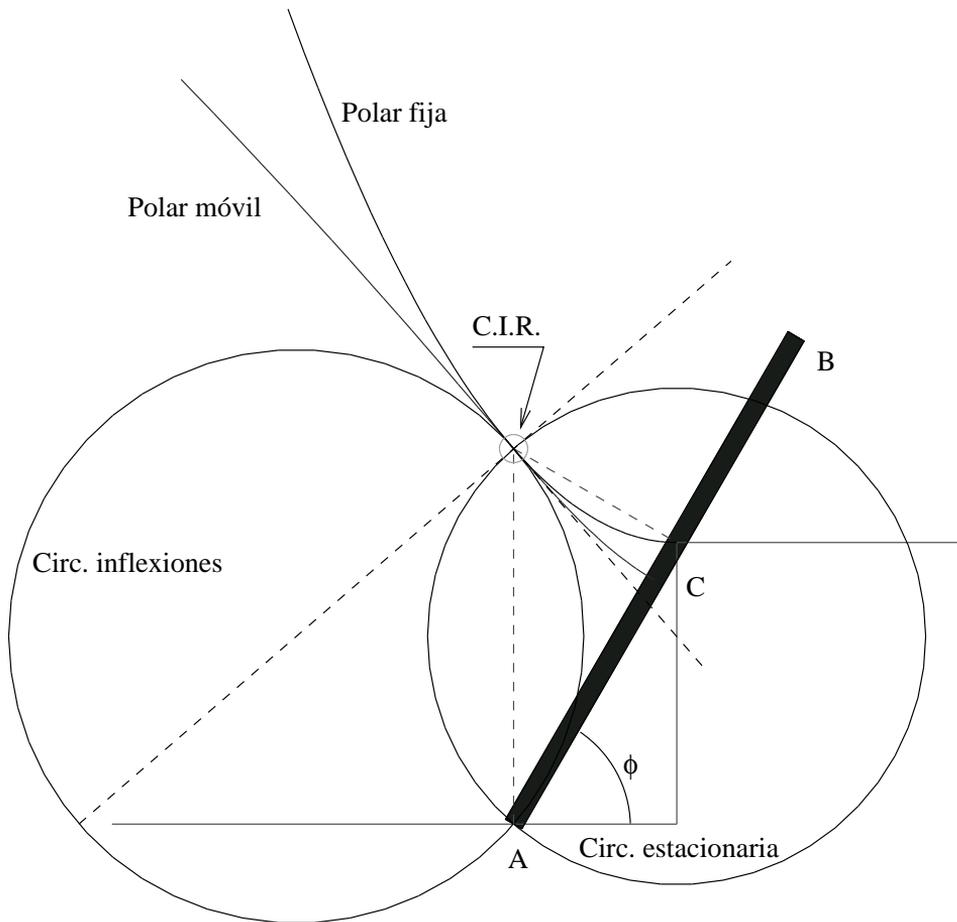


Figura 4.27: Ejemplo 4.9: Circunferencias de aceleraciones para la posición $\phi = \pi/3$.

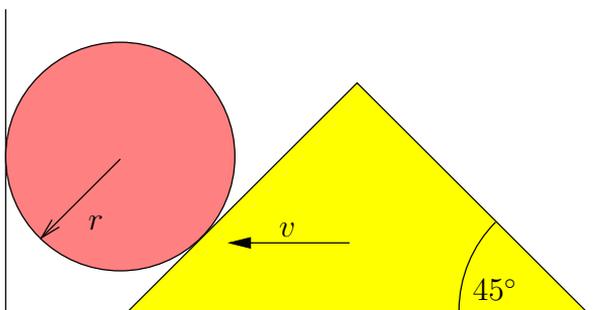


Figura 4.28: Problema 4.1

- Determinar para el campo de velocidades el eje del movimiento helicoidal tangente y la velocidad mínima;
 - Vector aceleración angular;
 - Intersección de los axoides con el plano dado.
- (Examen final, 10/1/1994)

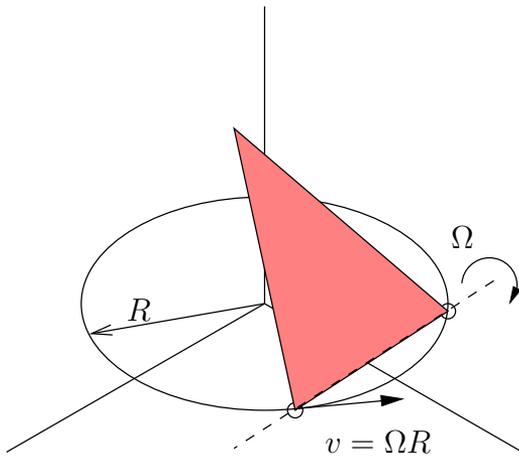


Figura 4.29: Problema 4.2

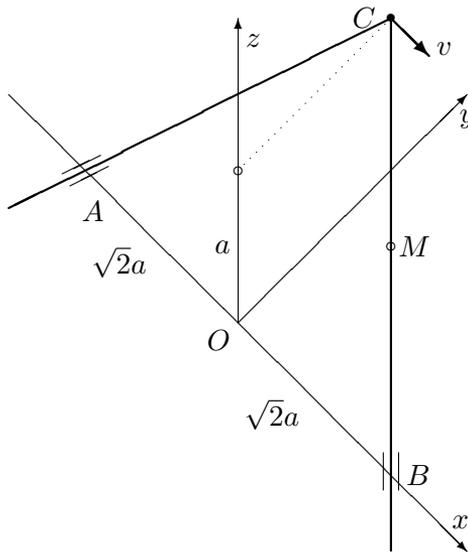
Problema 4.3. Una escuadra formada por dos varillas perpendiculares soldadas en un extremo C se mueve de forma que éstas deslizan por dos puntos fijos $A(-\sqrt{2}a, 0, 0)$ y $B(\sqrt{2}a, 0, 0)$. El vértice C está obligado a moverse en un plano paralelo a Oxy , a una altura a , describiendo una circunferencia con centro en el eje Oz , y a velocidad constante v . En el instante inicial C está en el plano Oyz y su velocidad es positiva según Ox . Se pide, en ese instante:

- Velocidad angular de la escuadra.
- Velocidad del punto de la varilla sobre B .
- Velocidad del punto M intermedio entre C y B .

(Examen final, 16/9/1994)

Problema 4.4. Una placa ABC tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles, con lados $AB = BC = a\sqrt{2}$. Se mueve en relación a un triedro $Oxyz$ de forma que A desliza sobre el eje Oz , B se mueve sobre una recta horizontal paralela a Ox que pasa por $(0, a, 0)$, según la ley $x_B = a \sin \omega t$, y C se mantiene dentro del plano Oxy . En el instante inicial ($t = 0$) A está en el lado positivo de Oz .

- Obtener la velocidad de A para un instante t genérico.

Figura 4.30: *Problema 4.3*

- Sea θ el ángulo que forma AB con el eje Oz y ψ el que forma la proyección de AB sobre Oxy con Ox . Obtener las expresiones de ambos en función del tiempo para un instante genérico, $\theta(t)$ y $\psi(t)$.
- Describir el movimiento instantáneo del sólido para un instante genérico, obteniendo la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}(t)$ y la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento.

(Examen final, 16/1/1995)

Problema 4.5. El dispositivo de la figura consta de un eje vertical AC de longitud h que gira con velocidad cte $\dot{\psi}$. Dicho eje mueve un árbol horizontal CD , de longitud l , en cuyo extremo D se halla un disco con una ranura que gira con velocidad $\dot{\phi}$ cte respecto al eje CD . Por la ranura se mueve una partícula P con velocidad v en dirección vertical hacia abajo en el instante considerado y aceleración a vertical hacia arriba en ese mismo instante. Se pide:

- Aceleración angular del disco.
- Considerando la referencia $\{D, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ solidaria al disco, como sistema de referencia móvil, aceleraciones absoluta, de arrastre, relativa y de Coriolis de P .

(Examen final, 20/6/1995)

Problema 4.6. Una placa cuadrada $ABCD$ de lado $a\sqrt{2}$ se mueve de forma que dos vértices A y B describen sendas sendas circunferencias paralelas con el mismo eje, de radios $2a$ y a respectivamente, situada esta última a

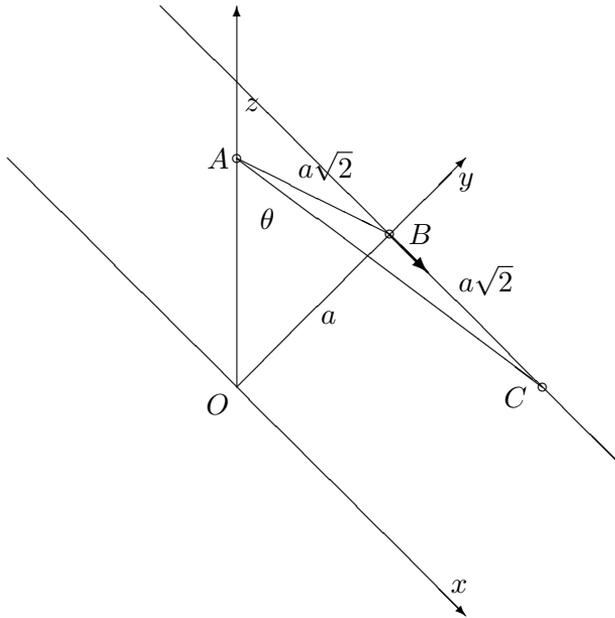


Figura 4.31: *Problema 4.4; configuración inicial de la placa*

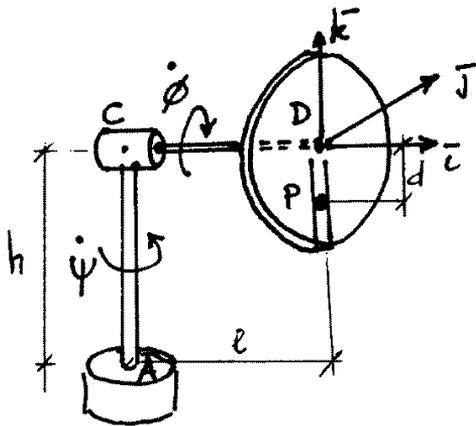


Figura 4.32: *Problema 4.5*

una distancia a de la primera. La velocidad con que recorre el punto B la circunferencia superior es constante, y vale $v_B = a\omega$. Al tiempo, la placa gira alrededor del eje AB con velocidad angular ω . Se pide:

- velocidad y aceleración angular de la placa;
- definir el movimiento helicoidal tangente (eje y velocidad mínima);
- en una posición en que B y C se hallen en el plano Oyz , obtener la aceleración del punto C .
- axoides del movimiento.

(Examen final, 19/1/1996)

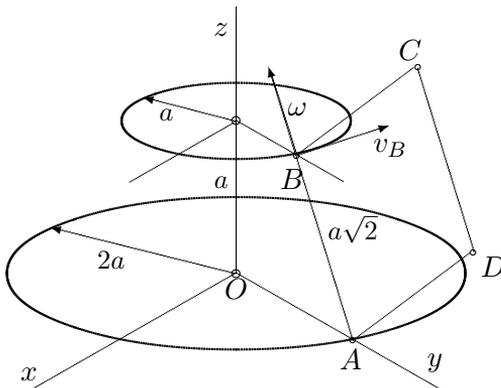


Figura 4.33: Problema 4.6

Problema 4.7. En el sistema mecánico de la figura (correspondiente a un rodamiento de bolas) el cilindro de radio interior $3R$ y el cono de semiángulo 30° son coaxiales y giran respecto de su eje independientemente. Entre los dos está encajada una esfera de radio R que rueda sin deslizar sobre el plano fijo inferior, apoyándose asimismo en el cono y en el cilindro sin deslizamiento. El movimiento de éstos es tal que los puntos de contacto A y B tienen constantemente velocidades $-V$ y $+V$ respectivamente (positivas en sentido hacia fuera del plano del papel). Se pide, justificando adecuadamente:

- describir el movimiento, discutiendo si el eje del movimiento helicoidal tangente corta al eje del cono en un punto fijo y definiendo los axoides;
- velocidades angulares de rodadura y pivotamiento de la esfera sobre el plano inferior, así como la velocidad del centro (C) de ésta;
- aceleración angular de la esfera;
- aceleración del punto de la esfera en contacto con el plano;

(Examen parcial, 9/2/1996)

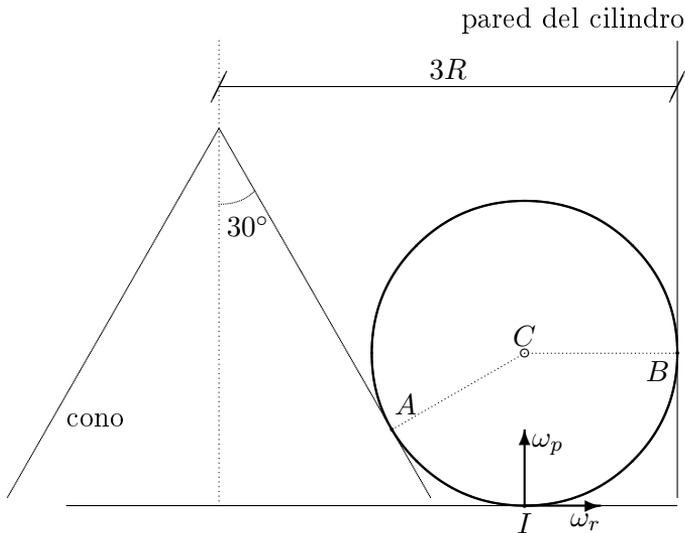


Figura 4.34:
Problema 4.7

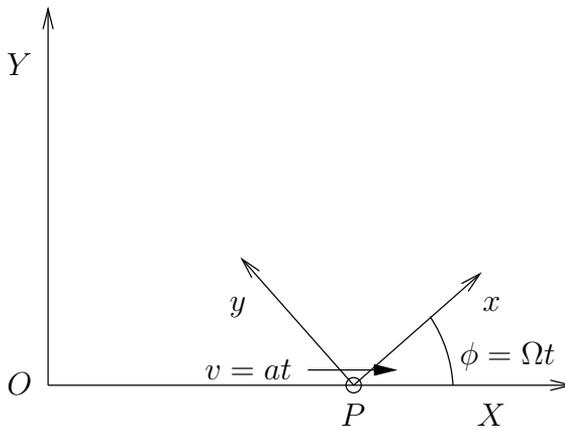
Problema 4.8. Un plano gira alrededor de un eje perpendicular por uno de sus puntos P con velocidad constante Ω , mientras que P se traslada con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, de aceleración a . Se pide:

- Posición del centro instantáneo de rotación (C.I.R.) en un instante genérico
- Lugar geométrico que describe el C.I.R., respecto a las referencias fija (OXY) y móvil (Pxy) (polares).
- Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración normal nula.
- Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración tangencial nula.

(Examen final, 1988)

Problema 4.9. Un segmento de longitud l se mueve de forma que sus extremos A y B recorren dos rectas fijas r y r' que forman entre sí un ángulo α . La velocidad del extremo A es constante y de valor v . Se pide:

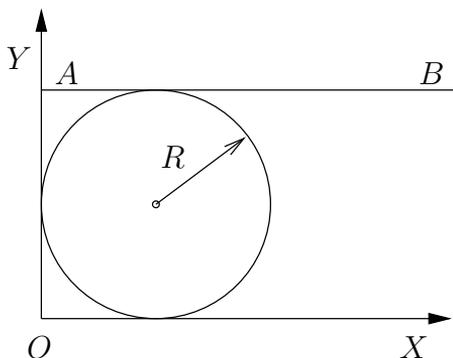
- Obtener el centro instantáneo de rotación (C.I.R.) en una posición genérica.
- Lugar geométrico que describe el C.I.R., respecto a las referencias fija (rectas) y móvil (segmento) (polares).
- Velocidad de B y aceleración del punto del plano móvil situado sobre el C.I.R. en un instante genérico.

Figura 4.35: *Problema 4.8*

- d. Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración normal nula.

Problema 4.10. El sistema de la figura está formado por una barra AB que se mueve permaneciendo tangente a un disco C fijo. La barra AB está inicialmente horizontal como se representa. El punto A comienza a ascender ligado al eje de ordenadas Y con aceleración a positiva y constante. Se pide calcular en un instante genérico:

- Velocidad y aceleración del punto de contacto de la barra con el disco en función del ángulo θ que la barra forma con la vertical.
- Posición del C.I.R. y polares del movimiento de la barra.
- Particularizar los resultados anteriores para $\theta = \pi/3$.

Figura 4.36: *Problema 4.10*

Problema 4.11. Un cono de vértice A , base circular BC de radio $\overline{DB} = 2a/\sqrt{3}$ y altura $\overline{DA} = a$ se mueve en el espacio de forma que la circunferencia del borde de la base del cono rueda sin deslizar sobre una circunferencia fija

de radio $\overline{OB} = 2a$ con centro O . Este punto O es a su vez el centro de una esfera de radio a en la que se apoya y desliza la base del cono. El movimiento del cono es tal que su vértice A describe otra circunferencia de centro O' y radio $(3/2)a$ (en un plano paralelo a la de centro O), con movimiento uniforme de periodo τ , de forma que que el eje DA del cono se mantiene en todo momento dentro del plano vertical por OB . Del movimiento así definido se pide:

- velocidad del punto C del cono (diametralmente opuesto a B) y aceleración del vértice A del mismo;
- velocidad y aceleración angular del cono;
- Axoides del movimiento.

(Examen final, 28/6/96)

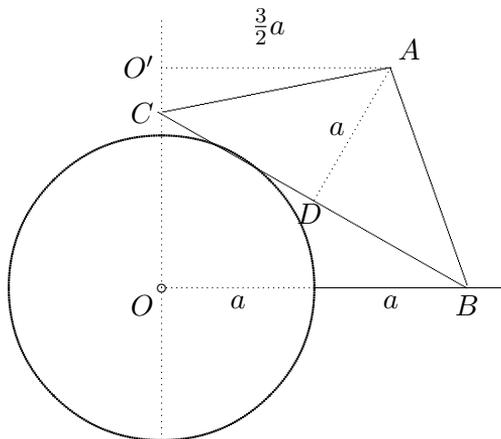


Figura 4.37: Problema 4.11

Problema 4.12. Se da un conjunto de cuatro varillas AB, BC, CD, DE articuladas entre sí, cuyas longitudes son: $\overline{AB} = \overline{DE} = b$; $\overline{BC} = \overline{CD} = 2b$. Se mueve cumpliendo las siguientes condiciones: 1) el extremo A permanece fijo; 2) el extremo E , así como los puntos medios de BC y CD , recorren una recta fija r , que pasa por A ; 3) la varilla AB tiene en todo instante una velocidad angular con dos componentes constantes, según r , de valor Ω_1 , y según la normal al plano determinado por AB y r , de valor Ω_2 . Se pide:

- Determinar los axoides fijo y móvil del movimiento de AB .
- Definir completamente los movimientos relativos, respecto de AB , de las varillas CD y DE .
- Calcular la velocidad y la aceleración absolutas del punto P de corte de las rectas soporte de AB y DE .

(Examen final, 16/9/96)

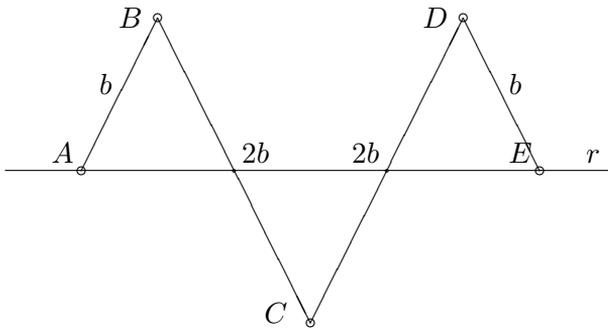


Figura 4.38: Problema 4.12

Problema 4.13. En el mecanismo plano de la figura, la barra OA gira alrededor del punto fijo O con velocidad angular $\dot{\phi} = \text{cte}$. Un disco de radio R se mueve de forma que desliza sobre el eje X a la vez que rueda sin deslizar sobre la barra OA . Se pide:

- Velocidad y aceleración angular del disco.
- Velocidad y aceleración del centro C del disco.
- Ecuación de la polar fija referida a OXY .
- Velocidad y aceleración del punto B cuando la barra forma 60° con la horizontal.

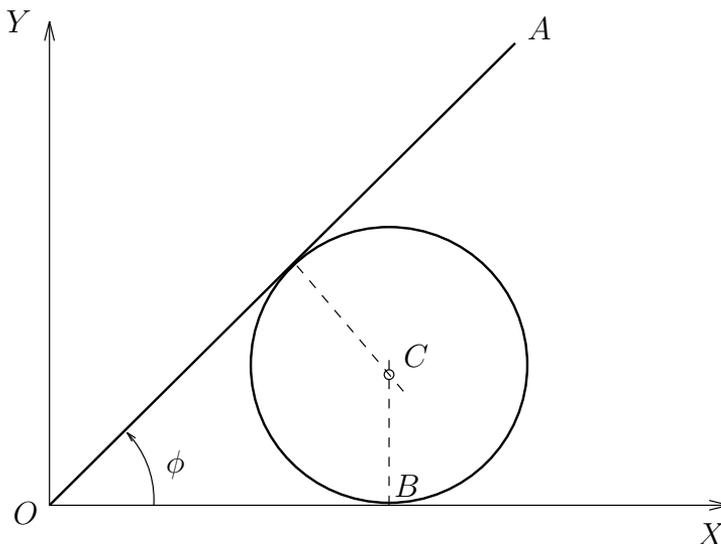


Figura 4.39:
Problema 4.12

Problema 4.14. Se considera un sistema compuesto por una mesa giratoria y un disco que se apoya en ella, como muestra la figura adjunta. La mesa gira con velocidad ω_1 constante alrededor de un eje vertical. Además, existe

un árbol vertical OO' que gira con velocidad ω_2 constante. El disco, de masa m y radio R , está ligado al árbol OO' por un eje OO'' de longitud L y masa despreciable que pivota sin rozamiento en el punto O . La altura sobre la mesa del punto O es tal que el eje OO'' forma un ángulo α con la vertical. El disco rueda sin deslizar sobre la mesa, y se admite que no llega nunca a levantarse sobre ella.

Adicionalmente, se define el triedro S formado por los vectores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, siendo \mathbf{i} el versor según un diámetro horizontal del disco, \mathbf{j} según un diámetro de máxima pendiente del disco, y \mathbf{k} el eje normal al disco. Se pide:

- Expresar la velocidad del centro O'' del disco.
- Expresar la velocidad de rotación del disco, tanto relativa a la mesa giratoria como absoluta, mediante sus componentes en el triedro S .
- Describir el lugar geométrico que define el eje de rotación, tanto relativo al disco móvil como en una referencia absoluta (axoides).
- Expresar la aceleración angular absoluta del disco.
- Expresar el momento en el punto O de las fuerzas aplicadas al disco, considerando que la reacción de la mesa móvil sobre el disco es normal a la mesa.

(Examen final, 30/1/1999)

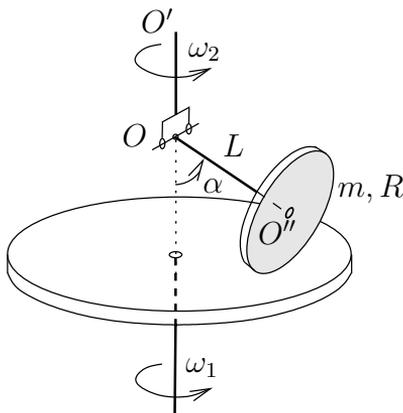
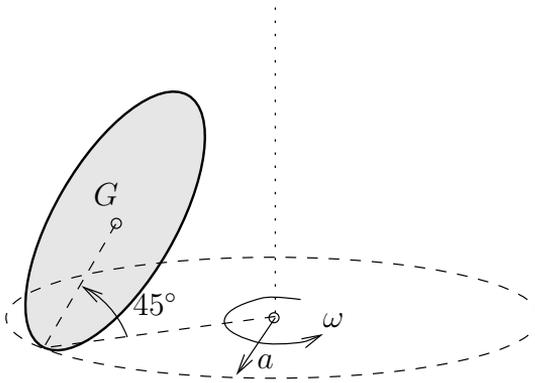


Figura 4.40: *Problema 4.14*

Problema 4.15. Un disco circular homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que mantiene en todo momento una inclinación constante de 45° , y el punto de contacto con el plano describe sobre él una circunferencia de radio $a = R(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}$ con velocidad uniforme de valor $a\omega$. Suponiendo el movimiento dado del disco sin atender a sus causas:

Figura 4.41: *Problema 4.15*

- describir el campo de velocidades del disco, especificando el eje del movimiento helicoidal tangente, la velocidad de rotación y la velocidad mínima;
- calcular la aceleración angular del disco y la aceleración de su centro;
- calcular la velocidad y aceleración del punto del disco que en un instante dado se encuentra en el extremo superior de su perímetro.