

Capítulo 5

Fuerzas Centrales y Órbitas Gravitatorias

En este capítulo empezaremos a tratar sistemas dinámicos de varias partículas, comenzando por los más sencillos: aquellos que están constituidos por dos cuerpos o a lo sumo tres, sometidos a fuerzas internas centrales. Como aplicación importante surge el movimiento en órbitas gravitatorias, aspecto que históricamente ha jugado un papel central en el desarrollo de la mecánica, y continúa siendo relevante en la actualidad con el progreso de la tecnología espacial.

Admitiremos las siguientes hipótesis simplificadoras a lo largo de este capítulo.

1. Se puede despreciar el efecto del resto de los cuerpos del universo por su lejanía. Así, nuestro estudio se limitará a dos cuerpos (sistema binario) o tres cuerpos (sistema ternario).
2. Es válido idealizar los cuerpos como partículas puntuales. Es posible demostrar que, para el caso de esferas homogéneas en campos gravitatorios, el efecto es equivalente al de toda la masa concentrada en el centro, independientemente del tamaño. Sin embargo, en un caso real en que los cuerpos no sean exactamente esféricos se cometerá un pequeño error.

5.1. Reducción del Sistema Binario

Sea un sistema binario aislado, formado por dos cuerpos de masas m_0 y m_1 , sometidos únicamente a las fuerzas internas ejercidas entre ellos,

descritos en una referencia inercial (I) por sus vectores de posición \mathbf{r}_0 y \mathbf{r}_1 respectivamente.

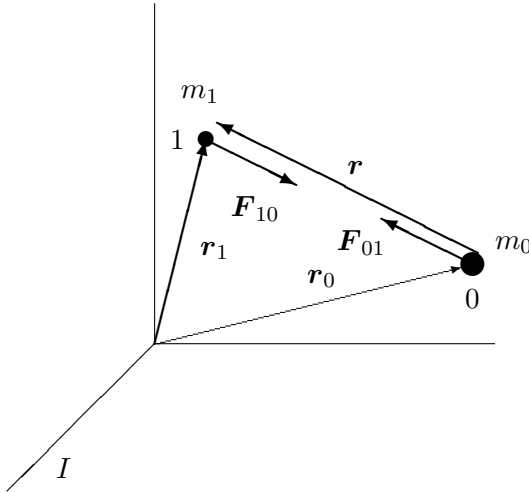


Figura 5.1: Sistema binario aislado formado por dos cuerpos de masas m_0 y m_1 .

Las ecuaciones del movimiento son:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{10}; \quad m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10} \quad (5.1)$$

donde \mathbf{F}_{10} es la fuerza ejercida sobre m_1 por m_0 , y viceversa. Sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Definimos el centro de masa por:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_0 \mathbf{r}_0}{m_1 + m_0} \quad (5.3)$$

cumpléndose entonces, en virtud de (5.2), $\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{0}$: el centro de masa se mueve con velocidad rectilínea y uniforme. Buscaremos entonces la ecuación de la dinámica para el movimiento relativo; definiendo

$$\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \quad (5.4)$$

mediante las ecuaciones (5.1) se llega a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{10} - \frac{1}{m_0} \mathbf{F}_{01} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \mathbf{F}_{10}. \quad (5.5)$$

El cociente $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$ se denomina *masa reducida*, y permite interpretar el movimiento relativo de m_1 respecto de m_0 expresado por (5.5), para una fuerza dada, como si su masa tuviese este valor μ .

Conviene observar que la ecuación (5.5) expresa la dinámica en un sistema de referencia no inercial (R), con origen en m_0 y ejes paralelos al inercial I . Por este motivo, sería incorrecto establecer la ecuación fundamental de la dinámica directamente empleando la aceleración relativa a este sistema. Sin embargo, el resultado obtenido permite reducir el movimiento relativo en el sistema binario, pudiendo estudiarse como si fuera inercial, es decir, como si la masa m_0 fuese fija, sin más que cambiar m_1 por la masa reducida μ .

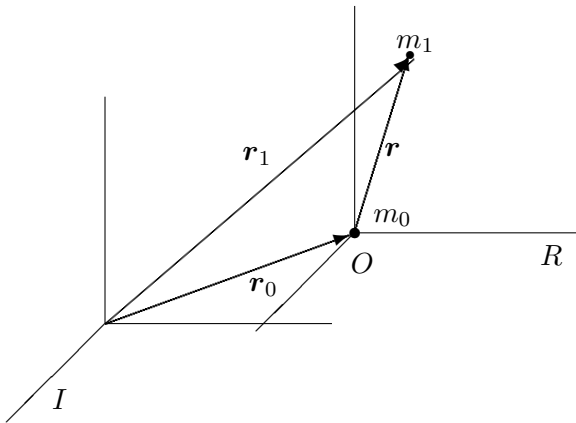


Figura 5.2: Sistema binario; referencias inercial I y relativa a m_0 (no inercial), R .

Otro resultado interesante se puede obtener al expresar la energía cinética $T = \frac{1}{2}m_0\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_0^2$ eliminando \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_0 en función de \mathbf{r}_G y \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_G - \frac{\mu}{m_0}\mathbf{r}$$

resultando finalmente

$$T = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)\dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Esta expresión descompone la energía cinética en dos términos, uno correspondiente al movimiento del centro de masas, caracterizado por la masa total ($m_0 + m_1$), y otro del movimiento relativo caracterizado por la masa reducida μ ¹.

¹Esta expresión resulta ser la aplicación a este caso del Teorema de König, que se verá más adelante (capítulo 6, ecuación (6.25))

5.1.1. Sistema Binario Gravitatorio

Consideramos ahora el caso particular de un sistema formado por dos cuerpos de masas M y m , que se atraen mediante fuerzas de tipo gravitatorio (figura 5.3). La *ley de la gravitación universal* de Newton (apartado 1.6, ecuación (1.3)) establece esta atracción mutua como proporcional a las masas y al inverso del cuadrado de la distancia. En nuestro caso, las fuerzas ejercidas entre M y m son:

$$\mathbf{F}_{mM} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}; \quad \mathbf{F}_{Mm} = -\mathbf{F}_{mM} = G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.6)$$

Reducción al movimiento relativo a uno de los cuerpos.— Sustituyendo en la ecuación del sistema reducido (5.5) el valor de esta fuerza gravitatoria,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{M+m}{mM} \left(-G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \right) = -G \frac{M+m}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Se observa pues que es posible estudiar el movimiento relativo de m respecto a M a todos los efectos, como si m estuviera atraída gravitatoriamente por una *masa eficaz*, fija, de valor $(M+m)$, situada en el lugar de M .

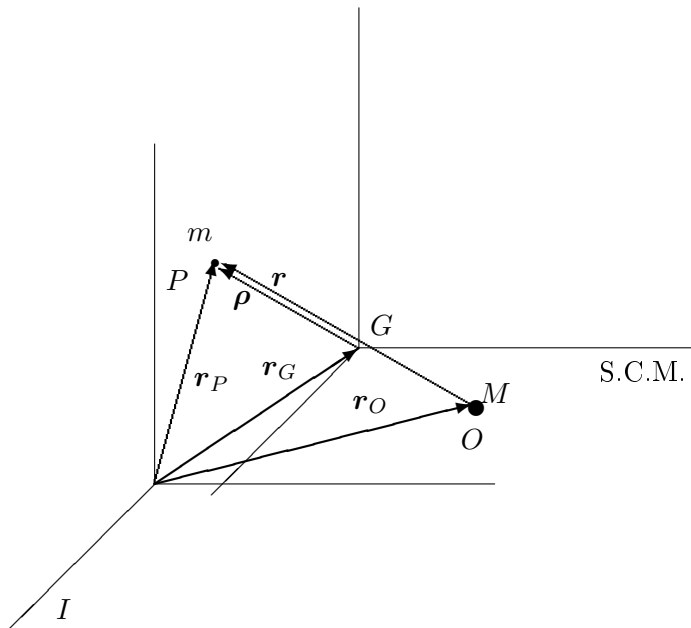


Figura 5.3: Sistema binario gravitatorio; referencias relativas a la masa M y al centro de masa G (S.C.M.).

Reducción al centro de masas.— Para el sistema gravitatorio anterior, el centro de masas (G) queda definido por (5.3). Es posible estudiar el movimiento relativo a G , tomando un sistema de referencia con origen en G y direcciones paralelas al inercial, que llamaremos «Sistema del Centro de Masa» (S.C.M.). A diferencia del caso anterior (reducción al movimiento relativo respecto de una masa), si el sistema binario está aislado, este sistema sí será inercial, ya que se deduce inmediatamente de (5.2) y (5.3) que $\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{0}$.

Medida en el S.C.M., la posición de un punto genérico P es:

$$\boldsymbol{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_G; \quad (5.8)$$

empleando (5.3) se obtiene

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_P - \frac{M\mathbf{r}_O + m\mathbf{r}_P}{M + m} = \frac{M\mathbf{r}}{M + m}, \quad (5.9)$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O$. Empleamos ahora la ecuación (5.7), en la cual eliminamos \mathbf{r} en favor de $\boldsymbol{\rho}$ mediante (5.9):

$$\frac{M + m}{M} \ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{G(M + m)}{\left(\frac{M+m}{M}\rho\right)^3} \frac{M + m}{M} \boldsymbol{\rho},$$

resultando finalmente:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -G \frac{M^3/(M + m)^2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}}. \quad (5.10)$$

Por tanto el movimiento equivale también en esta referencia a una atracción gravitatoria hacia una masa ficticia situada en G , como si estuviese fija, de valor: $M^* = M^3/(M + m)^2$. A este movimiento relativo habrá que sumar el propio de G .

Esta última reducción del movimiento² presenta la ventaja de que G a menudo tiene un movimiento conocido, al menos de manera aproximada. Por ejemplo, en un sistema aislado, G se mueve con velocidad rectilínea y uniforme. Sin embargo, la interpretación es menos intuitiva que si el movimiento se refiere a una de las dos masas, ya que G no coincide con ningún punto material fijo; su posición se puede calcular, pero no corresponde a ningún punto «físico» observable como tal.

²Otra manera de obtener la reducción (5.10) es, considerando que para un sistema aislado el S.C.M. es inercial, por lo que es válida la ecuación $m\ddot{\mathbf{p}} = -GmM\mathbf{r}/r^3$; empleando (5.9) se llega a $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -[GM^3/(M + m)^2] \boldsymbol{\rho}/\rho^3$.

5.2. Movimiento bajo Fuerzas centrales

Las fuerzas gravitatorias son un caso particular de fuerzas centrales. Veamos, en primer lugar, algunas propiedades generales del movimiento para este tipo de fuerzas. Todo lo que sigue es aplicable para una fuerza central desde un punto fijo, o bien aplicando alguna de las reducciones anteriores, desde otra masa o desde el centro de masas.

5.2.1. Propiedades del Movimiento

Consideraremos fuerzas centrales aquellas que están dirigidas constantemente hacia un centro O , y toman la forma general

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (5.11)$$

donde $F(r)$ es una función escalar de $r = |\mathbf{r}|$ que supondremos al menos continua.

Es inmediato comprobar que las fuerzas centrales siempre derivan de un potencial, definido por

$$V(r) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^r F(r) dr, \quad (5.12)$$

integral que existe siempre al ser $F(r)$ continua. Si además el potencial es un campo constante (es decir, $\partial V/\partial t = 0$) las fuerzas centrales serán además conservativas.

Otra característica importante de las fuerzas centrales es que el momento de \mathbf{F} respecto del centro O es nulo, por lo que se conserva el momento cinético:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{cte}.$$

Recordemos (ver apartado 2.1.2) las dos propiedades que se deducen de esta conservación:

1. \mathbf{r} es perpendicular al vector constante \mathbf{H}_O , por lo que la *trayectoria está contenida en un plano*.
2. El módulo $|\mathbf{H}_O| = H_O$, también constante, es igual a:

$$H_O = m \frac{|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = 2m \frac{dS}{dt}$$

Siendo dS el elemento diferencial de área barrida en dt . Así, podemos afirmar que *la velocidad aerolar es constante*. La manera usual de

expresar esta última propiedad es mediante la «constante de las áreas» (C), definida como:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_O}{m} = 2 \frac{dS}{dt} \quad (5.13)$$

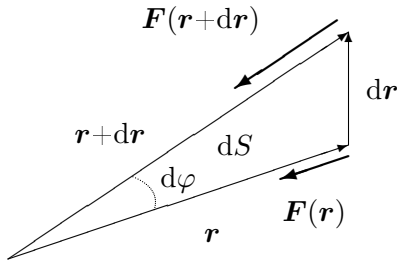


Figura 5.4: Velocidad areolar bajo fuerzas centrales.

5.2.2. Ecuaciones del Movimiento

Expresamos la posición mediante las coordenadas polares (r, φ) tomando como origen el centro de fuerzas O .

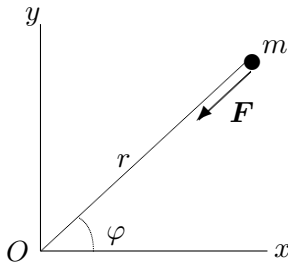


Figura 5.5: Coordenadas polares para el movimiento de m atraída desde O .

La constancia de la velocidad areolar (5.13) da lugar a la siguiente ecuación:

$$dS = \frac{1}{2} r (r d\varphi) \Rightarrow \boxed{C = r^2 \dot{\varphi}.} \quad (5.14)$$

Se obtiene otra ecuación al aplicar la ley fundamental de la dinámica en la dirección (radial) de la fuerza:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \boxed{m \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) = F(r).} \quad (5.15)$$

A esta expresión se podría haber llegado igualmente a partir de la ecuación de la energía cinética (2.6) (ejercicio que se deja para el lector).

Las expresiones (5.14) y (5.15) son ecuaciones diferenciales del movimiento en función de las variables r y φ . Cabe resolverlas de dos maneras:

1. En función de t , para hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (*Ecuaciones horarias*): $r = r(t)$; $\varphi = \varphi(t)$.
2. Eliminando t , para hallar la ecuación intrínseca de la trayectoria: $r = r(\varphi)$.

Plantearemos a continuación un método general para resolver las ecuaciones diferenciales anteriores, válido para fuerzas centrales (5.11) en general, reduciendo el problema a cuadraturas. Recordemos en primer lugar, que según lo expuesto en el apartado 5.2.1, las fuerzas centrales provienen siempre de un potencial:

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}.$$

Admitiendo que $\partial V/\partial t = 0$, podemos expresar la conservación de la energía total $E \stackrel{\text{def}}{=} T + V$:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \overbrace{r^2\dot{\varphi}^2}^{C^2/r^2}) + V(r),$$

de donde, despejando \dot{r} ,

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}. \quad (5.16)$$

Integrando esta expresión se obtiene:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}}.$$

Una vez realizada esta última integral (o cuadratura) para obtener $t(r)$, invirtiendo obtendríamos $r(t)$, y entrando en la ecuación (5.14), mediante una cuadratura adicional, se obtendría $\varphi(t)$.

Para obtener la ecuación implícita de la trayectoria, se podría eliminar t de la siguiente manera:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} dr$$

y eliminando $\dot{\varphi}$ a partir de (5.14),

$$d\varphi = \frac{C/r^2}{\dot{r}} dr.$$

Empleando la expresión anterior (5.16) para \dot{r} e integrando se llega a

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{C \, dr}{\pm r^2 \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}}.$$

Resolviendo esta integral obtendríamos $\varphi(r)$, e invirtiendo, $r(\varphi)$.

El procedimiento expuesto permite resolver el movimiento reduciéndolo a cuadraturas, en un caso general de fuerzas centrales.

5.2.3. Fórmula de Binet

Expondremos a continuación otro procedimiento para resolver las ecuaciones diferenciales (5.14) y (5.15). Este procedimiento da lugar a la denominada *fórmula de Binet*, que resulta especialmente útil para el caso de fuerzas gravitatorias, como se verá más abajo.

Para ello, efectuaremos un cambio de variable, de r a $u = 1/r$. Expresemos en primer lugar la derivada de la nueva variable u respecto a φ :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \underbrace{=}_{C=r^2\dot{\varphi}} -\frac{\dot{\varphi} \, dr}{C \, d\varphi} \underbrace{=}_{\frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}} -\frac{\dot{r}}{C};$$

despejando de aquí \dot{r} y derivando de nuevo respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left[-C \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -C \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\varphi} \\ &= -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Empleando esta expresión podemos eliminar \ddot{r} de la ecuación (5.15), obteniendo

$$F(r) = m \left[-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} \right],$$

o bien,

$$\boxed{F(r) = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right]} \quad (\text{Fórmula de Binet}) \quad (5.17)$$

5.3. Órbitas Gravitatorias

La fórmula de Binet (5.17) es válida para cualquier tipo de fuerza central. En el caso de las fuerzas gravitatorias, si se particulariza para

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2},$$

se obtiene la *Ecuación diferencial de la órbita gravitatoria*:

$$\boxed{\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2}}$$

Como se ve, resulta una ecuación diferencial lineal en $1/r$, de segundo orden, análoga a la ya conocida del oscilador armónico (capítulo 3). Tan sólo cambia la variable, que ahora es $u = 1/r$. La solución general para esta ecuación es:

$$\frac{1}{r} = \underbrace{A \cos \varphi}_{\substack{\text{sol. gral.} \\ \text{homogénea}}} + \underbrace{\frac{GM}{C^2}}_{\substack{\text{sol. part.} \\ \text{completa}},$$

donde al integrar hemos elegido convenientemente el origen de ángulos, sin pérdida de generalidad, considerando $\varphi_0 = 0$. Transformando ligeramente los parámetros en esta expresión, se obtiene:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}}, \quad (5.18)$$

siendo $p \stackrel{\text{def}}{=} C^2/(GM)$, $e \stackrel{\text{def}}{=} AC^2/(GM)$.

La ecuación (5.18) es la expresión general de una cónica en coordenadas polares. En ésta r representa la distancia al foco (F) de la cónica, y φ el ángulo con el eje focal (FF'). p es el llamado *parámetro* de la cónica, y e la *excentricidad* de la misma. El valor de esta última caracteriza el tipo de cónica:

$$\begin{aligned} 0 \leq e < 1 &: \text{ elipse } (e = 0 : \text{ circunferencia}) \\ e = 1 &: \text{ parábola} \\ e > 1 &: \text{ hipérbola} \end{aligned}$$

Otra forma de definir con carácter general una cónica es como el lugar geométrico de los puntos X cuyas distancias respecto a uno dado (foco F) y a una recta dada (directriz d) estén en una relación constante e igual a $e > 0$:

$$\frac{\text{dist}(X, F)}{\text{dist}(X, d)} = e.$$

Tanto la elipse como la hipérbola son curvas simétricas respecto a un eje perpendicular al plano focal, con un centro (O) y dos focos (F, F'). El eje focal se denomina también mayor, y el eje perpendicular a éste por su centro se denomina menor o secundario. Se llaman vértices de la cónica a los puntos de la misma sobre los ejes. La distancia de un eje focal al vértice correspondiente se llama *semieje mayor*, a . La semidistancia focal se denomina c , cumpliéndose $c = ae$.

Elipse.— En el caso de trayectoria elíptica, la masa atractora, situada en el origen de las coordenadas polares, corresponde a uno de los focos de la elipse. Se puede definir ésta de una manera general como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante: $PF + PF' = 2a$. A continuación se resumen algunas relaciones geométricas útiles para la elipse (ver también la figura 5.6):

$$a = p/(1 - e^2); \quad c = ae$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2) = pa$$

$$\text{Area} = \pi ab$$

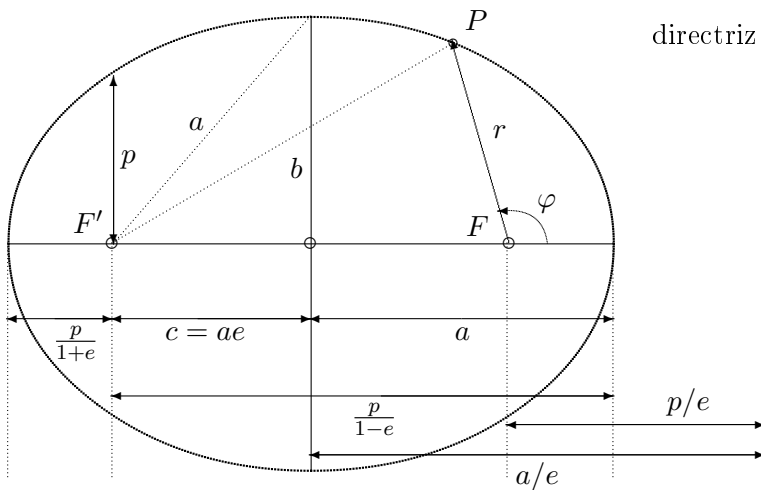


Figura 5.6: Trayectoria elíptica; relaciones geométricas.

Estableciendo unos ejes Oxy , con direcciones según el eje focal y el eje secundario respectivamente, la ecuación reducida de la elipse sería

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se puede asimismo establecer las ecuaciones paramétricas de la elipse de la forma

$$\begin{aligned} x &= a \cos u; \\ y &= b \operatorname{sen} u. \end{aligned}$$

El significado del parámetro u se verá más adelante (aptdo. 5.6.1), denominándose *anomalía excéntrica*. (El ángulo φ medido desde el foco F se denomina *anomalía verdadera*.)

Hipérbola.— En este caso también se cumple que la masa atractora M está en uno de los focos. La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos cuyas diferencias de distancias a F y F' (focos) es constante: $PF - PF' = 2a$ (figura 5.7). A continuación se resumen algunas relaciones

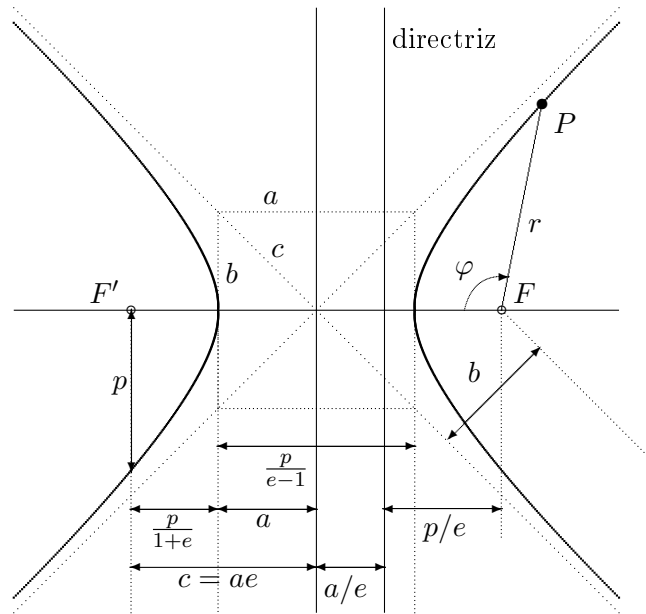


Figura 5.7: Trayectoria hiperbólica; relaciones geométricas.

geométricas útiles para la hipérbola:

$$\begin{aligned} a &= p/(e^2 - 1); & c &= ae \\ b^2 &= c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1) = pa \\ \varphi_{\text{asíntota}} &= \pm \operatorname{arc} \cos \left(\frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

La ecuación reducida de la hipérbola se establece, análogamente a la elipse, en unos ejes Oxy con origen en el centro de la cónica y dirección x según el eje focal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Igualmente, puede escribirse la ecuación en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= \pm a \cosh u; \quad (2 \text{ ramas}) \\ y &= b \sinh u \end{aligned}$$

En este caso, el parámetro u se denomina *anomalía virtual*.

Parábola.— Se define como caso límite de la elipse o de la hipérbola, cuando $e = 1$. La trayectoria no está acotada, aunque en cambio no posee asíntotas. Puede definirse también la parábola como lugar geométrico de puntos cuya distancia a un foco (F) y a una recta directriz (d) sean iguales (figura 5.8). El eje de la parábola se define como la recta por F perpendicular a d . Estableciendo una referencia Oxy con origen en el vértice de la parábola y dirección x según el eje de la misma, la ecuación reducida es

$$y^2 = 2px.$$

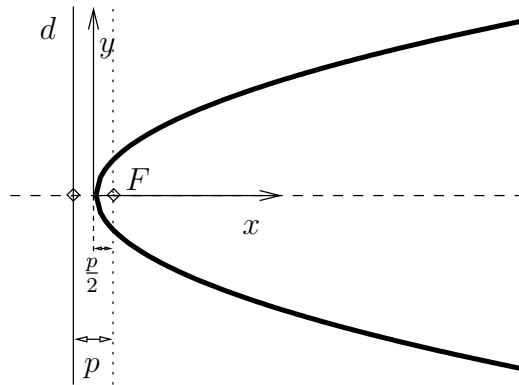


Figura 5.8: *Trayectoria parabólica; relaciones geométricas.*

La trayectoria elíptica es el único caso de los anteriores en que la órbita es cerrada, manteniéndose la partícula dentro de una distancia acotada a la masa atractora; es por tanto la que siguen los planetas y los satélites. La

mínima distancia —en el punto denominado «perigeo» o «perihelio» según se trate de órbitas alrededor de la Tierra o del Sol— vale $r_{\min} = p/(1 + e)$ (particularizando para $\varphi = 0^\circ$); la máxima distancia (en el «apogeo» o «afelio» respectivamente) vale $r_{\max} = p/(1 - e)$. La distancia media entre los dos extremos³ es por tanto:

$$r_{\text{med}} = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} \right] = \frac{p}{1 - e^2} = a.$$

El término «órbita» suele estar asociado a una trayectoria acotada, por lo que las parábolas y las hipérbolas no se pueden considerar órbitas hablando con propiedad, ya que la partícula atraída pasa cerca de la masa atractora y se aleja después al infinito. La parábola es el caso límite para que la partícula se marche al infinito, teniendo la energía justa para escapar de la acción gravitatoria. Las hipérbolas corresponden a los casos en los que una partícula proveniente del infinito se ve desviada en su trayectoria por otra masa M , efectuando un cambio de ángulo: viene por una asíntota y se marcha por otra.

5.4. Energía de las órbitas gravitatorias

Aplicando la definición (5.12) del Potencial V para el caso de fuerzas gravitatorias, se puede expresar:

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r^2} dr;$$

e integrando:

$$V = \int_{r_0}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r} + G \frac{Mm}{r_0}$$

Fijamos convencionalmente que para $r_0 \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow 0$ (es decir, $V(\infty) = 0$). Así:

$$\boxed{V(r) = -G \frac{Mm}{r}.} \quad (5.19)$$

Esta expresión equivale a considerar el potencial $V(r)$ como el trabajo que realizan las fuerzas del campo gravitatorio, al desplazarse una partícula

³Téngase en cuenta que este valor medio no coincide con la media temporal de la distancia, a lo largo del movimiento. Si se define la media temporal de una variable $y(t)$ durante un periodo τ como $\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y(t) dt$, el valor medio de la distancia r durante una órbita completa resulta ser $\bar{r} = a(1 + e^2/2)$. Se deja como ejercicio al lector el realizar la integral correspondiente para comprobar este resultado.

desde un punto situado a distancia r hasta el infinito. Como se ve en la expresión anterior, dicho trabajo es negativo, lo que quiere decir que el campo gravitatorio se opone a dicho desplazamiento, ya que las fuerzas son atractivas.

La energía total es la suma de T y V :

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{Mm}{r}. \quad (5.20)$$

Al no existir más fuerzas que las centrales del campo gravitatorio, que como se vió son conservativas, E se mantiene constante. Podemos calcular su valor en el perigeo, sabiendo que en cualquier otro punto mantendrá ese valor. En el perigeo es $\varphi = 0^\circ$, $\dot{r} = 0$:

$$v^2 = r^2\dot{\varphi}^2 \underbrace{=}_{r^2\dot{\varphi}=C} \frac{C^2}{r^2} \underbrace{=}_{p=C^2/(GM)} \frac{GMp}{r^2},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{GMp}{r^2} - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{GMm}{r} \left[\frac{1}{2} \frac{p}{p/(1+e)} - 1 \right] = \frac{1}{2} \frac{GMm}{p} (1+e)[1+e-2], \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{p} (1 - e^2)}. \quad (5.21)$$

A este mismo resultado se podría llegar desarrollando la expresión de la energía total en un punto genérico que no sea el perigeo ni el apogeo, aunque este desarrollo requeriría algunas operaciones más. Dejamos este ejercicio de comprobación para el lector.

Así, la ecuación (5.21) permite clasificar las trayectorias posibles según un criterio energético:

- $e < 1$: *Elipse*, Energía total negativa ($E < 0$). Una partícula en este tipo de trayectoria nunca llega al infinito, que correspondería a $E = 0$.
- $e = 1$: *Parábola*, Energía total nula ($E = 0$). Tiene la energía justa para llegar al infinito con $v_\infty = 0$, agotando en el camino toda su energía cinética.
- $e > 1$: *Hipérbola*, Energía total positiva ($E > 0$). Llega al infinito sin agotar la energía cinética ($v_\infty \neq 0$).

Es útil expresar la energía dada por (5.21) en función del parámetro « a » (semieje mayor) de la trayectoria, que según el tipo de cónica vale $a = p/(1 - e^2)$ para la elipse, o $a = p/(e^2 - 1)$ para la hipérbola (Conviene notar que se verifica $a > 0$ siempre, y que en el caso de la parábola, al ser $e = 1$, se verifica $a \rightarrow \infty$). De esta manera, resultan las expresiones que se resumen en el cuadro siguiente:

Elipse:	$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$	(5.22)
Parábola:	$E = 0, \quad v^2 = GM\frac{2}{r}$	
Hipérbola:	$E = \frac{GMm}{2a}, \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$	

En el cuadro anterior se han incluido también las expresiones de v^2 en cada caso, obtenidas a partir de:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}.$$

Cabe observar que las expresiones de E en (5.22) sólo dependen de a . Se deduce así que pueden existir diversas órbitas con igual energía y distintas excentricidades, con tal de que el valor de a sea el mismo. Sin embargo, al tener en común el foco y no el centro, dichas órbitas isoenergéticas no serían tangentes entre sí (figura 5.9).

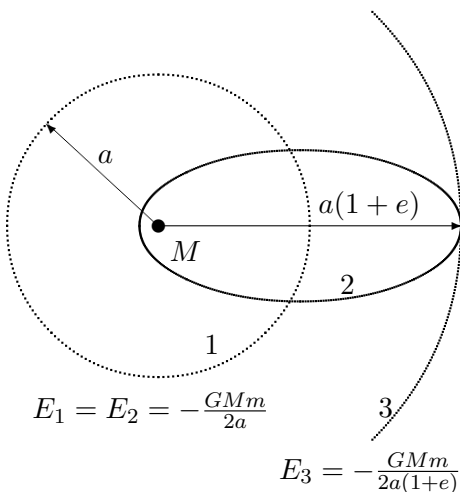


Figura 5.9: Las órbitas 1 y 2 son isoenergéticas, mientras que la 3 tiene una energía mayor.

EJEMPLO 5.1: Sobre la superficie de la tierra, en un punto de latitud $\phi = 40^\circ$ N, se lanza un proyectil en dirección N con una velocidad inicial $v_0 = 28\,800$ km/h y una inclinación de 85° respecto al suelo. La tierra se supone esférica de radio 6400 km, homogénea, fija y sin atmósfera. Tomar $g = 9,81$ m/s². Se pide:

- Trayectoria que describe el proyectil, altura máxima y latitud del punto de caída
- Velocidades máxima y mínima;
- Velocidad y altura en el punto de latitud 43° N.

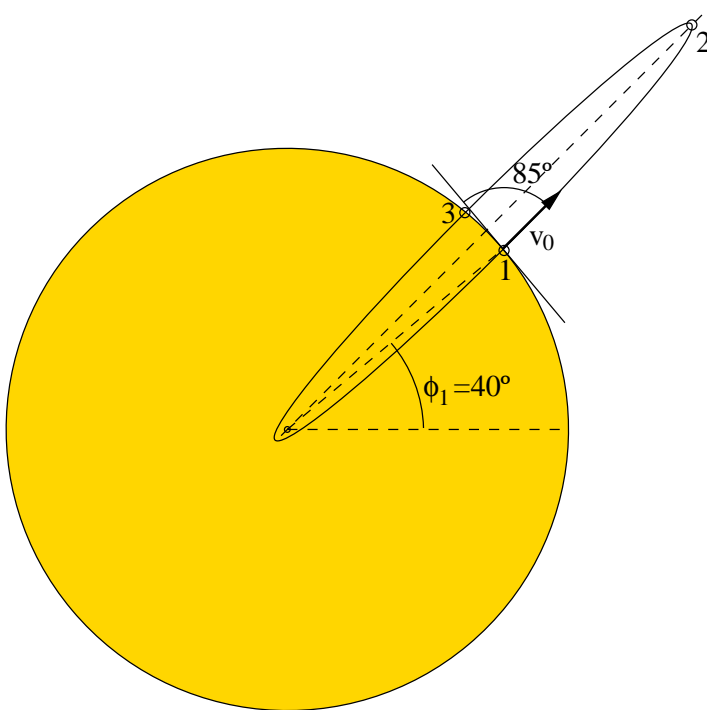


Figura 5.10:
Ejemplo 5.1;
Proyectil que
se lanza desde
1 con velocidad
 v_0 y ángulo de
 85° .

Solución.

a.— La velocidad de escape es:

$$\frac{1}{2}m\frac{v_E^2}{R_T} = \frac{GMm}{R_T^2} \Rightarrow v_E = \sqrt{GM\frac{2}{R_t}} = \sqrt{2gR_T} \approx 40\,340,6 \text{ km/h} > v_0,$$

luego la trayectoria del proyectil es elíptica.

Para calcular los puntos de máxima y mínima altura, tendremos en cuenta que son los vértices del semieje mayor de la elipse, y planteamos la conservación de la energía y del momento cinético:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gmm}{R_T} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm}{r_2} \\ mv_0 \cos 85^\circ \cdot R_T &= mr_2v_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_2 = \begin{cases} 13\,028 \text{ km} \\ 24,826 \text{ km} \end{cases}$$

Por tanto, la altura máxima es $h_{\max} = 13\,028 - 6\,400 = 6\,628$ km. La otra solución para r_2 corresponde al otro vértice de la elipse, punto que lógicamente no se alcanzará en la trayectoria al caer antes sobre la superficie de la tierra.

Es interesante comprobar el error que resultaría de haber considerado la gravedad simplificada, en cuyo caso la altura máxima sería $h_{\max} = (1/2)v_0^2/g = 3\,262$ km, es decir un 49% del valor correcto.

Los parámetros de la órbita son:

$$\left. \begin{aligned} a + c &= 13\,028 \\ a - c &= 24,826 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 6\,526,4 \text{ km} \\ c = 6\,501,6 \text{ km} \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = 0,9962; \quad p = a(1 - e^2) = 49,557 \text{ km.}$$

El punto de caída estará en la intersección entre la trayectoria elíptica y la superficie de la tierra:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ r &= R_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \theta = -0,996 \begin{cases} \theta_1 = 174,9^\circ \\ \theta_2 = 185,1^\circ \end{cases}$$

El punto de caída tendrá por tanto una latitud de

$$\phi_3 = \phi_1 + (\theta_2 - \theta_1) = 50,2^\circ.$$

b.— La velocidad máxima es v_0 , en los puntos de lanzamiento y caída. La velocidad mínima se alcanza en el punto de máxima altura,

$$v_2 = \sqrt{gR_T^2 \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = 342,6 \text{ m/s } (= 1\,233,37 \text{ km/h}).$$

c.— En el punto de $\phi = 43^\circ$ el parámetro angular de la órbita es $\theta = \theta_1 + 3^\circ = 177,9^\circ$. Sustituyendo en la ecuación de la trayectoria,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = 11\,083,9 \text{ km,}$$

luego la altura correspondiente es

$$h = 11\,083,9 - 6\,400 = 4\,683,9 \text{ km.}$$

Por último, la velocidad del proyectil en este punto es

$$v = \sqrt{gR_T^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = 3\,307,1 \text{ m/s } (= 11\,905,6 \text{ km/h}). \quad \square$$

5.4.1. Potencial Efectivo

En la ecuación (5.20) de la energía total, podemos eliminar $\dot{\varphi}$, quedando una expresión en función de r y \dot{r} :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{m\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}}_{\text{Pot. efectivo, } V_{\text{ef}}(r)}, \end{aligned}$$

es decir, definiendo un «Potencial efectivo» como

$$V_{\text{ef}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} m \left(\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right) \quad (5.23)$$

la energía queda descompuesta en dos sumandos, $V_{\text{ef}}(r)$, término que depende únicamente de la distancia r , y $m\dot{r}^2/2$, término esencialmente positivo, que corresponde a una parte de la energía cinética del cuerpo (la debida a la velocidad radial):

$$E = V_{\text{ef}}(r) + \frac{m\dot{r}^2}{2} \quad (5.24)$$

Para cada valor dado de C (constante de las áreas), se obtiene una función $V_{\text{ef}}(r)$ determinada. El análisis de la representación gráfica de esta función (figura 5.11) permite observar algunas características interesantes del movimiento:

- Las distintas órbitas vienen caracterizadas por una Energía total $E = \text{constante}$, que corresponde a líneas horizontales en la gráfica. Puesto que la diferencia $E - V_{\text{ef}}(r)$ en (5.24) es esencialmente positiva, el movimiento se restringe a los valores de r para los que el potencial efectivo es menor que la energía total, $V_{\text{ef}}(r) < E$. Así, podemos distinguir las curvas de $V_{\text{ef}}(r)$ correspondientes a:

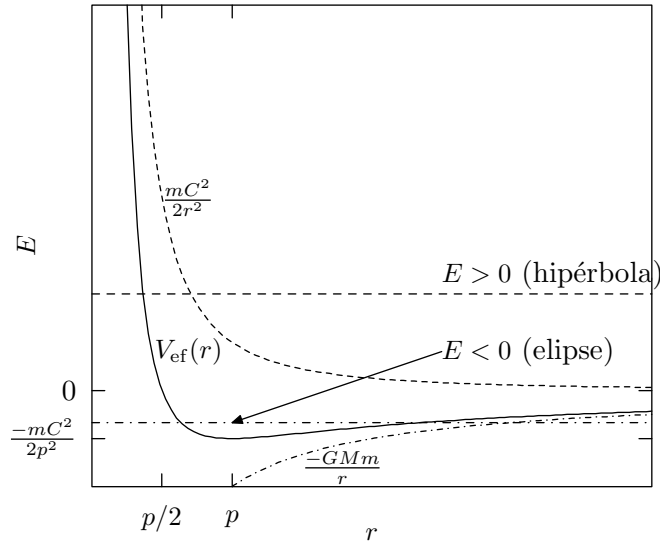


Figura 5.11: Gráfico del potencial efectivo; según el nivel energético, las órbitas son elipses ($E < 0$), parábolas ($E = 0$) o hipérbolas ($E > 0$).

- *hipérbolas*, cuando se produce un sólo punto de corte de $V_{\text{ef}}(r)$ con la recta $E = \text{cte}$, movimiento restringido a $r_{\min} < r < \infty$;
 - *parábolas*, similar al caso anterior, en el caso límite $E = 0$;
 - *elipses*, con dos puntos de corte con $E < 0$, zona admisible $r_{\min} < r < r_{\max}$,
 - *circunferencias* ($r = \text{cte.}$). Es inmediato comprobar que para un valor dado de C , la circunferencia es la trayectoria de energía mínima.
- El punto $V_{\text{ef}}(r) = 0$ corresponde a:

$$\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{2},$$

o bien $r \rightarrow \infty$ (asíntota horizontal).

- El mínimo de $V_{\text{ef}}(r)$, para un valor dado de C , ocurre para

$$\frac{d}{dr} V_{\text{ef}} = -\frac{C^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = p,$$

y particularizando, el mínimo resulta

$$r = p \quad \Rightarrow \quad (V_{\text{ef}})_{\min} = -\frac{mC^2}{2p^2};$$

La órbita circular es aquella en que $E = (V_{\text{ef}})_{\text{min}}$, en ella la energía es:

$$E = -\frac{mC^2}{2p^2} = -\frac{GMm}{2p} = -\frac{GMm}{2a} = -\underbrace{\frac{GMm}{a}}_V + \underbrace{\frac{GMm}{2a}}_T$$

- Para el caso de la hipérbola, la velocidad radial para $r \rightarrow \infty$ es:

$$\dot{r}_\infty = \sqrt{2E/m};$$

mientras que para la parábola $\dot{r}_\infty = 0$.

5.5. Leyes de Kepler

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), tras un minucioso análisis de las observaciones de los planetas y fundamentalmente de Marte, enunció al principio del siglo XVII tres leyes empíricas sobre su movimiento. En ese momento no se conocía un modelo teórico que las explicase. No fué hasta finales del mismo siglo (1686) que Newton, con la publicación de sus *Principia*, pudo explicar las observaciones de Kepler a partir de una axiomática y un modelo matemático coherente.

Por su especial interés en la historia de la mecánica y puesto que ayudan a comprender los conceptos tratados en este capítulo citaremos aquí estas leyes.

‘PRIMERA LEY. Los planetas describen órbitas elípticas, con foco en el Sol.’

Más arriba (5.18) se demostró que las órbitas son necesariamente cónicas.

‘SEGUNDA LEY. Las áreas barridas en tiempos iguales son iguales.’

Como se ha visto (5.13) se trata de una propiedad general de los movimientos bajo fuerzas centrales.

‘TERCERA LEY. Los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.’

Esta última ley se deduce de la constancia de la velocidad areolar, como veremos a continuación.

En efecto, al ser ésta constante (5.13) la podemos igualar a su valor medio, que será igual al área barrida en la órbita completa dividida por el período T :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{\pi ab}{T} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2};$$

considerando las relaciones $b^2/a = p$ y $C^2/GM = p$, se obtiene:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \quad \text{c.q.d.}$$

EJEMPLO 5.2: Calcular la altura a la que debe situarse un satélite artificial, para seguir una órbita geoestacionaria alrededor de la tierra. (Nota: se denomina geoestacionaria la órbita de un satélite que se sitúa siempre sobre el mismo punto de la superficie de la tierra).

Solución. Consideramos los datos siguientes:

- Radio de la tierra $\approx 40\,000 \text{ km}/2\pi = 6,366 \times 10^6 \text{ m}$.
- $GM = gR^2 = 397,58 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$.
- Periodo de rotación de la tierra (día sidéreo): $T = 86\,164 \text{ s}$.

Por tanto, el semieje mayor de la órbita es

$$a^3 = \frac{86\,164^2 \times 397,58 \times 10^{12}}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad a = 42\,128 \text{ km}$$

La altura sobre la superficie de la tierra será $a - R = 35\,762 \text{ km}$. □

Para un satélite no geoestacionario de órbita baja, el periodo suele ser mucho menor. Por ejemplo, si es $T = 2 \text{ h}$, corresponde a un semieje $a = 8\,052 \text{ km}$, y por tanto a una altura media de $1\,686 \text{ km}$. En este caso el satélite no puede mantenerse sobre la vertical de un mismo punto de la superficie de la tierra.

Unidades astronómicas.—

A menudo se emplean en astronomía estas unidades, definidas como:

Longitud: Unidad Astronómica (U.A.) $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Semieje mayor de la órbita Tierra-Sol} (= 1,49598 \times 10^{11} \text{ m})$.

Tiempo: Año sidéreo (= 365,25636 días solares)⁴

Masa: Masa del Sol (= $1,9891 \times 10^{30}$ kg).

Estas unidades son particularmente adecuadas para el sistema solar, simplificando considerablemente la aritmética. Por ejemplo, en ellas, La constante gravitatoria para planetas en órbita solar sería

$$GM_{\text{sol}} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2.$$

5.6. Ecuaciones Horarias

En los apartados 5.3 y 5.4 se ha discutido la trayectoria de las órbitas gravitatorias, en cuanto a su ecuación intrínseca y sus propiedades generales. El cálculo de las ecuaciones horarias es la otra integración que cabe hacer de las ecuaciones (5.14) y (5.15) del movimiento, a la que se aludió en el apartado 5.2.2. Estas ecuaciones son de gran importancia, pues directamente de la ecuación implícita de la trayectoria no es posible calcular la posición de un planeta o satélite en un instante dado.

5.6.1. Trayectoria elíptica

Estudiaremos primero el caso del movimiento en órbita elíptica. Para ello se debe efectuar un cambio de variable mediante la «construcción de Kepler», según la figura 5.12.

Cambiaremos la variable φ , llamada «anomalía verdadera,» por u , llamada «anomalía excéntrica». La diferencia estriba en que φ es el ángulo \widehat{AFP} que forma el radio vector, trazado desde el foco, con el semieje mayor, mientras que u es el ángulo $\widehat{AOP'}$ que forma el radio desde el centro de la circunferencia.

Teniendo en cuenta: $OF = c$; $OA = OP' = a$, podemos escribir:

$$a \cos u - r \cos \varphi = c \quad \Rightarrow \quad \cos u = e + \frac{r}{a} \cos \varphi; \quad (5.25)$$

considerando $r = p/(1 + e \cos \varphi)$ obtenemos:

$$\cos u = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u},$$

⁴Día solar = 24 h = 86 400 s; Día sidéreo = 86 164 s; Año trópico = 365,2422 días solares = 366,2422 días sidéreos.

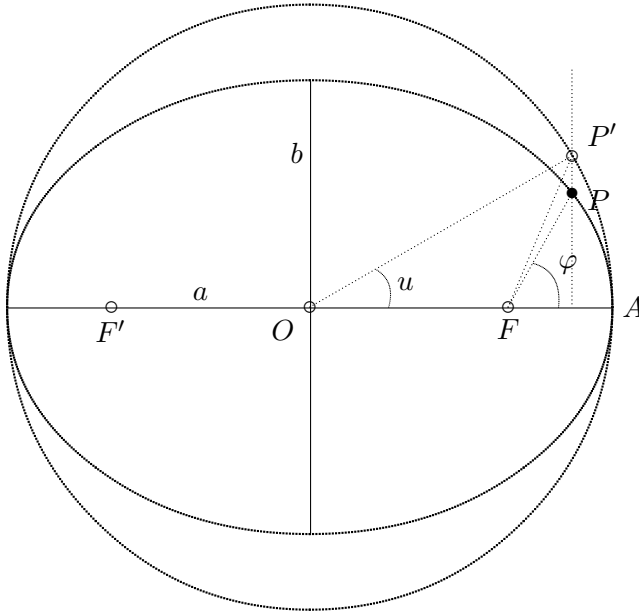


Figura 5.12: *Construcción de Kepler para la determinación de la anomalía excéntrica u .*

ecuación que expresa la relación entre φ y u y que también se puede escribir como:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Planteamos ahora la constancia de la velocidad aerolar; Calcularemos para ello el área barrida en el movimiento elíptico (sector FAP) como la correspondiente a la circunferencia afín (sector FAP') multiplicada por la relación de afinidad b/a :

$$\begin{aligned} A_{FAP'} &= A_{OAP'} - A_{OFP'} \\ &= a^2 \frac{u}{2} - \frac{ca \operatorname{sen} u}{2} = \frac{a^2}{2} (u - e \operatorname{sen} u); \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} A_{FAP} &= t \frac{C}{2} = \frac{t}{2} \sqrt{GMp} \\ &= \frac{t}{2} b \sqrt{GM/a} = \frac{t}{2} \frac{2\pi ab}{T}, \end{aligned}$$

donde se han empleado las relaciones $p = b^2/a$; $T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$.

Así, igualando $(b/a)A_{FAP'} = A_{FAP}$, y definiendo la constante $n \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/T$ (llamada «movimiento medio»), se llega a:

$$\boxed{u - e \operatorname{sen} u = nt} \quad (\text{Ecuación de Kepler}). \quad (5.26)$$

Esta ecuación es inmediata de resolver si lo que se pretende es obtener el instante t en que se ocupará una posición φ dada, a partir del simple cálculo de la anomalía excéntrica correspondiente (u) en (5.25).

Sin embargo, si lo que se pretende es obtener la posición φ para un instante dado, (5.26) resulta ser una ecuación intrínseca no lineal, que es necesario resolver por algún procedimiento numérico iterativo, como puede ser el método de Newton, el de bisección, etc.⁵

5.6.2. Movimiento hiperbólico

En este caso no es posible emplear un procedimiento geométrico como para la elipse, por lo que obtendremos las ecuaciones de forma analítica. Partimos de las ecuaciones paramétricas de la hipérbola, medidas desde el centro de la cónica:

$$x = \pm a \cosh u; \quad y = b \operatorname{senh} u,$$

donde el parámetro u se denomina *anomalía virtual*. Calculamos la expresión de la distancia r medida desde el foco F :

$$r = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} = a(e \cosh u - 1).$$

Igualando este valor con el que proporciona la ecuación focal de la cónica, $r = p/(1 + e \cos \varphi)$, resultan las expresiones

$$\cosh u = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}; \quad \cos \varphi = \frac{\cosh u - e}{1 - e \cosh u},$$

ecuaciones análogas a las obtenidas antes para la elipse, pero con funciones hiperbólicas. Igualmente, de éstas se deduce

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \left(\frac{u}{2} \right).$$

⁵Para una descripción de estos métodos, consultar algún texto de análisis numérico, como p.ej. J. Puy: *Algoritmos Numéricos en Pascal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ing. de Caminos de Madrid, o R.L. Burden y J.D. Faires: *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985

Emplearemos las relaciones anteriores para la ecuación de constancia de la velocidad areolar,

$$r^2 \dot{\varphi} = C. \tag{5.27}$$

Para realizar el cambio de variable de φ a u derivamos

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2(\varphi/2)} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{\dot{u}}{\cosh^2(u/2)};$$

operando, resulta

$$\dot{\varphi} = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\dot{u}}{e \cosh u - 1}.$$

Con esto, (5.27) resulta

$$C = a^2 \sqrt{e^2 - 1} (e \cosh u - 1) \dot{u};$$

e integrando, con la condición de borde $u|_{t=0} = 0$ (el instante $t = 0$ corresponde al vértice de la hipérbola):

$$ab(e \operatorname{senh} u - u) = Ct.$$

En este caso no existe periodo real, pero por analogía con el movimiento elíptico, se puede definir un periodo virtual

$$T_v \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \frac{2\pi ab}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{ab} = \frac{2\pi}{T_v} = n_v,$$

donde n_v se denomina *movimiento medio virtual*. Con esto, finalmente resulta

$$\boxed{e \operatorname{senh} u - u = n_v t.}$$

La ecuación obtenida es no lineal, con funciones trascendentes. Además de esto, plantea la dificultad de que el primer término no está acotado, por lo que puede resultar más difícil escoger un valor inicial para la solución iterativa.

5.6.3. Movimiento parabólico

Seguiremos, al igual que en el caso de la hipérbola, un procedimiento analítico mediante n cambio de variable. La variable a emplear es

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}.$$

Despejando, podemos expresar también

$$\cos \varphi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2},$$

y sustituyendo en la ecuación focal de la cónica $r = p/(1 + e \cos \varphi)$ resulta

$$r = \frac{p}{2}(1 + \tau^2).$$

Derivando esta expresión

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\dot{\tau}}{1 + \tau^2}.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de la velocidad areolar ($r^2\dot{\varphi} = C$),

$$C = \frac{p^2}{2}(1 + \tau^2)\dot{\tau},$$

e integrando con la condición inicial $\tau|_{t=0} = 0$ (en el instante $t = 0$ estaría en el vértice):

$$\tau + \frac{\tau^3}{3} = \frac{2C}{p^2}t = \frac{2\sqrt{GM}}{p^{3/2}}t.$$

La ecuación obtenida sigue siendo no lineal, pero en este caso es cúbica, de la que puede hallarse una solución directa.

5.7. Estudio del Sistema Ternario

El problema de los tres cuerpos, al contrario que el de los dos cuerpos, no posee solución analítica en un caso general. Ha recibido a lo largo de la historia la atención de grandes matemáticos (Lagrange, Laplace, Jacobi). Poincaré en los albores del siglo XX, demostró que no posee solución analítica «cuantitativa». A raíz de ésto, adquirió un gran auge en la mecánica el empleo de métodos cualitativos que, entre otras cosas, persiguen estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos.

En un caso general, para su solución cuantitativa directa, es necesario emplear desarrollos en serie o métodos numéricos de integración directa en el tiempo. Tan sólo en algunos casos particulares, como el movimiento equilátero o el movimiento alineado, es posible plantear las soluciones analíticas.

5.7.1. Planteamiento de las Ecuaciones

Sean tres masas (m_1, m_2, m_3) descritas por sus vectores de posición respectivos ($\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$) y que ejercen entre sí fuerzas gravitatorias (figura 5.13). Describamos el movimiento relativo a m_3 :

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$$

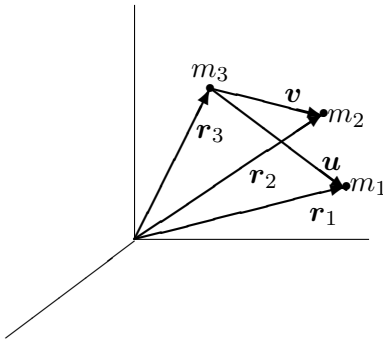


Figura 5.13: *Sistema Ternario.*

Sobre cada masa actúa la atracción gravitatoria de las otras dos; estableciendo así las expresiones dinámicas se llega a las ecuaciones del movimiento (absoluto) para m_1 , m_2 y m_3 que son:

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1}{u^3} \mathbf{u} + \frac{Gm_2}{v^3} \mathbf{v}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_3}{u^3} \mathbf{u} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3}{v^3} \mathbf{v} - \frac{Gm_1}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

Restando entre sí estas ecuaciones obtenemos el movimiento relativo, $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_3$, $\ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_3$:

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{GM}{u^3} \mathbf{u} + Gm_2 \left(\frac{\mathbf{u}}{u^3} - \frac{\mathbf{v}}{v^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} \right), \quad (5.28)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{v^3} \mathbf{v} - Gm_1 \left(\frac{\mathbf{u}}{u^3} - \frac{\mathbf{v}}{v^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} \right), \quad (5.29)$$

donde $M \stackrel{\text{def}}{=} m_1 + m_2 + m_3$. Con estas dos ecuaciones diferenciales queda definido el movimiento relativo a m_3 .

5.7.2. Movimiento Alineado

Se trata de un caso particular en el que existe solución analítica al problema de los tres cuerpos. Para ello imponemos que se cumpla constantemente $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, siendo λ un escalar arbitrario. Esta condición impone la alineación de los tres cuerpos sobre una recta que puede a su vez girar en el espacio.

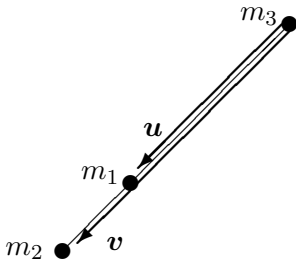


Figura 5.14: *Sistema ternario alineado.*

Sustituyendo la condición anterior en las ecuaciones (5.28), (5.29), resulta:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u^3} \left[-GM + Gm_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) \right] \quad (5.30)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}}{u^3} \left[-\frac{GM}{\lambda^2} - Gm_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) \right] \quad (5.31)$$

donde se ha supuesto $\lambda > 1$. Esto no supone restricción ninguna, ya que expresa simplemente que m_1 sea la masa central y m_2 , m_3 las laterales; el caso en que m_2 fuese la masa central corresponde a $0 < \lambda < 1$, y para m_3 en el centro sería $\lambda < 0$. Por lo tanto la solución tomada tiene validez general, obteniéndose los otros dos casos sin más que permutar el papel de las masas.

Por otra parte, si derivamos dos veces la expresión $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \lambda \ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\lambda} \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\lambda} \mathbf{u}. \quad (5.32)$$

Las fuerzas están dirigidas según la recta de alineación, definida por el vector \mathbf{u} . Por tanto, las aceleraciones estarán dirigidas según la misma recta: $\ddot{\mathbf{r}}_1 \parallel \mathbf{u}$; $\ddot{\mathbf{r}}_2 \parallel \mathbf{u}$; $\ddot{\mathbf{r}}_3 \parallel \mathbf{u}$, y por tanto, sus diferencias $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_3$, $\ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_3$, han de ser también paralelas a \mathbf{u} . En un caso general \mathbf{u} puede girar, y $\dot{\mathbf{u}}$ no llevaría necesariamente la dirección de \mathbf{u} , por lo que de la inspección de la expresión (5.32) se deduce que $\dot{\lambda} = 0$, es decir $\lambda = \text{cte}$. Así, (5.32) se reduce necesariamente a

$$\ddot{\mathbf{v}} = \lambda \ddot{\mathbf{u}}.$$

Esta expresión indica que las trayectorias de m_1 y m_2 relativas a m_3 son homotéticas de razón λ (constante). Sustituyendo en esta ecuación las expresiones anteriores (5.30) y (5.31):

$$-M + m_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) = -\frac{M}{\lambda^3} - \frac{m_1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right),$$

ecuación de quinto grado en λ , cuyas soluciones corresponden a las posiciones de equilibrio. Es posible demostrar que esta ecuación posee una única solución real en el rango de validez física ($\lambda > 1$). De forma similar, si se hubieran hecho otras hipótesis respecto al valor de λ , se habrían obtenido sendas soluciones adicionales, correspondientes como se ha dicho a m_2 o m_3 en el centro. Estas soluciones constituyen tres de los llamados «puntos de Lagrange».

Para fijar ideas, pongamos como ejemplo el caso en que sea $m_2 = m_3 = m$, $m_1 = M'$. Es fácil comprobar que $\lambda = 2$ es una solución, que corresponde al caso trivial de dos cuerpos iguales, describiendo órbitas simétricas respecto de un tercero M' , equidistante de los dos.



Figura 5.15: *Posición de equilibrio en el movimiento alineado.*

Sin embargo, se puede demostrar que estas órbitas serían *inestables*⁶. Caso de existir una pequeña perturbación, lo que en la práctica es inevitable, se perdería la posición de equilibrio.

5.7.3. Movimiento Equilátero

Investigamos ahora la posibilidad de que los tres cuerpos se encuentren formando un triángulo equilátero, de lado $a(t)$ (variable con el tiempo).

Se verificará:

$$a(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$

Particularizando en las ecuaciones diferenciales (5.28), (5.29), los términos entre paréntesis se anulan, quedando:

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{GM\mathbf{u}}{a^3}; \quad \ddot{\mathbf{v}} = -\frac{GM\mathbf{v}}{a^3}.$$

Estas ecuaciones corresponden a una atracción gravitatoria desde m_3 como si fuera un punto fijo con la masa total M . Por tanto, m_1 y m_2

⁶ véase por ejemplo E. Neal Moore: *Theoretical Mechanics* (Cap. 4), Wiley, 1983

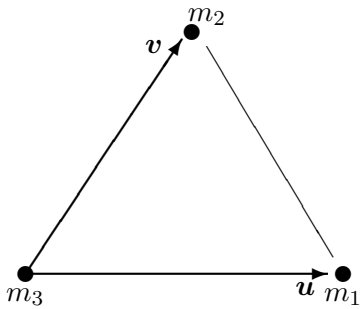


Figura 5.16: *Movimiento ternario equilátero*

describirán elipses en torno a m_3 . El período de este movimiento es:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{GM}}.$$

Existen dos posiciones de equilibrio posibles, según que m_2 esté a un lado o a otro del eje $m_1 - m_3$. Estas dos soluciones, al igual que las tres antes obtenidas para el movimiento alineado, son también puntos de Lagrange. En total existen pues cinco puntos de Lagrange, soluciones del sistema ternario.

Se puede probar por métodos de perturbaciones⁷ que estas nuevas configuraciones de equilibrio son *estables* tan sólo bajo ciertas condiciones.

En concreto, para:

$$m_1 \ll m_2; \quad m_1 \ll m_3,$$

es decir, si una masa es mucho más pequeña que las otras dos (lo que se llama el problema restringido de tres cuerpos), y además $m_3 \leq 4\% m_2$, la estructura equilátera se mantiene estable. Este podría ser, por ejemplo, el caso de $m_1 =$ satélite artificial, $m_3 =$ Luna, $m_2 =$ Tierra, en cuyo caso se verifican las condiciones anteriores entre las masas. Sería necesario obviamente para obtenerse este movimiento el partir de las condiciones iniciales adecuadas.

En el sistema solar existe un ejemplo real de movimiento equilátero, el de los asteroides Troyanos. Estos están situados en el cinturón de asteroides del sistema solar, y se concentran en dos grupos que forman aproximadamente triángulos equiláteros junto con el Sol y Júpiter. La masa de los asteroides es despreciable frente a las de Júpiter y el Sol, y la de Júpiter es menor que el 4% de la del Sol.

⁷Ver J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos* (cap.20).

5.8. Problemas propuestos.

Problema 5.1. Un satélite artificial de masa $m = 1000$ kg sigue una órbita elíptica alrededor de la tierra, con semieje mayor $a = 10000$ km y excentricidad $e = 0,01$. En el apogeo le alcanza otro satélite de masa $M = 5000$ kg, teniendo la velocidad de ambos cuerpos antes del contacto la misma dirección. El proceso de acoplamiento es instantáneo y ambos satélites quedan perfectamente unidos después de él. Calcular la velocidad relativa necesaria entre ambos satélites para conseguir que la órbita del satélite conjunto resultante sea circular.

Nota: el radio de la tierra es $R = 6366$ km.

(Examen final, 14/6/1993)

Problema 5.2. Dos satélites artificiales S_1 y S_2 se encuentran en órbitas coplanarias, siendo la del primero circular, de radio $2R$, y la del segundo elíptica, de semieje mayor $a = 5R$ y excentricidad $e = 3/5$. R es el radio de la tierra que habrá de suponerse perfectamente esférica. Inicialmente S_2 se encuentra en su perigeo y S_1 en oposición respecto de él, con referencia al centro de la tierra. En ese instante inicial en el satélite S_1 se reduce la velocidad (sin cambio de dirección) de forma que esta reducción representa el mínimo indispensable para que alcance la superficie terrestre en la nueva órbita. Se pide:

- determinar el tiempo que tarda en producirse el contacto de S_1 con la superficie terrestre;
- ¿podrá ser observado el impacto desde S_2 ? (lógicamente la tierra debe considerarse como opaca)

(Examen final, 30/1/1999)

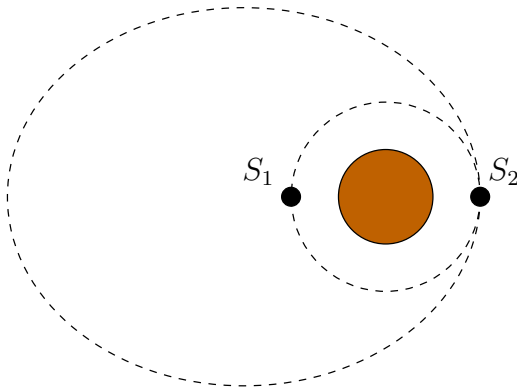


Figura 5.17: *Problema 5.2; situación inicial de los satélites y órbitas, antes de la reducción de velocidad de S_1*

Problema 5.3. Dos partículas de masa m cada una están unidas mediante un hilo inextensible, de forma que una de ellas desliza sobre una mesa horizontal lisa y la otra cuelga del hilo que pasa a través de un pequeño orificio practicado en la mesa. Inicialmente la partícula sobre la mesa se halla a distancia b del orificio, moviéndose con velocidad v_0 normal al hilo, mientras que la otra está en reposo en la vertical del hilo. Se pide:

- ecuación diferencial del movimiento en función de la distancia r de la partícula superior al orificio;
- tensión del hilo en función de r ;
- valor que habría de tomar v_0 para que la masa inferior permanezca inmóvil.

(Examen parcial 9/2/1996)

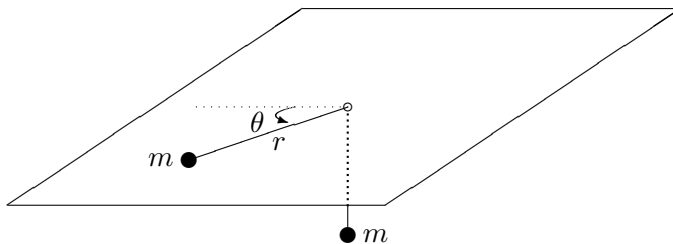


Figura 5.18: *Problema 5.3*

Problema 5.4. Un proyectil se lanza desde la superficie de la tierra con una determinada velocidad inicial v_0 . Despreciando la resistencia de la atmósfera, calcular la velocidad necesaria para que alcance una órbita elíptica de semieje mayor 80000 km. Calcular asimismo la excentricidad de la órbita si la dirección de lanzamiento forma un ángulo de 45° con la vertical. Se puede suponer que la tierra es esférica, con perímetro máximo 40000 km).

(Examen final 20/6/1994)

Problema 5.5. El radio de la órbita de Venus es 0,72 veces el de la Tierra (se suponen ambas órbitas circulares y coplanarias). Una nave espacial viaja de la Tierra a Venus siguiendo una órbita elíptica que es tangente a cada una de las órbitas planetarias y es la órbita de viaje más económica (órbita de transferencia). Se pide:

- Hallar la velocidad relativa de la nave respecto a la Tierra justo después del lanzamiento, y respecto a Venus justo después de llegar a su órbita, despreciando en cada caso la atracción gravitatoria del planeta. (Velocidad orbital terrestre = 30 Km/s).

- b. Hallar el tiempo necesario para realizar el viaje en las condiciones anteriores.
- c. ¿En que parte de su órbita respecto a la tierra debe estar Venus en el momento del lanzamiento para asegurar que estará en el sitio correcto cuando llegue la nave?.

(Examen final 20/6/1995)