

Capítulo 6

Teoremas Generales de Dinámica de Sistemas.

Al estudiar los sistemas con varias partículas surgen varios elementos adicionales, como son los enlaces o ligaduras entre puntos, tanto internos al sistema como externos, y las fuerzas interiores. Uno de los casos más representativos es el de los sistemas rígidos, con enlaces de distancia constante entre partículas.

En principio, la aplicación de las leyes de Newton se hará realizando la suma para todas las partículas, obteniendo así leyes globales en función de las magnitudes cinéticas resultantes o suma para todo el sistema. A la hora de obtener estas resultantes convendrá tener en cuenta las interacciones entre partículas del sistema.

Un caso especial es el principio del momento cinético, que de manera estricta no se deduce de las leyes de Newton, sino que son necesarias hipótesis adicionales. Este principio es debido a Euler.

Adicionalmente, introduciremos los métodos de trabajos virtuales, de gran potencia para plantear las ecuaciones de la estática o de la dinámica directamente para el conjunto del sistema.

6.1. Morfología de los Sistemas

Antes de desarrollar los principios y teoremas fundamentales, es conveniente definir primero algunos conceptos y elementos básicos que se emplearán en el estudio de los sistemas de varias partículas.

6.1.1. Sistema mecánico

Se llama así a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales queremos estudiar su movimiento. En el estudio de un sistema mecánico se prescinde pues de otras características físicas como la carga eléctrica, color, temperatura, . . .

En el capítulo 2 se estudió el tipo de sistema más simple, reducido a una sola partícula, mientras que en el capítulo 5 se analizaron sistemas formados por 2 ó 3 partículas bajo fuerzas centrales. Los cuerpos que observamos a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como formado por varias partículas.

Se llama configuración de un sistema a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado. Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros, según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa tres parámetros: las coordenadas cartesianas, (x, y, z) . Un sistema de n partículas libres queda definido por $3n$ parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración será menor. Se denominan *grados de libertad* de un sistema al conjunto mínimo de parámetros necesario para definir unívocamente la configuración del mismo, y que puedan variarse de manera independiente (es decir, sin ecuaciones de ligadura).

6.1.2. Fuerzas

Las fuerzas ejercidas sobre las partículas de un sistema son las causantes de la variación del movimiento de las mismas. Podemos clasificarlas atendiendo a varios criterios:

- *Exteriores*, si son ejercidas por agentes externos al sistema, o *interiores* en caso contrario. En este último caso, tanto la acción como la reacción se producen sobre partículas del propio sistema.
- *Activas* o *Reactivas*, según que actúen «motu proprio», o bien como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir, en cuyo caso sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento. Estas últimas se llaman también fuerzas de enlace.

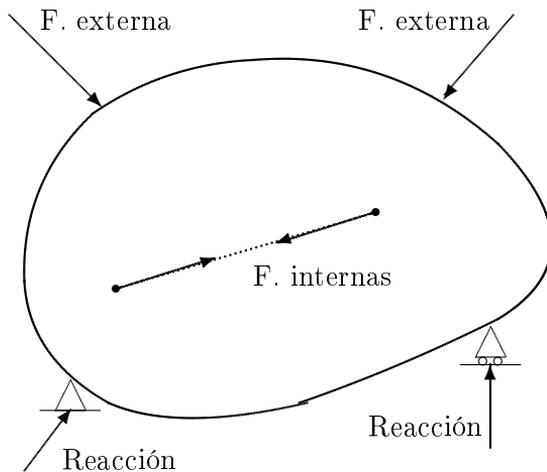


Figura 6.1: Tipos de fuerzas en un sistema

6.1.3. Enlaces

La existencia de enlaces o ligaduras impone restricciones al movimiento de las partículas, reduciendo el número de grados de libertad con respecto al caso en que todas las partículas fuesen libres. El número de grados de libertad se verá reducido, respecto del caso sin ligaduras, por el número de ecuaciones de enlace independientes.

Los enlaces se pueden clasificar, según diversos criterios, en:

- *Exteriores*, para las ligaduras con puntos externos, e *interiores*, para las ligaduras entre puntos del mismo sistema.
- *Lisos* (no disipativos) y *rugosos* (disipativos), atendiendo a que las fuerzas de enlace disipen o no energía para los movimientos permitidos por los mismos (figura 6.2). Se entiende que para que tenga sentido hablar de enlace liso o rugoso, éste debe permitir algún movimiento, pues en caso de restricción total no cabe esta clasificación.
- *Holónomos* y *Anholónomos*. Se consideran holónomos cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas y el tiempo exclusivamente:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0. \quad (6.1)$$

A su vez, los enlaces holónomos se denominan *esclerónomos* si no dependen del tiempo, y *reónomos* en caso contrario (figura 6.3).

Los enlaces anholónomos son en general todos aquellos que no son holónomos, no pudiendo expresarse mediante ecuaciones del tipo (6.1).

El caso más usual de enlace anholónomo es aquél que depende también de la velocidad, mediante relaciones del tipo:

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0. \tag{6.2}$$

El caso más sencillo es el de expresiones lineales en $\dot{\mathbf{r}}_i$, del tipo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + b = 0$$

pudiendo ser \mathbf{a}_i y b funciones de la posición ($\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{r}_i)$, $b = b(\mathbf{r}_i)$)

- *Unilaterales y bilaterales.* Los unilaterales se definen mediante desigualdades, por ejemplo (figura 6.4):

$$z \geq 0,$$

implicando restricción en un sentido tan sólo. Por el contrario, los bilaterales implican restricción en ambos sentidos.

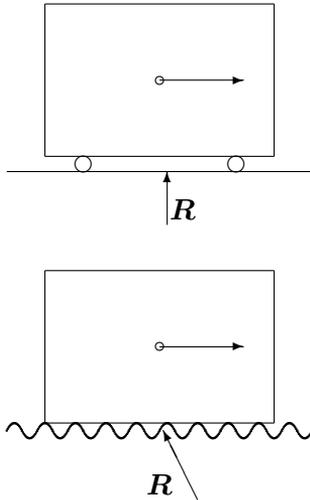


Figura 6.2: Enlaces liso y rugoso; para el movimiento permitido por el enlace (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

EJEMPLO 6.1: Establecer los enlaces internos de un sólido rígido (considerado como un medio continuo), obteniendo el número de grados de libertad del mismo.

Solución. La hipótesis de medio continuo implica que es infinitamente subdivisible, constando de un conjunto infinito de partículas. En principio, esto

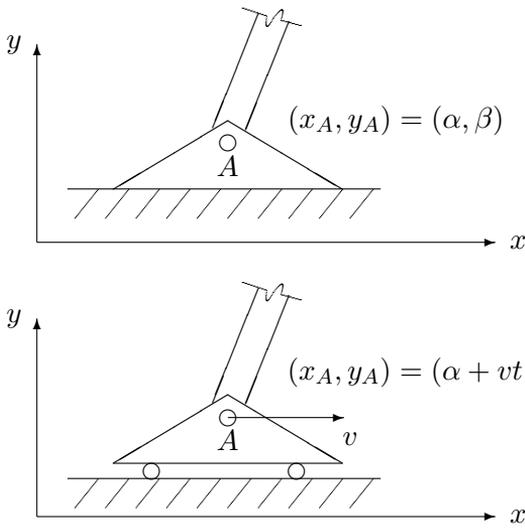


Figura 6.3: *Enlaces holónomos; a) esclerónomo (no depende del tiempo), b) reónomo (dependiente del tiempo o enlace móvil).*

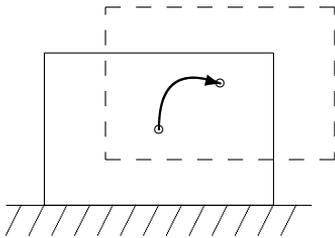


Figura 6.4: *Enlace unilateral, que permite el movimiento vertical en un sólo sentido.*

conllevaría asimismo infinitos grados de libertad. Sin embargo, las ligaduras internas del sólido obligan a que se mantenga constante la distancia entre dos partículas cualesquiera; a su vez, esto da lugar a infinitas coacciones. El número de grados de libertad no se puede obtener pues directamente, ya que resultaría indeterminado ($\infty - \infty$).

Para determinar el número de grados de libertad del sólido podemos basarnos en la descripción que sigue de su movimiento.

- Elegimos una partícula A cualquiera (figura 6.5); su posición estará definida por tres parámetros: sus tres coordenadas cartesianas, (x_A, y_A, z_A) .
- Una segunda partícula B , al estar obligada a mantener la distancia \overline{AB} , vendrá definida por dos parámetros adicionales (por ejemplo dos ángulos en esféricas respecto de A : φ_B, λ_B).
- Definida la posición de las dos partículas A y B , una tercera partícula C precisa de un único parámetro más para definir su posición, por ejemplo, el ángulo de giro alrededor del eje AB , θ_C .

Cualquier otra partícula del sólido tiene ya definida su posición al estar definidas A , B y C . Por tanto no aportan grados de libertad adicionales.

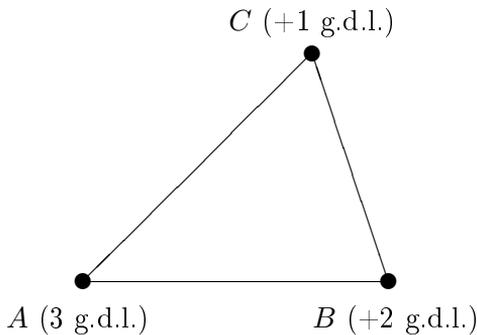


Figura 6.5: Grados de libertad del sólido rígido. Su movimiento queda determinado por el del triángulo rígido ABC , con $3 + 2 + 1 = 6$ g.d.l.

Así, el número de grados de libertad de un sólido rígido es $3 + 2 + 1 = 6$. Existen múltiples maneras de elegir estos 6 g.d.l., aunque la descomposición usual es tomar las tres coordenadas de su centro de masas, y tres ángulos o parámetros que definan la orientación del sólido, como los ángulos de Euler (se verán en el capítulo 8). Es posible también escoger otros conjuntos de parámetros, según convenga en cada caso. \square

EJEMPLO 6.2: Expresar los enlaces de un disco vertical de radio a que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que se mantiene vertical en todo instante, admitiendo pivotamiento libre.

Solución. Sea el plano horizontal Oxy (figura 6.6). Denominamos (x, y, z) a las coordenadas del centro del disco, ψ al ángulo que forma el eje del disco (perpendicular al mismo por su centro) con la horizontal, θ al ángulo que forma este mismo eje con la dirección Ox del plano horizontal, y φ al ángulo girado por el disco alrededor de su propio eje.

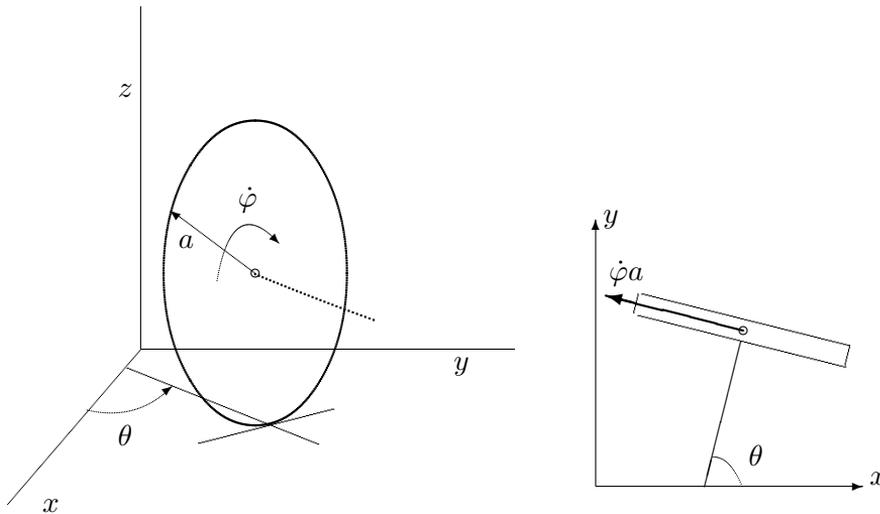


Figura 6.6: *Movimiento de un disco vertical rodando sin deslizar sobre un plano. La velocidad del centro del disco vertical tiene las componentes $(-\dot{\varphi}a \text{ sen } \theta, \dot{\varphi}a \text{ cos } \theta)$ sobre las direcciones horizontales x e y .*

Los enlaces son cuatro: dos holónomos,

$$\begin{aligned} z &= a \quad (\text{altura constante del centro del disco}), \\ \psi &= 0 \quad (\text{disco vertical}), \end{aligned}$$

y dos no holónomos,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\varphi}a \text{ sen } \theta \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}a \text{ cos } \theta. \end{aligned}$$

En un caso general en que $\theta(t)$ no sea constante, éstas últimas relaciones no se pueden integrar, siendo por tanto enlaces anholónomos. El sistema

queda definido por cuatro parámetros (x, y, θ, φ) y dos ecuaciones de ligadura independientes, es decir, tiene $6 - 4 = 2$ grados de libertad.

En el caso particular en que fuese $\theta = \text{cte.}$, el disco rodaría apoyado sobre una línea recta, dentro de un plano vertical fijo. Tomando el eje Ox según la dirección $\theta = 0$, resulta $\dot{\varphi}a = -\dot{x} \Rightarrow x = -\varphi a$. La ecuación es integrable y el enlace sería anholónomo sólo en apariencia. \square

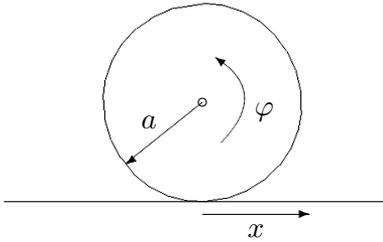


Figura 6.7: Disco rodando con $\theta = \text{cte.}$; el movimiento equivale al movimiento plano de rodadura sobre una recta, con la ligadura holónoma $x = -\varphi a$.

EJEMPLO 6.3: Expresar los enlaces de una esfera rodando sobre sin deslizar sobre un plano, con pivotamiento libre.

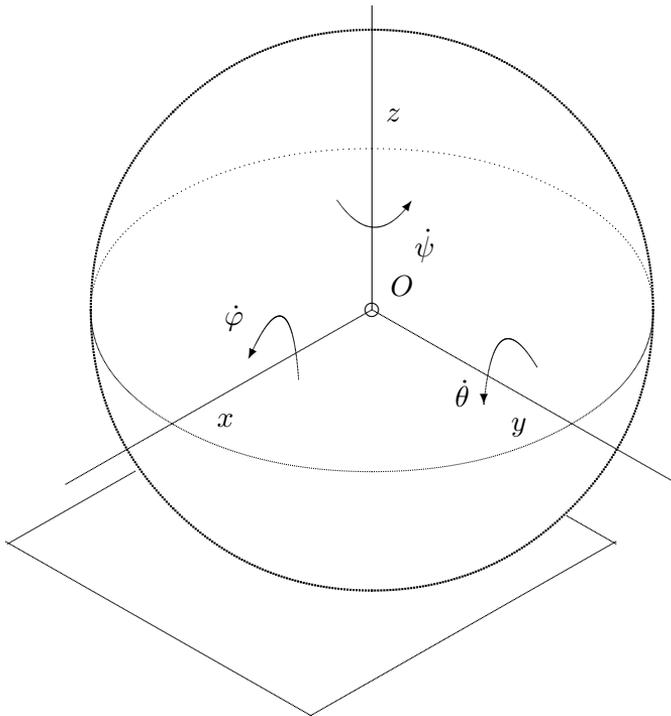


Figura 6.8: Componentes de la velocidad de rotación de una esfera rodando sin deslizar sobre un plano horizontal, según el triedro móvil $Oxyz$.

Solución. Tomamos unos ejes móviles $(Oxyz)$, de forma que O es el centro

de la esfera, Oz es un eje vertical, mientras que Ox y Oy pivotan con la esfera manteniéndose horizontales en todo momento. Por otra parte, consideramos también el triedro fijo $(O'XYZ)$, en el que podemos expresar las coordenadas del centro de la esfera (X_O, Y_O, Z_O) . El ángulo girado por pivotamiento (alrededor de Oz) lo llamaremos ψ . Denominamos $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ respectivamente a las componentes de la velocidad de rotación de la esfera según los ejes Ox y Oy .

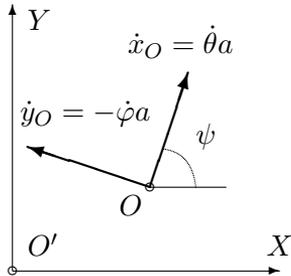


Figura 6.9: *Proyecciones de la velocidad del centro de la esfera en el plano horizontal.*

Los enlaces son:

$$\begin{cases} Z_O = a & \text{(holónimo)} \\ \dot{X}_O = \dot{\varphi}a \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta}a \operatorname{cos} \psi & \text{(anholónimo)} \\ \dot{Y}_O = -\dot{\varphi}a \operatorname{cos} \psi + \dot{\theta}a \operatorname{sen} \psi & \text{(anholónimo)} \end{cases}$$

La esfera posee por tanto $6 - 3 = 3$ grados de libertad, con dos enlaces anholónomos. □

6.2. Principios y Teoremas de la Dinámica de Newton-Euler

6.2.1. Principio de la Cantidad de Movimiento

Consideramos un sistema formado por un número finito de partículas, $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.^a ley de Newton) a cada partícula m_i del sistema, siendo \mathbf{F}_i la resultante de todas las fuerzas sobre dicha partícula,

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \tag{6.3}$$

Descompondremos las fuerzas en internas y externas al sistema:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int};$$

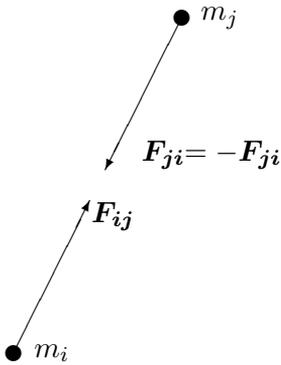


Figura 6.10: *Fuerzas internas centrales entre dos partículas \$m_i\$ y \$m_j\$ del sistema.*

las fuerzas internas sobre la partícula \$i\$, \$\mathbf{F}_i^{int}\$, son el resultado de las acciones del resto de las partículas \$j \neq i\$:

$$\mathbf{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

donde la nomenclatura \$\mathbf{F}_{ij}\$ indica la acción de \$m_j\$ sobre \$m_i\$. Por la ley de acción y reacción ó 3.ª ley de Newton, \$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}\$ (figura 6.10). Así, al sumar las ecuaciones (6.3) para todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan dos a dos, resultando:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Llamando \$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i\$ (resultante de fuerzas externas sobre el sistema), y \$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i\$ (cantidad de movimiento del sistema), resulta la expresión:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}.} \tag{6.4}$$

Expresión que se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, enunciándose como sigue:

«La derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores.»

Podemos obtener otra expresión equivalente para esta ecuación a partir del movimiento del centro de masas \$G\$. Se define éste como:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}, \tag{6.5}$$

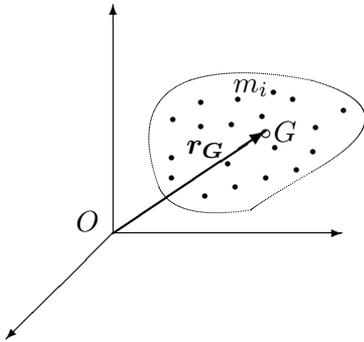


Figura 6.11: Centro de masas G de un sistema de varias partículas.

Siendo $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$, masa total del sistema.

Derivando (6.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P} \\ &= M \mathbf{v}_G, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $\mathbf{v}_G \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}_G/dt$ es la velocidad del centro de masas. Sustituyendo en (6.4), y llamando $\mathbf{a}_G \stackrel{\text{def}}{=} d^2\mathbf{r}_G/dt^2$ a la aceleración del mismo, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G} \quad (6.7)$$

Este resultado se denomina «teorema del movimiento del centro de masa», constituyendo una expresión alternativa para la ecuación (6.4). Se lee de la siguiente manera:

«Se puede estudiar el movimiento del Centro de Masas G de un sistema como si fuera una partícula, concentrando toda la masa del sistema, sometida a la resultante de fuerzas exteriores sobre el sistema.»

Como corolario se puede deducir el teorema de conservación correspondiente:

$$\text{si } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_G = \text{cte} \quad (6.8)$$

«Si la resultante de las fuerzas exteriores sobre el sistema es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva, por lo que el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo y uniforme.»

La condición de conservación se cumple obviamente para un sistema aislado, o en cualquier otro que aún sin estar aislado esté sometido a un conjunto de fuerzas con resultante nula. A estos efectos conviene recordar lo estudiado para el sistema binario en el apartado 5.1.

6.2.2. Principio del Momento Cinético

La ecuación de balance del momento cinético (2.4) aplicada a una partícula m_i del sistema se expresa como:

$$\mathbf{M}_O^i = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O^i, \quad (6.9)$$

donde $\mathbf{M}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$, y $\mathbf{H}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ (i no sumado). Si sumamos (6.9) para todo el sistema, realizando la descomposición habitual entre fuerzas internas y externas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O^i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \left(\overbrace{\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}^{\mathbf{F}_i^{\text{int}}} \right) \quad (6.10)$$

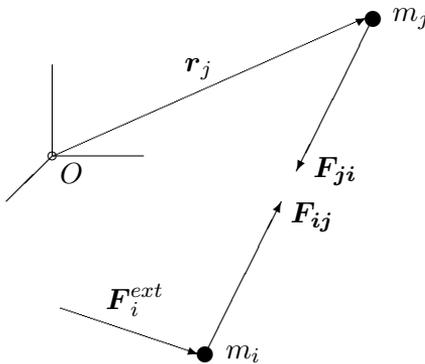


Figura 6.12: Fuerzas internas y externas sobre dos partículas cualesquiera del sistema.

Admitiremos que se cumple la ley de acción y reacción con su enunciado más fuerte: no sólo son \mathbf{F}_{ij} y \mathbf{F}_{ji} iguales y opuestas, sino que supondremos que son *fuerzas centrales*, siguiendo la misma recta de acción que une m_i con m_j :

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad (r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|). \quad (6.11)$$

Entonces, para dos partículas cualesquiera:

$$\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge (-\mathbf{F}_{ji}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (i, j \text{ no sumados})$$

De esta forma, la suma de los momentos de las fuerzas interiores en (6.10) se anula, al cancelarse dos a dos los sumandos. Definiendo el momento cinético del sistema respecto a O :

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{H}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

y el momento de las fuerzas exteriores respecto de O :

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{M}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O} \quad (6.12)$$

Esta expresión, que llamaremos también «ecuación de balance del momento cinético», se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, con el siguiente enunciado:

«El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto O fijo es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto.»

Como corolario, cuando $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, se obtiene el teorema de conservación correspondiente:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad (6.13)$$

La constancia de \mathbf{H}_O puede ocurrir en los casos siguientes:

- Sistema aislado, sobre el que no actúa ninguna fuerza exterior. El momento cinético del sistema respecto de cualquier punto se conserva.
- Fuerzas centrales (todas dirigidas hacia un mismo punto fijo), en cuyo caso se conserva el momento cinético respecto del centro de fuerzas, aunque no necesariamente respecto de otros puntos distintos.

En lo anterior se ha admitido que las fuerzas internas son todas centrales (6.11). Las interacciones de tipo gravitatorio o electrostático cumplen muy aproximadamente esta condición, pero otro tipo de fuerzas como las electrodinámicas no la cumplen necesariamente. De hecho, en sistemas con cargas

eléctricas móviles, se puede violar la ley de acción y reacción, tanto en su enunciado fuerte (fuerzas centrales) como en su enunciado más débil. En el caso de un sólido las interacciones entre partículas se deben a fuerzas de contacto, de naturaleza compleja, que tampoco resulta evidente que deban ser centrales. Sin embargo, en los casos en los que existan fuerzas internas del tipo mencionado, generalmente se puede encontrar una generalización de \mathbf{P} ó de \mathbf{H}_O que verifica los teoremas de conservación enunciados. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que, independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, se verifica el principio del momento cinético expresado por (6.12). Puesto que esta afirmación se postula como base de partida, es más apropiado referirse a ella como «principio» que como «teorema».

Conviene realizar una aclaración importante, previniendo del grave error que resultaría de confundir en (6.12) la resultante de los momentos, $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}$, con el momento de la resultante, que si suponemos a ésta aplicada en G , sería $\mathbf{r}_G \wedge (\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}) \neq \mathbf{M}_O$. De caer en esta confusión, se llegaría a contradicciones tan graves como que un sistema sometido a un par de fuerzas (que tiene resultante nula) no se movería.

Momento cinético en un punto cualquiera Q .— Tanto el momento cinético de un sistema como el momento de las fuerzas tienen la naturaleza de campos de momentos, es decir, conocidos el momento en un determinado punto de referencia y la resultante, se puede expresar el momento en cualquier otro punto a partir de la ecuación característica del campo de momentos, con una expresión análoga a la (4.10) del campo de velocidades del sólido.

En efecto, calculemos el momento cinético en un punto cualquiera Q , no necesariamente fijo, definido por el vector posición \mathbf{r}_Q . La resultante del campo de vectores es en este caso $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G$. Operando,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{r}_Q \wedge \underbrace{\left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right)}_{\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G} \\ &= \mathbf{H}_O + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_Q. \end{aligned} \tag{6.14}$$

La expresión anterior es generalizable para dos puntos (P, Q) cualesquiera,

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_P + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_{PQ}.$$

Análogamente, para el momento de las fuerzas las expresiones son

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \mathbf{M}_O + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_Q \\ &= \mathbf{M}_P + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_{PQ}.\end{aligned}$$

Sin embargo, sería un grave error aplicar la ecuación de balance del momento cinético (6.12) en un punto cualquiera; esta ecuación sólo es válida si O es un punto fijo¹, ya que la deducción anterior se hizo basada en que constituye el origen de un sistema de referencia inercial. En efecto, si derivamos \mathbf{H}_Q dado por la expresión (6.14):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q &= \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \wedge \mathbf{r}_Q + \mathbf{P} \wedge \mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{M}_O + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_Q + \mathbf{P} \wedge \mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{M}_Q + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_Q.\end{aligned}$$

Comprobamos que en la ecuación de balance aparece un término corrector $M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_Q$ que no tiene porqué anularse en un caso general. Una excepción importante es el caso del centro de masas, como se verá más adelante (apartado 6.3).

6.2.3. Teorema de la Energía Cinética

La ecuación de la energía cinética (2.6) aplicada a cada partícula m_i expresa:

$$dW_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) \quad (i \text{ no sumado})$$

Al igual que en los casos anteriores, para obtener las magnitudes cinéticas del sistema conjunto, sumamos para todas las partículas del mismo:

$$\begin{aligned}T &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad dT = d\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right] \\ dW &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{int}},\end{aligned}$$

¹El significado de «fijo» en esta expresión se debe entender en el sentido de la transformación de Galileo; cualquier punto que pueda ser el origen de un sistema inercial podrá ser considerado fijo. Si se trata de un punto con velocidad no nula, pero que se mantiene constante, todo lo dicho es válido, pero refiriendo las velocidades para el cálculo de (6.9) a un sistema con origen en dicho punto.

obteniéndose finalmente:

$$dT = dW$$

En las ecuaciones de la cantidad de movimiento (6.4) y del momento cinético (6.12), el efecto de las fuerzas interiores desaparecía al sumar para todo el sistema. Sin embargo, en un caso general el trabajo debido a las fuerzas interiores no se anula:

$$dW^{int} \neq 0.$$

Merece la pena analizar de forma detallada el trabajo de las fuerzas interiores comprender mejor el significado de la observación anterior. Sean dos partículas cualesquiera del sistema, m_i y m_j , situadas inicialmente en A y B (figura 6.13). Suponemos que al cabo de un movimiento elemental arbitrario están situadas en dos puntos cualesquiera A' y B' . Podemos descomponer el movimiento elemental total en:

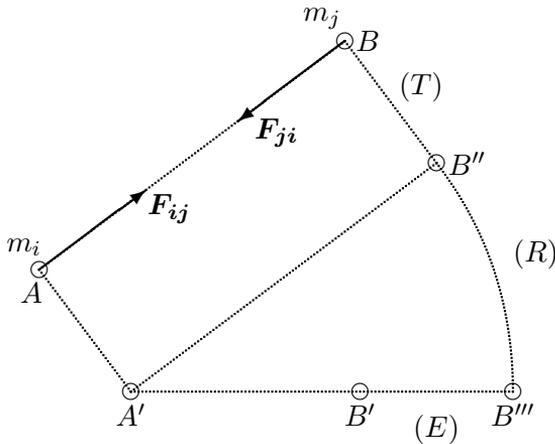


Figura 6.13: Descomposición de un movimiento elemental general en traslación, rotación y estiramiento.

1. Traslación (T) pasando A a A' y B a B'' :

$$d\mathbf{r}_i^T = d\mathbf{r}_j^T$$

$$dW^T = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i^T + (-\mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i^T = 0$$

2. Rotación (R) alrededor de A' , en el plano definido por $A'B''B'$, quedando fijo m_i y pasando m_j a B''' :

$$d\mathbf{r}_j^R = dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) ; \quad d\mathbf{r}_i^R = \mathbf{0}$$

$$dW^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot [dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] = 0$$

donde se ha supuesto que \mathbf{F}_{ij} lleva la dirección de $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$, es decir, se trata de fuerzas centrales.

3. Estiramiento (E), quedando fija m_i y pasando finalmente m_j a B' :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^E; \quad d\mathbf{r}_i^E &= \mathbf{0}, \\ dW^E &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^E \neq 0. \end{aligned}$$

En resumen, los movimientos de traslación y rotación son movimientos de sólido rígido y no producen trabajo de las fuerzas interiores. Por el contrario, las deformaciones internas (distorsiones o estiramientos), que no corresponden a movimientos de sólido rígido, sí producen un trabajo neto de las fuerzas interiores.

En definitiva, se puede escribir:

$$\boxed{dT = dW = dW^{int} + dW^{ext}} \quad (6.15)$$

«La variación de la energía cinética conjunta de un sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas, tanto internas como externas.»

La consideración del trabajo de las fuerzas interiores es imprescindible para el cálculo de estructuras y la mecánica de los medios continuos deformables, en los que la deformación viene gobernada por la energía interna de deformación acumulada. Los métodos y teoremas energéticos proporcionan algunos de los procedimientos más potentes de cálculo en este caso.

Si todas las fuerzas (tanto externas como internas) provienen de un potencial independiente del tiempo, se verificará:

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV,$$

deduciéndose entonces de (6.15) el teorema de conservación de la energía:

$$dT + dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = T + V = \text{cte.}} \quad (6.16)$$

Conviene recalcar que en esta ecuación la energía potencial V corresponde a la *Energía Potencial Total*, derivándose de ella tanto las fuerzas interiores como las exteriores. Como ejemplo, en el caso de las estructuras o de los medios elásticos deformables, V debe incluir tanto el potencial de las cargas externas aplicadas como la energía de deformación debida a las fuerzas interiores.

Si las fuerzas internas en el sistema son centrales en el sentido de (6.11), según se vió en el apartado 5.2.1, provienen de un potencial expresado por (5.12):

$$V_{ij}(r_{ij}) = - \int F_{ij}(\rho) d\rho;$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (6.17)$$

Es posible demostrar en este caso que el potencial conjunto de las fuerzas interiores es

$$V^{int} = \sum_i \sum_{j>i} V_{ij}. \quad (6.18)$$

(La limitación $j > i$ sirve para no sumar dos veces el potencial de interacción entre cada dos partículas.) De esta forma la ecuación (6.15) se convierte en

$$d(T + V^{int}) = dW^{ext}.$$

En este caso, si se trata de un *sistema aislado* se verificaría

$$\boxed{E = T + V^{int} = \text{cte.}} \quad (6.19)$$

EJEMPLO 6.4: Potencial de fuerzas internas de un sistema de partículas discretas, con atracción lineal en función de la distancia entre cada dos partículas.

Solución. Se trata de fuerzas análogas a resortes lineales ideales interpuestos entre cada dos partículas, siguiendo el esquema de fuerzas centrales. Suponiendo en primer lugar que la constante de todos estos resortes es la misma, el potencial de uno de ellos es

$$V_{ij} = \frac{1}{2}kr_{ij}^2,$$

siendo r_{ij} la distancia entre la pareja de puntos (i, j) . Teniendo en cuenta que $\partial r_{ij}/\partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$, la fuerza ejercida sobre i por j se obtiene siguiendo (6.17):

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = k\mathbf{r}_{ij}.$$

La energía potencial total para todo el sistema, según (6.18), es

$$V^{int} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2}kr_{ij}^2.$$

Un caso particular sería aquél en que las constantes de atracción entre cada dos partículas son proporcionales al producto de las masas,

$$\mathbf{F}_{ij} = \alpha m_i m_j \mathbf{r}_{ij}.$$

Sumando todas las fuerzas internas sobre una partícula dada,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \alpha m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \alpha m_i M (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_i)$$

siendo $M = \sum_k m_k$ la masa total. Se obtiene por tanto una fuerza de atracción de cada partícula hacia el centro de masas del conjunto. El movimiento de cada partícula relativo a dicho centro de masas sería una órbita elíptica con centro en él (ver apartado 3.2). Es trivial comprobar que la suma de todas las fuerzas interiores dadas por la anterior expresión se anula. \square

EJEMPLO 6.5: Energía potencial de deformación para fuerzas elásticas en una barra recta, como medio continuo, de longitud L , sección transversal A y módulo de elasticidad E .

Solución. Denominamos x a la coordenada según la barra, $x \in [0, L]$ (figura 6.14). Suponemos que cada punto de la barra puede sufrir desplazamientos axiales, definidos por $u(x)$. Si imaginamos una *rebanada* de la barra, entre dos puntos x y $x + dx$, el desplazamiento relativo entre ambas caras será $(u + du) - u = du$. Se denomina *deformación* unitaria

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{du}{dx}.$$

Esta deformación provoca en el material una fuerza interna recuperadora,

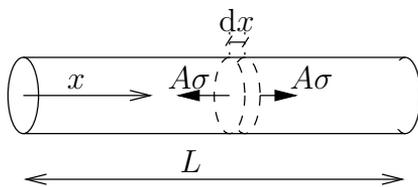


Figura 6.14: Barra recta continua sometida a deformación axial y tensiones internas σ

F^{int} , que se opone a la misma. La magnitud de dicha fuerza por unidad de área se denomina *tensión*,

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F^{\text{int}}}{A}.$$

En un material elástico lineal, se admite que la tensión depende linealmente de la deformación,

$$\sigma = E\varepsilon,$$

siendo E denominado *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*.

Llamemos dU al trabajo realizado por las tensiones para alcanzar una deformación ε en una rebanada $A dx$. Éste se calcula integrando a lo largo

del proceso de deformación de la misma, variando el desplazamiento relativo entre ambas caras desde 0 hasta du . Para un incremento infinitesimal del mismo, $\delta(du)$, el trabajo elemental es

$$\delta(dU) = F^{\text{int}} \delta(du) = -E\varepsilon A \delta(du)$$

y en función de ε puede escribirse

$$\delta(dU) = -E\varepsilon A \delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx = -E\varepsilon \delta\varepsilon A dx.$$

Llamando a la densidad de energía potencial de las fuerzas interiores por unidad de volumen

$$\widehat{V} = -\frac{1}{A} \frac{dU}{dx}$$

resulta

$$\delta\widehat{V} = E\varepsilon \delta\varepsilon.$$

Integrando a lo largo del proceso de deformación de la rebanada,

$$\widehat{V} = \int_0^\varepsilon E\varepsilon \delta\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \widehat{V} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2.$$

Para el conjunto de la barra, integramos a lo largo de la misma,

$$V^{\text{int}} = \int_0^L \widehat{V}(x) A dx = \int_0^L \frac{1}{2} E\varepsilon^2 A dx.$$

En el caso particular de que la deformación sea homogénea, $\varepsilon(x) = \Delta L/L$ (cte.), resulta

$$V^{\text{int}} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 AL = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (\Delta L)^2,$$

es decir, la barra se comportaría como un resorte de constante equivalente EA/L . \square

6.2.4. Teorema del Virial

Los tres principios anteriores (cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética) establecen el balance de las magnitudes mediante ecuaciones diferenciales en el tiempo. En contraste con éstos, el teorema del virial no se expresa como una ecuación diferencial, sino como una relación entre valores medios a lo largo del tiempo.

Comenzamos por definir una función escalar G , característica del movimiento en un instante dado:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

donde $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} m_i \mathbf{v}_i$, y el sumatorio se extiende a todas las partículas del sistema. Derivando esta expresión respecto del tiempo:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2T$$

Calculemos ahora la media temporal de esta derivada, que denotaremos por una raya superpuesta, $\overline{dG/dt}$. Para ello integramos sobre un intervalo $[0, \tau]$ y dividimos por la duración del mismo:

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} + 2\overline{T}.$$

Supongamos ahora que el movimiento es periódico, siendo τ el período del mismo. Se cumplirá entonces $G(0) = G(\tau)$, por lo que resulta:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} \quad (6.20)$$



La expresión a la derecha del signo $=$ se denomina «virial». Por lo tanto, la ecuación anterior se lee:

«Para un movimiento periódico, la media de la energía cinética sobre un periodo es igual al virial del sistema.»

Es posible generalizar este resultado para un movimiento que no sea periódico, con tal de que esté acotado. En efecto, en este caso la media temporal

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau},$$

al tener G un valor acotado, tiende a cero para valores de τ suficientemente grandes. En este caso, se cumplirá la relación (6.20) de manera aproximada, siendo exacta en el límite.

EJEMPLO 6.6: Aplicar el teorema del virial al caso de una partícula sometida a la acción gravitatoria.

Solución. El virial es en este caso:

$$-\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2} \overline{\left[-\frac{GMm}{r^2} r \right]} = -\frac{1}{2} \overline{V}$$

y aplicando (6.20):

$$\boxed{\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}.}$$

En efecto, según vimos en el capítulo 5, aplicando las ecuaciones (5.19) y (5.22) para la órbita elíptica se obtiene²:

$$V = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow \overline{V} = -\frac{GMm}{a};$$

$$T = E - V = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{r};$$

$$\overline{T} = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{a} = \frac{GMm}{2a} = -\frac{1}{2} \overline{V}, \quad \square$$

6.3. El Sistema del Centro de Masas

El sistema del centro de masas (S.C.M.) se define como un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas G y que no experimenta rotación. Si se caracteriza mediante un triedro de coordenadas cartesianas, las direcciones de las mismas serán fijas y paralelas al sistema inercial de partida (figura 6.15).

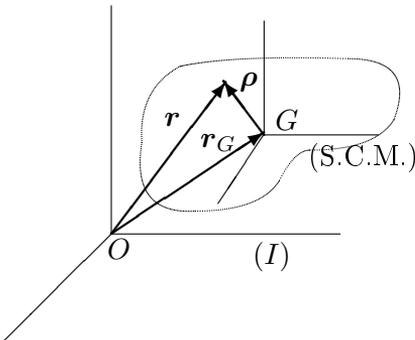


Figura 6.15: El sistema de referencia del centro de masas (S.C.M.), con origen en G y ejes paralelos al sistema inercial (I).

²La media temporal de $1/r$ en una órbita gravitatoria elíptica resulta ser, desarrollando la integral correspondiente, la inversa del semieje mayor, $1/\bar{r} = 1/a$. Sin embargo, si la media de r resulta $\bar{r} = a(1 + e^2/2)$ (consultar nota 3 al pie de la página 5.14).

Las expresiones de posición, velocidad y aceleración relativos al S.C.M. son respectivamente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_G, \\ \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_G, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_G.\end{aligned}$$

Para obtener $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ en estas expresiones, se ha derivado directamente de manera sucesiva la expresión de $\boldsymbol{\rho}$, sin resultar necesario emplear el término complementario de derivación $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ establecido en la ecuación (4.6). Esto se debe a que por su definición el S.C.M. no gira ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) anulándose entonces dicho término.

Sin embargo, debe quedar claro que, aunque el S.C.M. no gire, en un caso general puede tener aceleración de traslación ($\mathbf{a}_G \neq \mathbf{0}$), y que por lo tanto, *no se trata de un sistema inercial*³. A pesar de esto, su uso posee ventajas notables, ya que como veremos a continuación, se siguen cumpliendo los principios del momento cinético y de la energía cinética, exactamente como si se tratase de un sistema inercial. El principio de la cantidad de movimiento queda reducido a una igualdad trivial.

6.3.1. Cantidad de movimiento

En el S.C.M., la expresión de la cantidad de movimiento \mathbf{P} es:

$$\mathbf{P}^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \underbrace{\left(\sum_i m_i \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M} \mathbf{v}_G = \mathbf{0},$$

donde se ha empleado (6.6). Así, resulta la expresión trivial:

$$\boxed{\mathbf{P}^{SCM} = \mathbf{0}}$$

6.3.2. Momento cinético

El momento cinético en un punto cualquiera viene dado por la expresión (6.14). Aplicando esta ecuación al centro de masas G :

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G. \quad (6.21)$$

³Una excepción a esto sería el caso de un sistema aislado, en el que G se mueve con velocidad rectilínea y uniforme, ver ecuación (6.8).

Conviene resaltar que en esta expresión del momento cinético se emplean velocidades absolutas.

Sin embargo, para calcular el momento cinético relativo al S.C.M., además de tomar momentos respecto de G , debemos emplear también las velocidades \mathbf{v}_i relativas al S.C.M.:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G^{SCM} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \\ &= \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{H}_O} - \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_G}_{\mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G} - \underbrace{\mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G} + \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

Observamos pues que ambas expresiones resultan ser idénticas: $\mathbf{H}_G^{SCM} = \mathbf{H}_G$. Por tanto, a la hora de tomar momentos en G , no nos preocuparemos de este aspecto y escribiremos simplemente \mathbf{H}_G . Conviene advertir que esto no sucede en otros puntos distintos de G .

Derivando (6.21) respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O - \underbrace{\mathbf{v}_G \wedge M \mathbf{v}_G}_{=0} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{M \mathbf{a}_G}_{\mathbf{F}} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{F}$$

pero

$$\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{\left(\sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \right)}_{\mathbf{F}},$$

luego:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{M}_G} \quad (6.22)$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético (6.12) respecto del origen G del S.C.M., exactamente igual que si fuese inercial.

Por lo tanto, continuando con la discusión realizada al final del apartado 6.2.2, para aplicar la ecuación de balance del momento cinético (6.12), se debe tomar momentos bien respecto de un punto fijo O , o bien respecto del centro de masas G del sistema; En este último caso, las velocidades pueden ser las absolutas respecto de un sistema inercial, o las relativas al S.C.M., ya que según hemos visto ambas dan idéntico resultado.

Por el contrario, si empleamos un punto Q cualquiera, que no coincida necesariamente con G ni sea fijo, derivando la fórmula (6.14) resulta:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_G) = \underbrace{\mathbf{M}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{a}_G}_{\mathbf{M}_Q} - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = \mathbf{M}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G. \quad (6.23)$$

Es necesario pues añadir un término complementario $\mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$ respecto de las ecuaciones (6.12) ó (6.22). Por tanto, si se toman momentos respecto de otro punto Q , sólo se verificará la ecuación de balance del momento cinético (6.12) cuando se cumpla una de las condiciones siguientes:

- si el punto Q tiene velocidad nula, $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$;
- si el punto Q coincide con G , o por lo menos, su velocidad es paralela a la de G : $\mathbf{v}_Q \parallel \mathbf{v}_G$.

También podríamos haber calculado \mathbf{H}_Q^{SQ} empleando las velocidades en el «Sistema Q » (S.Q.), definido de forma análoga al S.C.M. como una referencia con origen en Q y ejes de direcciones fijas:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q^{SQ} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \wedge m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_Q) \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_Q - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{H}_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q. \end{aligned}$$

Observamos en primer lugar que $\mathbf{H}_Q^{SQ} \neq \mathbf{H}_Q$. Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q^{SQ} &= \frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q + \frac{d}{dt}[(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q] \\ &= \mathbf{M}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G + (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q \\ &= \mathbf{M}_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vemos que tampoco se cumple en este caso la ecuación de balance del momento cinético (6.12), debido al término complementario $(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q$, que sólo se anula si se verifica una de las condiciones siguientes:

- si el punto Q coincide con G : $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_G$;
- si el S.Q. es inercial: $\mathbf{a}_Q = \mathbf{0}$ (en este caso no basta que sea $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$, Q debe ser un punto fijo, es decir, que esté constantemente en reposo);

- si, sin ser el S.Q. inercial, la aceleración de Q está dirigida hacia G :
 $(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \parallel \mathbf{a}_Q$.

Como resultado de la discusión anterior se extrae una recomendación importante a efectos prácticos:

no conviene nunca aplicar la ecuación del momento cinético (6.12) en puntos que no sean o bien fijos, o bien el centro de masas.

La razón es que los términos correctores que habría que manejar en otro caso no tienen una interpretación física clara, siendo muy fácil que den lugar a confusiones.

A estos efectos es importante destacar que no es lo mismo un punto fijo que un punto que tenga velocidad nula en un instante (en este último caso el punto puede tener aceleración no nula, con lo que el término corrector en (6.24) sería no nulo). Otra posible fuente de error es confundir la velocidad de un punto definido por un criterio geométrico (velocidad de «sucesión»), con la velocidad del punto del sólido que coincide con él en un instante dado⁴.

6.3.3. Energía cinética

Calculamos primero la relación entre las medidas de la energía cinética T (absoluta) y T^{SCM} (relativa al S.C.M.):

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2, \end{aligned}$$

⁴Esto último ocurre a menudo cuando se toman momentos respecto del punto de contacto de dos sólidos, como en la rodadura de un disco sobre una recta. El punto de contacto entre ambos se traslada sobre la recta al rodar el disco, por lo que su velocidad no es nula; sin embargo, es el centro instantáneo de rotación en cada instante, por lo que la velocidad del punto del disco situado sobre él en cada instante sí será nula. Por ejemplo, para un sólido plano que rueda sin deslizar sobre una recta, el momento cinético relativo al punto del sólido que está sobre el centro de rodadura es $H_Q = I_Q \Omega$, siendo I_Q el momento de inercia. No se cumple, salvo en algunos casos particulares, la ecuación $M_Q = (d/dt)H_Q = I_Q \dot{\Omega}$, por ser Q un punto cuya velocidad es instantáneamente nula pero que tiene aceleración no nula

es decir:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}} \quad (\text{Teorema de König}) \quad (6.25)$$

La energía cinética del sistema se puede descomponer por tanto en la suma de la de una partícula con toda la masa M que se moviera con G , más la energía cinética relativa al S.C.M. El primer sumando se puede interpretar como el debido al movimiento de traslación del sistema, mientras que el segundo corresponde al movimiento relativo al centro de masa.

Si se calcula lo mismo respecto al S.Q., resulta

$$T = T^{SQ} - \frac{1}{2} M v_Q^2 + M \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{v}_G$$

expresión que se reduce a la anterior para $Q \equiv G$. Volvemos a advertir al igual que ya se hizo para el momento cinético, para evitar posibles errores en la aplicación del teorema de König, de la inconveniencia de aplicar esta última reducción a un punto Q distinto de G .

Tomando una variación elemental (diferencial) de T^{SCM} ,

$$dT^{SCM} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\alpha}_i dt) \cdot \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{\alpha}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i$$

Pero:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i (\boldsymbol{\alpha}_i + \mathbf{a}_G) \quad \Rightarrow \quad m_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_G,$$

luego

$$dT^{SCM} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i - \underbrace{\left(\sum_i m_i d\boldsymbol{\rho}_i \right) \cdot \mathbf{a}_G}_{=0} = \sum_i \underbrace{\mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} dW^{SCM}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{dT^{SCM} = dW^{SCM}},$$

es decir, se cumple también la ecuación de la energía cinética (6.15) en el sistema del centro de masa, a pesar de que no sea inercial.

6.3.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano

Como aplicación de los teoremas generales expuestos arriba, resumimos a continuación los resultados principales para el caso concreto de sólidos rígidos con movimiento plano. No se pretende una exposición rigurosa ni

detallada de este tema, que se considera ya conocido a partir de cursos anteriores.

Se entiende por sólido rígido un sistema en el que la configuración relativa de todas sus partículas no sufre variación, no se producen distorsiones ni cambio de distancia entre las partículas del mismo. La condición de movimiento plano indica que las velocidades de todos los puntos pertenecen a un plano dado Π , es decir son perpendiculares a una determinada dirección \mathbf{k} fija (la normal a Π). El plano del movimiento se puede caracterizar por las coordenadas cartesianas (x, y) , o bien los versores de la base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) (que forman un triedro a derechas con $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$).

Además el sólido estará constituido en el caso más general por una masa distribuida a lo largo de un cierto dominio $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, con densidad másica ρ por unidad de volumen. Considerando la sección $\tilde{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} por el plano del movimiento, es posible también definir una densidad másica por unidad de área, que llamaremos $\tilde{\rho}$ para diferenciarla de la volumétrica:

$$dm = \rho dV = \tilde{\rho} dA.$$

Así, la masa del sólido será

$$M = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\rho} dA. \quad (6.26)$$

El centro de masas se obtiene mediante

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \tilde{\rho} dA. \quad (6.27)$$

Magnitudes cinéticas

Cantidad de movimiento.— Se expresa de la misma manera que un sistema general:

$$\mathbf{P} = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = M \mathbf{v}_G \Rightarrow \begin{cases} P_x = M \dot{x}_G \\ P_y = M \dot{y}_G \end{cases} \quad (6.28)$$

Momento cinético.— Para expresar el momento cinético debemos introducir una nueva magnitud definida por la geometría de masas del sólido, el *momento de inercia* respecto de un punto⁵ O :

$$I_O = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} r^2 \tilde{\rho} dA, \quad (6.29)$$

⁵ Estrictamente hablando, sería el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por el punto dado.

donde las distancias r están medidas respecto al punto O en el que se toman momentos. Dada la constancia de la geometría de masas de un sólido rígido, el momento de inercia respecto a un punto dado del mismo es una constante. El teorema de Steiner permite relacionar el momento de inercia respecto a un punto cualquiera con el que corresponde al centro de masas:

$$I_O = I_G + M\overline{OG}^2. \quad (6.30)$$

Consideramos en primer lugar el momento cinético respecto de un punto con velocidad nula, que se toma como origen de coordenadas. La expresión es

$$\mathbf{H}_O = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA. \quad (6.31)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$, la integral resulta

$$\mathbf{H}_O = \left(\int_{\tilde{B}} r^2 \tilde{\rho} dA \right) \Omega \mathbf{k}. \quad (6.32)$$

Puesto que tanto el vector momento cinético como la velocidad angular necesariamente llevan la dirección del versor \mathbf{k} normal al plano, se puede prescindir del mismo en las expresiones. Empleando la definición del momento de inercia (6.29) resulta

$$\boxed{H_O = I_O \Omega.} \quad (6.33)$$

Tomando ahora para un caso general el momento respecto a G :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\tilde{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{v}, \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}, \tilde{\rho} dA - \int_{\tilde{B}} \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v}, \tilde{\rho} dA \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G = I_O \Omega \mathbf{k} - \mathbf{r}_G \wedge M(\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}_G) \\ &= (I_O - M r_G^2) \Omega \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (6.34)$$

y teniendo en cuenta el teorema de Steiner (6.30),

$$\boxed{H_G = H_G^{SCM} = I_G \Omega.} \quad (6.35)$$

Energía cinética.— Consideramos en primer lugar el caso en que el origen O tenga velocidad nula:

$$T = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} v^2 \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{2} (\Omega r)^2 \tilde{\rho} dA \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_O \Omega^2.} \quad (6.36)$$

En el caso general, haciendo uso del teorema de König (6.25), y teniendo en cuenta que $T^{SCM} = \frac{1}{2}I_G\Omega^2$,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\Omega^2.} \quad (6.37)$$

Ecuaciones de la dinámica

Balance de cantidad de movimiento.— Las ecuaciones son las mismas que en el caso general:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} F_x = M\ddot{x}_G \\ F_y = M\ddot{y}_G \end{array}} \quad (6.38)$$

Balance de momento cinético.— En el caso en que O sea *un punto fijo*⁶ las ecuaciones de balance resultan directamente de derivar 6.33,

$$\boxed{M_O = I_O\dot{\Omega}.} \quad (6.39)$$

En un caso general se puede derivar el momento cinético respecto a G (6.35):

$$\boxed{M_G = I_G\dot{\Omega}.} \quad (6.40)$$

Esta última expresión es de validez general, siendo posible emplearla en cualquier caso, con independencia de que exista o no un punto fijo.

Las tres ecuaciones (6.38)₁, (6.38)₂ y (6.40) se denominan *ecuaciones cardinales de la dinámica*, siendo necesarias y suficientes para determinar en un caso general la dinámica de los tres grados de libertad del sólido en movimiento plano (x_G, y_G, θ) .

EJEMPLO 6.7: Un semidisco homogéneo de masa M y radio R se mueve en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal. Se pide:

- a. Si el semidisco está en un instante determinado con su diámetro de borde vertical y con velocidad de rotación Ω (figura 6.16), obtener la aceleración angular $\dot{\Omega}$ y la reacción de la recta en el punto de contacto.
- b. Mismas cuestiones, pero ahora para el semidisco en una posición genérica definida por el ángulo θ (figura 6.16).

⁶Es importante remarcar la condición de punto fijo en O , no bastando con que la velocidad instantánea sea nula. Por ejemplo, en un punto de rodadura no es posible tomar momentos en un caso general, ya que el punto O de rodadura varía con el movimiento, el momento de inercia I_O no correspondería a lo largo del tiempo al mismo punto material y por tanto, salvo casos particulares, tendrá derivada no nula.

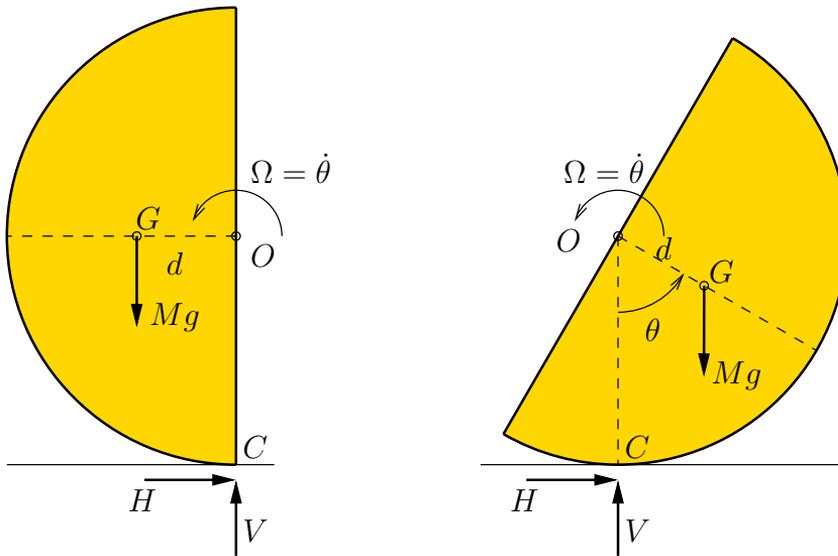


Figura 6.16: *Ejemplo 6.7 . Configuración con diámetro de borde vertical y configuración genérica, definida por el ángulo θ .*

Solución.

a.— Se trata de un sistema rígido y plano, que se puede resolver de forma general mediante las ecuaciones cardinales de la dinámica, que en este caso son tres (dos del balance de cantidad de movimiento y una del momento cinético en G). La condición de rodadura restringe dos grados de libertad, por lo que el movimiento tiene un sólo grado de libertad, aunque además debemos considerar las incógnitas de las componentes de la reacción en la recta (H, V).

En primer lugar, aplicando el teorema de Guldin calculamos la posición del centro de masas:

$$2\pi d \left(\frac{1}{2} \pi R^2 \right) = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad d = \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Las ecuaciones de la dinámica las aplicaremos tomando momentos en G , por lo que calculamos el momento de inercia en este punto. (Obsérvese que el punto de rodadura C no es un punto fijo, por lo que en general no es válido tomar momentos en él, aunque la tentación es fuerte ya que las reacciones

incógnita no dan momentos en este punto.)

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2; \quad I_G = I_O - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2$$

Mediante un análisis elemental del campo de aceleraciones resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_O &= -R\ddot{\theta}; & \ddot{y}_O &= 0; \\ \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2; & \ddot{y}_G &:= -\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Ya podemos escribir las ecuaciones cardinales de la dinámica. En primer lugar, las de balance de cantidad de movimiento:

$$H = M\dot{x}_G = -M \left(R\dot{\theta} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \right); \quad (6.41)$$

$$V - Mg = M\dot{y}_G = -M\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}. \quad (6.42)$$

La ecuación del momento cinético es:

$$HR + V\frac{4R}{3\pi} = I_G\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2\ddot{\theta}. \quad (6.43)$$

Entre las tres ecuaciones (6.41), (6.42) y (6.43) se despeja para obtener el resultado pedido:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{8}{9\pi} \left(\frac{g}{R} + \dot{\theta}^2 \right); \\ H &= -\frac{4}{9\pi}M(2g - R\dot{\theta}^2); \\ V &= Mg - \frac{32}{27\pi^2}M(g + R\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Puede comprobarse que, de haber tomado momentos en el punto de rodadura C , los resultados habrían sido distintos (e incorrectos).

b.— En este caso (figura 6.16), las componentes de la aceleración de G son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{y}_G &= \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.45)$$

Las ecuaciones cardinales de la dinámica, tomando momentos en G , resultan:

$$\begin{aligned} H &= M \left(-R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \right) \\ V - Mg &= M \left(\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right) \\ H \left(R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta \right) - V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta &= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Con algo más de trabajo podemos despejar de estas tres ecuaciones los resultados buscados:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -8 \frac{(g/R + \dot{\theta}^2) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16 \cos \theta} \\ H &= \frac{4}{3} M \frac{(6g\pi - 3R\dot{\theta}^2\pi + 8R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 8g \cos \theta) \operatorname{sen} \theta}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \\ V &= Mg + \frac{1}{3} M \frac{-32g \operatorname{sen}^2 \theta + 36\pi R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 32R\dot{\theta}^2(1 + \cos^2 \theta)}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Como comprobación, podemos ver que al particularizar $\theta = -\pi/2$ en estas expresiones se obtienen las mismas del caso anterior (6.44). \square

EJEMPLO 6.8: Sea un sistema binario constituido por dos partículas de masas m_1 y m_2 que se atraen con una fuerza central proporcional a su distancia s , es decir, $F = -ks$. Además, el conjunto se halla sujeto al campo gravitatorio simplificado terrestre. Se pide:

- Obtener la expresión de la energía (potencial más cinética) del conjunto en *función exclusivamente* de las coordenadas de su C.D.M. (x_G, y_G), su distancia (s), y el ángulo (φ) que forma el segmento $m_1 m_2$ con una dirección fija.
- Misma cuestión con la cantidad de movimiento y el momento cinético.
- Obtener las integrales primeras del movimiento para las coordenadas anteriores.
- Obtener la ecuación diferencial de 2.º orden del movimiento en función exclusivamente de la coordenada s .
- Tomando ahora como coordenadas las cartesianas absolutas de la partícula m_1 que llamaremos (r_x, r_y) y las relativas de m_2 que denominaremos (s_x, s_y) , obtener las ecuaciones de la dinámica y comprobar

que las trayectorias relativas de cada partícula respecto de la otra son elipses.

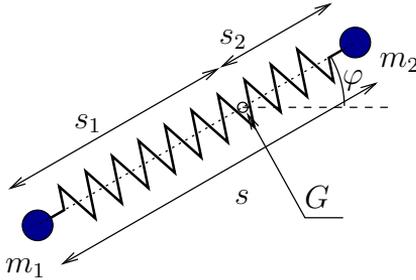


Figura 6.17: *Ejemplo 6.8;*

Solución.

a.— Al tratarse de fuerzas centrales el movimiento es plano y sólo se necesita estudiar la configuración dentro de un plano xy fijo, con los parámetros indicados en el enunciado (x_G, y_G, s, φ) .

Establecemos unos parámetros auxiliares (s_1, s_2) que definen las distancias de las partículas respecto al centro de masas G (figura 6.17). Aplicando la definición de centro de masas se tienen las relaciones

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} s, \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s. \quad (6.48)$$

Aplicando el teorema de König (6.25), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_2^2 + s_2^2\dot{\varphi}^2);$$

teniendo en cuenta las expresiones (6.48), y llamando

$$\begin{aligned} M &= (m_1 + m_2) && \text{(masa total);} \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} && \text{(masa equivalente),} \end{aligned}$$

se llega a:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2). \quad (6.49)$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G.$$

Por lo tanto la energía total resulta

$$E = T + V = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G. \quad (6.50)$$

b.— La cantidad de movimiento resulta trivialmente

$$\mathbf{P} \equiv (M\dot{x}_G, M\dot{y}_G). \quad (6.51)$$

El movimiento es plano, por lo que el momento cinético puede caracterizarse por el valor escalar H_G :

$$H_G = m_1 s_1^2 \dot{\varphi} + m_2 s_2^2 \dot{\varphi},$$

y aplicando las expresiones (6.48) se llega a

$$H_G = \mu s^2 \dot{\varphi}. \quad (6.52)$$

c.— Las fuerzas aplicadas son o bien centrales (atracción elástica) o paralelas (gravedad simplificada), por lo que el momento de las mismas en G se anula, de donde se deduce la constancia del momento cinético:

$$M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{cte.}) \quad (6.53)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total, dada por la ecuación (6.50). Dentro de esta ecuación podemos dividir la energía en dos componentes, una correspondiente al movimiento del C.D.M. y otra al movimiento relativo:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + Mgy_G}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2}_{E_2}. \quad (\text{cte.}) \quad (6.54)$$

La energía E_1 del C.D.M. corresponde a un movimiento parabólico y es constante:

$$\frac{d}{dt}E_1 = \frac{1}{2}M(2\dot{x}_G \underbrace{\ddot{x}_G}_{=0} + 2\dot{y}_G \underbrace{\ddot{y}_G}_{=-g}) + Mgy_G = 0;$$

por tanto podemos establecer como integral primera la constancia de la energía E_2 del movimiento relativo:

$$E_2 = E - E_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (6.55)$$

Empleando la otra integral primera (6.53) se puede eliminar $\dot{\varphi}$ para obtener finalmente

$$E_2 = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{s}^2 + \frac{C^2}{s^2} \right) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (6.56)$$

d.— Podemos obtener una ecuación diferencial de 2.º orden de la dinámica aplicando directamente la expresión (5.15) válida para sistemas con fuerzas centrales:

$$\mu \left(\ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \right) = F(r) = -ks. \quad (6.57)$$

Esta misma expresión se puede obtener derivando la ecuación que expresa la constante de la energía (6.56).

e.— Con los parámetros dados (r_x, r_y, s_x, s_y) se pueden plantear las ecuaciones fundamentales de la dinámica para cada masa y cada dirección:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_x &= ks_x; \\ m_1 \ddot{r}_y &= -m_1 g + ks_y; \\ m_2 (\ddot{r}_x + \ddot{s}_x) &= -ks_x; \\ m_2 (\ddot{r}_y + \ddot{s}_y) &= -m_2 g - ks_y. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Mediante las ecuaciones (6.58)₁ y (6.58)₃ se puede eliminar \ddot{r}_x . Análogamente, mediante (6.58)₂ y (6.58)₄ se elimina \ddot{r}_y . De esta manera se obtienen las dos ecuaciones reducidas siguientes:

$$\mu \ddot{s}_x + ks_x = 0; \quad \mu \ddot{s}_y + ks_y = 0. \quad (6.59)$$

(Este razonamiento es análogo al que se aplica en el apartado 5.1 para realizar la reducción general del sistema de dos cuerpos.)

Las soluciones generales de las ecuaciones anteriores son

$$s_x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_x); \quad s_y(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_y),$$

siendo $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ y A, B, ϕ_x, ϕ_y constantes que dependerán de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones definen paraméricamente una elipse, como se vió en el apartado 3.2. Por tanto, las trayectorias relativas de cada masa respecto de la otra son *elipses*. \square

6.3.5. Constantes del Movimiento en Sistemas Aislados

En un sistema aislado, todas las fuerzas exteriores desaparecen. Resumiendo los diferentes resultados presentados en apartados anteriores (veáanse las ecuaciones (6.8), (6.7), (6.19), (6.25), (6.22)), es posible establecer 10 integrales o constantes del movimiento:

$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G = \text{cte.}$	Conserv. cantidad de movimiento
$\mathbf{r}_G(t) - \frac{\mathbf{P}}{M}t = \mathbf{r}_G(0)$	Th. movimiento del C.M.
$E = T + V^{int} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + T^{SCM} + V^{int}$	Conserv. energía
$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{P}$	Conserv. momento cinético

(6.60)

Las magnitudes $\{\mathbf{P}, \mathbf{r}_G(0), E, \mathbf{H}_O\}$ constituyen las diez constantes clásicas del movimiento del sistema de N partículas aislado.

Es posible demostrar⁷ que estas diez constantes provienen de la invariancia de las leyes de la mecánica ante las transformaciones más generales que convierten un sistema inercial en otro inercial, es decir, que mantienen invariantes las leyes de la mecánica:

- *Rotación \mathbf{R}* : $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$, asociada a la conservación de \mathbf{H}_O . Al ser \mathbf{R} ortogonal⁸ ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$), este tensor de rotación depende sólo de tres parámetros.
- *Traslación \mathbf{a}* : $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, asociada a la conservación de \mathbf{P} .
- *Transformación de Galileo⁹ \mathbf{w}* : $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}t$, asociada al Th. del movimiento del centro de masa.
- *Traslación de tiempo s* : $t \mapsto t' = t + s$, asociada a la conservación de la energía E .

Un planteamiento similar se puede realizar a partir de la función Lagrangiana en dinámica analítica, cuestión que se describirá en el apartado 7.7.

6.4. Trabajos Virtuales

Los principios y teoremas generales expuestos en los apartados 6.2 y 6.3 provienen directamente de las leyes de Newton, aunque deben reconocerse también algunas contribuciones clave debidas a Euler, como el principio del

⁷Ver p. ej. F. Scheck: *Mechanics—from Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (2.^a ed.), Springer-Verlag, Berlin (1990); apartados 1.12 y 1.13

⁸En el apartado 8.6.4 se discuten las rotaciones rígidas y se analiza la propiedad de ortogonalidad para las mismas.

⁹Una versión más simplificada de esta transformación se presentó en el apartado 1.3.

momento cinético. Por este motivo los métodos asociados se suelen denominar de «Newton-Euler».

En este apartado se presentan los principios y métodos basados en desplazamientos o trabajos virtuales. Sería posible postular estos principios básicos de manera independiente a los principios de Newton-Euler, pudiendo servir de base para construir sobre ellos toda la mecánica. A diferencia de las leyes de Newton, formulan directamente las ecuaciones para la estática o la dinámica de manera conjunta para todo un sistema, y no partícula a partícula, por lo que revisten un especial interés para el estudio de sistemas de varias partículas.

Comenzaremos por definir el concepto de *Desplazamientos virtuales*. En un sistema de N partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema, $\{\delta\mathbf{r}_i \ (i = 1, \dots, N)\}$. En contraposición a los *desplazamientos infinitesimales reales*, $\{d\mathbf{r}_i \ (i = 1, \dots, N)\}$, los desplazamientos virtuales son una entelequia, que nos servirá para formular el principio de los trabajos virtuales; se trata de desplazamientos ficticios, inventados, que tienen lugar en un instante dado («congelado») de tiempo. Por el contrario, los desplazamientos infinitesimales reales $\{d\mathbf{r}_i\}$ se producen en el movimiento real, durante un intervalo dt , y se pueden expresar como diferencial de las funciones que definen el movimiento, $\{\mathbf{r}_i\}$.

Aunque en principio $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ son completamente arbitrarios (pudiendo violar incluso los enlaces del sistema), en la práctica emplearemos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en la mayoría de los casos.

Imaginemos en primer lugar un sistema en equilibrio, condición que queda expresada por $\dot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$, ($i = 1, \dots, N$). Al ser la aceleración nula, la fuerza total sobre cada partícula debe ser nula; descomponiendo ésta como suma de las fuerzas activas (\mathbf{f}_i) y reactivas (\mathbf{R}_i),

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (6.61)$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas \mathbf{F}_i para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ es, por tanto, también nulo:

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta\mathbf{r}_i\}. \quad (6.62)$$

La equivalencia entre estas dos expresiones funciona también en sentido inverso: si se verifica la igualdad (6.62), se ha de verificar a su vez (6.61). Para demostrar esto bastaría ir tomando sucesivos conjuntos de desplazamientos virtuales, con una única componente no nula; la igualdad (6.62) obligaría a

la nulidad de la componente de la fuerza correspondiente; al verificarse esta ecuación $\forall\{\delta\mathbf{r}_i\}$, se deduce que todas las componentes de las fuerzas han de ser nulas.

Por tanto, la ecuación (6.62), enunciada para $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ arbitrarios, es *condición necesaria y suficiente para el equilibrio*.

Aunque se podría tomar este enunciado, con $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ arbitrarios, como expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, no se suele hacer así por la escasa utilidad que tiene un planteamiento tan general. Es preferible formularlo en función de desplazamientos virtuales compatibles, como se describe a continuación.

6.4.1. El Principio de los Trabajos Virtuales

Sea un sistema con enlaces lisos (recordamos la definición realizada en el apartado 6.1 como aquellos en que las fuerzas de enlace no realizan trabajo para los desplazamientos permitidos por los enlaces), y un conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta\mathbf{r}_i\}$, *compatible* con los enlaces. Al expresar el trabajo virtual, el término de las fuerzas de enlace se anula:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i}_{=0} = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}$$

Por tanto el trabajo virtual δW se puede calcular a partir únicamente de las fuerzas activas (\mathbf{f}_i), eliminando las fuerzas reactivas del cómputo del mismo. El principio de los trabajos virtuales reza entonces:

“En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:

$$\boxed{\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (6.63)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que (6.63) se cumple necesariamente si se verifica (6.61), es decir, se trata de una condición necesaria para el equilibrio en el sentido de Newton. Sin embargo, la suficiencia para garantizar el equilibrio no se puede deducir directamente, como ocurría en el caso de $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ arbitrarias (6.62).

- Para una fuerza total \mathbf{F}_i sobre un punto dado, se verifica que $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, $\forall i$ (no sumado); sin embargo, para la fuerza activa correspondiente \mathbf{f}_i en general es $\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$. Es decir, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas activas no tienen por qué anularse, aunque la suma sí es siempre nula ($\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$).
- Las fuerzas activas \mathbf{f}_i deben incluir tanto las externas como las internas, que en un caso general sí realizan trabajo virtual. Por el contrario, \mathbf{f}_i excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual.

Estas observaciones justifican la consideración del enunciado anterior (6.63) como «principio», que se postula sin necesidad de demostración. A pesar de esto conviene mencionar que es posible encontrar algunas demostraciones¹⁰ que inciden en la equivalencia del principio de los trabajos virtuales con la estática.

Por último, conviene notar que la ventaja del principio de los trabajos virtuales es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema, *sin emplear las reacciones de los enlaces lisos*, que no hace falta calcular en ningún momento.

También pueden tratarse problemas con enlaces no lisos, agregando a la expresión (6.63) el trabajo virtual correspondiente a las reacciones de los enlaces no lisos, como si se tratase de fuerzas activas. Dicho de otra forma, las únicas fuerzas de reacción que se eliminan de la expresión general del trabajo virtual son las de los enlaces lisos.

6.4.2. El Principio de D'Alembert

Este principio extiende el de los trabajos virtuales a la dinámica. Partimos para ello de la segunda ley de Newton para una partícula cualquiera del sistema:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Pasando las «fuerzas de inercia» ($-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$) al lado izquierdo del signo igual, resulta una expresión del «equilibrio dinámico», análoga a (6.61):

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (6.64)$$

Aplicamos ahora el principio de los trabajos virtuales al sistema de fuerzas nulo $\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, anulándose, al igual que antes, el trabajo de las fuerzas de reacción, bajo la hipótesis de enlaces lisos. Resulta entonces el enunciado siguiente del Principio de D'Alembert:

¹⁰por ejemplo, Appell y Dautheville, en «*Précis de Mécanique Rationnelle*»

“En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (6.65)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que la condición enunciada (6.65) es necesaria, a partir de (6.64). Sin embargo, no es sencillo demostrar la suficiencia con carácter general.
- Para una partícula dada será en general $(\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$, es decir que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.
- Aplica la misma observación realizada arriba para el P.T.V. sobre la naturaleza de las fuerzas \mathbf{f}_i .

En consecuencia, el principio de D’Alembert (6.65) debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo a las leyes de Newton y a los principios de Newton-Euler para dinámica de sistemas. Como caso particular, el Principio de D’Alembert da lugar al Principio de los Trabajos Virtuales.

Al igual que en el principio de los trabajos virtuales, el principio de D’Alembert permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de los enlaces lisos.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un truco. Para ello, se considera este vínculo «liberado» y la fuerza de reacción como una fuerza activa normal, que tendría el efecto precisamente del vínculo. Esto nos permite tomar $\delta \mathbf{r}_i$ vulnerando el vínculo. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual, y la expresión de los trabajos virtuales (6.63) ó (6.65) permite calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la

estática o la dinámica de sistemas con varias partículas (ecuaciones de Lagrange, apartado 7.2). Asimismo son la base de métodos numéricos, muy extendidos en la práctica, para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como el *método de los elementos finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la mecánica computacional y en el cálculo de las estructuras.

EJEMPLO 6.9: El sistema de la figura consta de dos poleas, una A fija, de la que cuelga una masa m_3 y por el otro lado otra polea B . A su vez de esta segunda polea cuelgan dos masas m_2 y m_3 . Los hilos son inextensibles y las poleas lisas y sin inercia. Obtener las ecuaciones de la dinámica aplicando el principio de D'Alembert y las aceleraciones de cada una de las masas. (Problema de Poggendorf.)

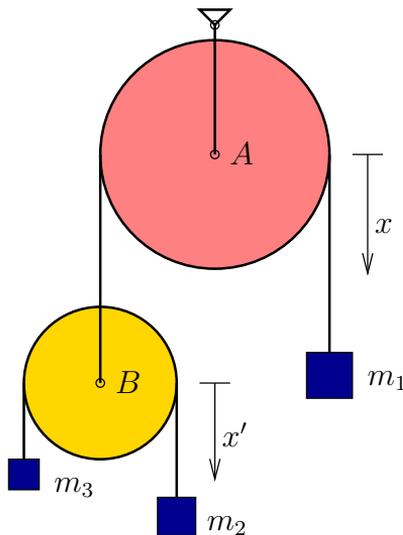


Figura 6.18: *Ejemplo 6.9; Problema de Poggendorf.*

Solución. Para definir el sistema se puede emplear la coordenada (absoluta) x , medida en sentido descendente y a partir de una posición dada de cada uno de los elementos: (x_1, x_2, x_3, x_B) . Así en principio el sistema tiene cuatro parámetros, aunque estos se encuentran ligados por dos ecuaciones de ligadura, por lo que el número de grados de libertad es de dos.

Empleando también la coordenada relativa x' , medida a partir de la posición del centro de la polea B , las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_B; \\ x'_2 &= -x'_3. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Teniendo en cuenta la definición de las coordenadas relativas:

$$x'_2 = x_2 - x_B; \quad x'_3 = x_3 - x_B, \quad (6.67)$$

las ecuaciones (6.66) se convierten en la ecuación de ligadura siguiente en términos de (x_1, x_2, x_3) :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_3). \quad (6.68)$$

Esta ecuación de ligadura nos permitirá escribir las ecuaciones en función de las dos coordenadas libres (x_1, x_2) .

La expresión del principio de D'Alembert es:

$$\begin{aligned} \delta W &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2 + m_3 g \delta x_3 \\ &= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) \text{ compatibles.} \end{aligned} \quad (6.69)$$

A partir de la ecuación de ligadura (6.68) se deducen las siguientes dos expresiones inmediatas:

$$\delta x_3 = -2\delta x_1 - \delta x_2; \quad \ddot{x}_3 = -2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2. \quad (6.70)$$

Empleando estas ecuaciones en (6.69) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} &(m_1 g - 2m_3 g) \delta x_1 + (m_2 g - m_3 g) \delta x_2 \\ &= [m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_1 + [m_2 \ddot{x}_2 - m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_2, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Nótese que, al ser libres, no hace falta exigir en la expresión anterior ninguna condición de «compatibilidad con los enlaces» a $(\delta x_1, \delta x_2)$. Particularizando para los valores $(\delta x_1 = 1, \delta x_2 = 0)$ y $(\delta x_1 = 0, \delta x_2 = 1)$ se obtienen las dos ecuaciones de la dinámica:

$$\begin{aligned} m_1 g - 2m_3 g &= m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2); \\ m_2 g - m_3 g &= m_2 \ddot{x}_2 - m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Despejando de estas ecuaciones el valor de las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \\ \ddot{x}_2 &= g \frac{-3m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Por último, empleando la expresión (6.70)₂ se obtiene la aceleración de m_3 :

$$\ddot{x}_3 = g \frac{-3m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}. \quad (6.74)$$

□

6.5. Dinámica en Sistemas no Inerciales.

Las leyes de Newton son válidas en los sistemas de referencia denominados *inerciales*. Se postula, al formularlas, la existencia al menos de un tal sistema inercial; por el principio de relatividad de Galileo (apartado 1.3), sabemos que cualquier otro sistema de referencia que tenga un movimiento uniforme y rectilíneo respecto del primero también será inercial. En ocasiones llamamos al sistema inercial «fijo», aunque este adjetivo no se emplea con su significado estricto, sino como contraposición al carácter general de un sistema «móvil», no inercial.

Los sistemas de referencia que posean, bien aceleración lineal de su origen ($\mathbf{a}_O \neq \mathbf{0}$), bien rotación ($\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$), no serán inerciales. En ellos no se cumplen las leyes de Newton, por lo que no será posible, por ejemplo, aplicar a cada partícula la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si la medición de la aceleración la realiza un observador ligado al sistema móvil. Sin embargo, es posible estudiar la dinámica de estos sistemas aplicando ciertos términos correctores, lo que puede tener interés práctico en algunos casos. De este tema tratamos a continuación.

6.5.1. Dinámica de la Partícula

Sea una partícula observada desde dos sistemas de referencia distintos: (S) \equiv ($Qxyz$), inercial, y (S') \equiv ($Ox'y'z'$), no inercial:

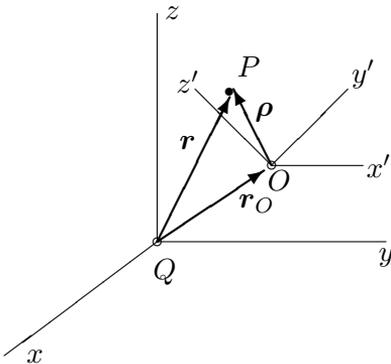


Figura 6.19: Coordenadas de la partícula en sistemas de referencia inercial ($Qxyz$) y no inercial ($Ox'y'z'$).

Recordemos las relaciones entre posición (4.7), velocidad (4.8) y acele-

ración (4.9) en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{v} &= \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}, \\ \mathbf{a} &= \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}, \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$ son medidas que denominaremos «absolutas» (más precisamente, relativas a (S)), mientras que $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_{\text{rel}}, \mathbf{a}_{\text{rel}})$ son relativas a (S') .

El término de arrastre es el que corresponde al movimiento del sólido rígido, es decir, el que tendría la partícula sin movimiento relativo a (S') . En el campo de velocidades es el único término complementario que aparece. En cambio, para las aceleraciones aparece otro término adicional denominado aceleración de Coriolis. Expresando el principio de la cantidad de movimiento (con aceleraciones absolutas, por supuesto):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}});$$

para expresarlo en función de las observaciones relativas a (S') es necesario pasar los términos complementarios a la izquierda:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{arr}} - m\mathbf{a}_{\text{cor}} = m\mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (6.75)$$

Por tanto, para aplicar la ecuación de balance del principio, es necesario añadir a las fuerzas realmente actuantes \mathbf{F} unas *fuerzas de inercia ficticias* $(-m\mathbf{a}_{\text{arr}})$ y $(-m\mathbf{a}_{\text{cor}})$, denominadas fuerzas de arrastre y de Coriolis respectivamente.

Desarrollando su expresión, comprobamos que la fuerza de arrastre es una función de punto, es decir, depende de $\boldsymbol{\rho}$ además de otros parámetros que puedan definir el movimiento del sistema móvil $(\mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} -m[\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}). \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la fuerza de arrastre se puede expresar como el gradiente de un determinado campo escalar y, por tanto, resulta una fuerza conservativa. Por ejemplo, si se verifica que $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} = -m[\mathbf{a}_O - \Omega^2 \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega}];$$

multiplicando escalarmente por $d\boldsymbol{\rho}$ obtenemos el trabajo elemental de esta fuerza; si suponemos además que \mathbf{a}_O es constante, comprobamos que es una diferencial exacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} &= -m\mathbf{a}_O \cdot d\boldsymbol{\rho} + m\Omega^2 \boldsymbol{\rho} \cdot d\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\rho}) \\ &= d[-m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2]; \end{aligned}$$

la función potencial de la que deriva es un campo escalar constante, $-V(\boldsymbol{\rho})$, por lo que la fuerza es conservativa:

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} = -dV,$$

siendo

$$V(\boldsymbol{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2.$$

Por el contrario, la fuerza de Coriolis no tiene una interpretación clara, al depender, no sólo de la posición $\boldsymbol{\rho}$, sino también de la velocidad relativa \mathbf{v}_{rel} .

6.5.2. Dinámica de Sistemas de varias Partículas

Para un sistema formado por un conjunto de partículas, el estudio en una referencia no inercial deberá hacerse aplicando las fuerzas ficticias (6.75) descritas en el apartado anterior a cada una de sus partículas. Al ser las expresiones de estas fuerzas lineales en $\boldsymbol{\rho}$ y \mathbf{v}_{rel} , parece lógico esperar que su resultante tenga también una expresión sencilla, en función del movimiento del centro de masas G .

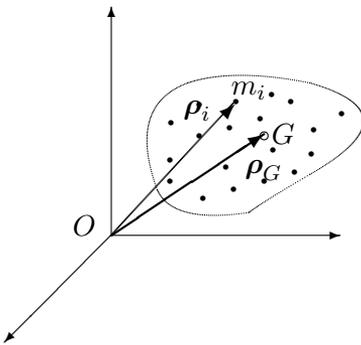


Figura 6.20: Sistema de varias partículas en una referencia no inercial; la posición de cada partícula es $\boldsymbol{\rho}_i$.

Supongamos un sistema de N partículas $\{m_i\}$, siendo:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$$

$$M \boldsymbol{\rho}_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$$

La resultante de las fuerzas de arrastre es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i (\mathbf{a}_{\text{arr}})_i = -[M \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i)] \\ &= -[M \mathbf{a}_O + M \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}_G + M \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_G)], \end{aligned}$$

y la resultante de las fuerzas de Coriolis:

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i [2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_{\text{rel}})_i] = -[M 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_G)_{\text{rel}}]$$

Expresiones que resultan de utilidad para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento y determinar la posición del centro de masa. Sin embargo, las expresiones de la ecuación del momento cinético no son lineales en $\boldsymbol{\rho}$ y, por tanto, no resultan tan útiles. Volveremos esto más adelante para el caso del sólido rígido (capítulo 2).

6.5.3. Ejes Ligados a la Superficie de la Tierra

Un sistema muy aproximadamente inercial sería uno con origen en el centro del Sol y direcciones de los ejes fijas según las galaxias más lejanas. Este sistema es adecuado para observaciones astronómicas.

Es posible considerar también un sistema con origen en el centro de la Tierra y orientación fija en relación con las galaxias lejanas. Cometeríamos, respecto al caso anterior, el error debido a la aceleración del centro de la Tierra en su movimiento casi circular alrededor del Sol, es decir, la aceleración centrípeta. El error cometido por este término se ve muy aproximadamente compensado por la atracción gravitatoria del Sol:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{sol}} = m \mathbf{a}_O + m \mathbf{a}_{\text{rel}},$$

donde \mathbf{a}_O es la aceleración del centro de la tierra. $\mathbf{F}_{\text{sol}} \approx m \mathbf{a}_O$, por lo que eliminando estos dos términos queda:

$$\mathbf{F} \approx m \mathbf{a}_{\text{rel}}.$$

Es decir, si prescindimos de considerar la atracción gravitatoria del sol, el sistema resulta muy aproximadamente inercial.

Sin embargo, para describir movimientos «normales», en la superficie terrestre y a escala humana, los sistemas anteriores poseen una complejidad a todas luces excesiva. Es conveniente a menudo considerar un sistema de ejes ligados a la superficie de la Tierra, que giran con la misma, además de acompañarla en su movimiento de traslación alrededor del Sol. Debido al movimiento de rotación de la tierra estos ejes no son inerciales. A continuación evaluaremos el error que se comete aplicando en ellos las ecuaciones de la dinámica, con fórmulas aproximadas de corrección.

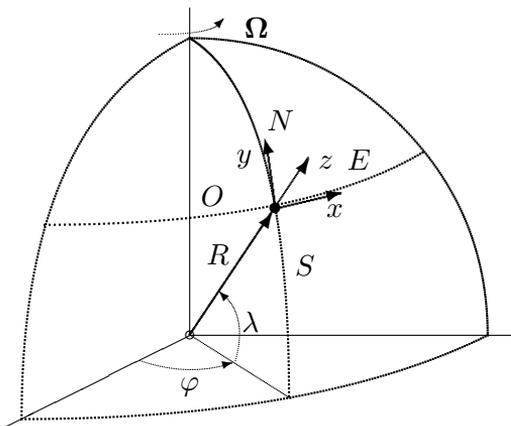


Figura 6.21: Triedro ligado a la superficie de la tierra, en un punto O. La dirección x apunta al este, la y al norte, y la z según la vertical ascendente.

Suponemos la Tierra esférica y, en cada punto de su superficie, los ejes siguientes: z según la vertical del lugar, x según el paralelo (positivo hacia el Este), e y según el meridiano (positivo hacia el Norte). Estudiamos en estos ejes en primer lugar el equilibrio de los cuerpos en reposo, y a continuación la dinámica de los cuerpos en movimiento de caída libre.

Desviación de la plomada.—

Sea una partícula estacionaria en relación con la superficie de la tierra, $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$. La única fuerza no inercial es la de arrastre, pues la fuerza de Coriolis se anula. El vector Ω de rotación de la Tierra, en función de los ejes que hemos definido es (figura 6.22):

$$\Omega = \Omega(\cos \lambda \mathbf{j} + \sen \lambda \mathbf{k})$$

El vector posición (medido desde el centro de la Tierra) es

$$\mathbf{r} = R\mathbf{k} + \rho \approx R\mathbf{k},$$

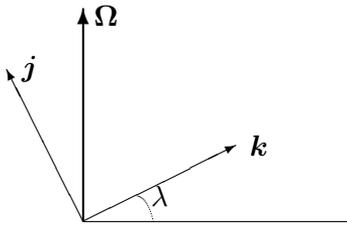


Figura 6.22: *Proyecciones de la velocidad de rotación Ω sobre las direcciones Oz y Oy situadas en el plano del meridiano.*

restringiéndonos a puntos próximos a la superficie de la Tierra. Ésta tiene una velocidad de rotación constante en módulo y dirección (en una primera aproximación), siendo $\Omega = 2\pi/86\,164$ rad/s¹¹. Teniendo en cuenta que la aceleración del origen del triedro móvil (punto situado en la superficie de la Tierra) es $\mathbf{a}_O = \Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned}
 -m\mathbf{a}_{\text{arr}} &= -m[\mathbf{a}_O + \Omega \wedge (\Omega \wedge \boldsymbol{\rho})] \\
 &= -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge (R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho}))] \approx -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})] \\
 &= -m[(\Omega \cdot R\mathbf{k})\Omega - \Omega^2 R\mathbf{k}] \\
 &= -m\Omega^2 \underbrace{R \cos \lambda}_{\text{dist. al eje}} \underbrace{(\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k})}_{\text{versor perp. eje}}
 \end{aligned}$$

Por tanto la plomada seguirá la dirección de una gravedad aparente \mathbf{g}' (figura 6.23) definida como:

$$\mathbf{g}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g} - \Omega^2 R \cos \lambda (\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k}).$$

El efecto de modificación aparente de \mathbf{g} , en módulo, es máximo en el Ecuador. Allí, la disminución de g vale:

$$\Omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \left(\frac{4 \times 10^7}{2\pi} \right) = 0,03367 \text{ m/s}^2$$

Lo que representa alrededor de un 0,3% del valor medio de $g = 9,81$ m/s². Fuera del Ecuador, se ve también alterada la dirección de \mathbf{g} , no estando dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra, aunque la modificación en módulo es progresivamente menor.

¹¹La tierra efectúa una vuelta completa (2π) en un día sidéreo (86 164 s). En un día solar (86 400 s) la rotación efectuada es algo mayor que 2π , siendo éste necesario para volver a enfrentarse al sol al desplazarse la tierra en su órbita.

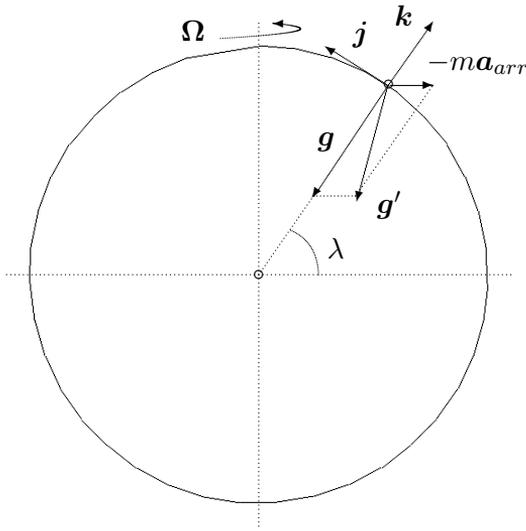


Figura 6.23: *Desviación de la plomada por efecto de la fuerza de arrastre ($-m\mathbf{a}_{arr}$), obteniéndose la «gravedad aparente» \mathbf{g}' .*

Desviación por la aceleración de Coriolis.—

Si el cuerpo está en movimiento respecto de la superficie terrestre ($\mathbf{v}_{rel} \neq \mathbf{0}$) es necesario además considerar la fuerza de Coriolis. Hemos visto antes el efecto de modificación de la gravedad aparente (\mathbf{g}') por virtud de la fuerza de arrastre. La ecuación de la dinámica se puede expresar como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g}' - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{rel}$$

En el desarrollo que se realiza a continuación, admitiremos que el desplazamiento sobre la tierra es pequeño, por lo que se mantiene aproximadamente constante la latitud (λ) así como la dirección de \mathbf{g}' , que como hemos visto antes sufre una desviación muy pequeña respecto a \mathbf{g} , dependiendo de la latitud. Tomamos los ejes de forma que \mathbf{k} coincida con esta vertical aparente, definida por \mathbf{g}' :

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{rel} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \lambda & \text{sen } \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= 2\Omega[(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \text{sen } \lambda)\mathbf{i} + \dot{x} \text{sen } \lambda \mathbf{j} - \dot{x} \cos \lambda \mathbf{k}]; \end{aligned}$$

si llamamos a las fuerzas aplicadas por unidad de masa $\mathbf{F}/m = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, resultan tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= X - 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} &= Y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} &= Z - g + 2\Omega\dot{x} \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.76}$$

Estas ecuaciones son de aplicación general para el caso de proyectiles o cuerpos móviles de corto alcance, en que son válidas las hipótesis realizadas arriba. En caso contrario sería necesario considerar la variación de λ en el movimiento.

EJEMPLO 6.10: Caída de un cuerpo sometido únicamente a la gravedad terrestre, partiendo del reposo, desde una altura h .

Solución. Al no existir otras fuerzas será $X = Y = Z = 0$. Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & y_0 &= 0, & z_0 &= h, \\ \dot{x}_0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0, & \dot{z}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Integrando las ecuaciones, para lo que suponemos $\lambda = \text{cte.}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda] \\ \dot{y} &= -2\Omega x \sin \lambda \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega x \cos \lambda\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores calculados para \dot{y} y \dot{z} de nuevo en la ecuación (6.76₁). Para ello consideramos que, puesto que Ω es pequeño, se pueden despreciar los términos de segundo orden ($O(\Omega^2)$):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\Omega[(-gt + 2\Omega x \cos \lambda) \cos \lambda + 2\Omega x \sin \lambda \sin \lambda] \\ &\approx 2\Omega g t \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.77}$$

Las desviaciones en \ddot{y} y \ddot{z} son infinitésimos de segundo orden ($O(\Omega^2)$), por lo que su efecto frente a \ddot{x} se puede despreciar:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -2\Omega \sin \lambda \{-2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda]\} = O(\Omega^2) \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega \cos \lambda \{-2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda]\} = -g + O(\Omega^2)\end{aligned}$$

Por último, integrando dos veces la expresión aproximada (6.77):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega g t^2 \cos \lambda, \\ x &= \frac{\Omega}{3} g t^3 \cos \lambda.\end{aligned}$$

Este último valor indica una desviación hacia el Este (sentido positivo de x). En función de la altura de caída, se puede escribir como

$$x = \frac{\Omega}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \lambda.$$

En las otras direcciones las desviaciones son pequeñas. □

EJEMPLO 6.11: Circulación atmosférica en zonas de bajas presiones.

Solución. En una zona de baja presión (lo que los meteorólogos llaman borrasca) las partículas de aire tienden a desplazarse hacia el punto de presión mínima, por efecto del gradiente de presión. La velocidad generada por este movimiento da lugar a una fuerza de inercia de Coriolis:

$$-2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = 2m\Omega v[\text{sen } \lambda(\text{sen } \alpha \mathbf{i} - \text{cos } \alpha \mathbf{j}) + \text{cos } \lambda \text{cos } \alpha \mathbf{k}]$$

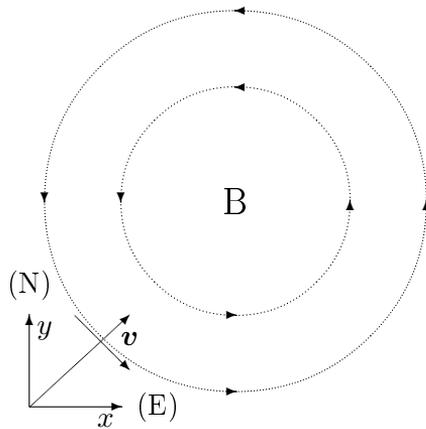


Figura 6.24: Líneas isobaras y circulación del aire en una borrasca por efecto de la aceleración de Coriolis (hemisferio Norte).

El primer término de esta fuerza es horizontal, y origina una desviación consistente hacia la derecha en el sentido del movimiento, siempre que sea $\text{sen } \lambda > 0$ (es decir, en el hemisferio Norte). Eventualmente, se produce una circulación estacionaria alrededor del centro de bajas presiones, a modo de remolino, cuando el gradiente de presiones es contrarrestado por la fuerza

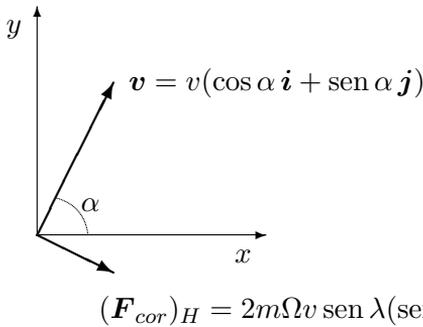


Figura 6.25: Fuerza de Coriolis horizontal debida a la velocidad en la superficie de la tierra (hemisferio Norte).

de Coriolis y por la propia fuerza centrífuga del movimiento circular. Este efecto produce una circulación en sentido antihorario en el hemisferio Norte. En el Sur es $\operatorname{sen} \lambda < 0$, por lo que la circulación de las borrascas será en sentido horario. □

6.6. Sistemas de masa variable

6.6.1. Sistema puntual: ecuación fundamental

En la mecánica clásica la masa de una partícula, o de un conjunto dado de partículas, es constante. Por tanto, un sistema mecánico que no pierda ni gane partículas mantiene su masa invariable.

La variación de masa en un sistema procede de la pérdida o ganancia de partículas. Esto puede ocurrir cuando el sistema quede definido por ejemplo por el criterio de las partículas contenidas dentro de un recinto determinado. Como veremos en lo que sigue, la variación de masa produce a su vez una variación de la cantidad de movimiento del sistema, interpretable a partir de una fuerza ficticia equivalente.

Consideramos en primer lugar un sistema asimilable a una partícula (es decir, un sistema del que sólo interesa estudiar el movimiento de su centro de masa G). En un instante t , el sistema posee una velocidad \mathbf{v} y una masa m . Supondremos que la masa de este sistema varía, por efecto de la incorporación o pérdida de partículas, de forma que a lo largo de un intervalo infinitesimal dt se incorpora la masa dm con velocidad \mathbf{u} (en caso de pérdida de masa, será $dm < 0$). En un instante inmediatamente posterior, $t + dt$, el sistema tendrá una masa $m + dm$ y una velocidad $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. De forma esquemática la variación de cantidad de movimiento se plantea como:

$$\begin{array}{ccc} \text{instante } t & \implies & \text{instante } t + dt \\ m\mathbf{v} + dm\mathbf{u} & & (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \end{array}$$

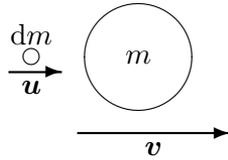


Figura 6.26: Variación de masa en un sistema por incorporación o pérdida de partículas.

La resultante de todas las fuerzas externas (resistencias pasivas, gravedad, etc.) la representaremos por \mathbf{F} . Expresando el balance de la cantidad de movimiento en ese intervalo infinitesimal:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}dt &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm\mathbf{u}) \\ &= m d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + dm d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

y despreciando infinitésimos de segundo orden, resulta:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{F}.$$

Definiendo: $\mathbf{v}_{rel} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{v}$, velocidad relativa de la masa que se pierde o incorpora; $q \stackrel{\text{def}}{=} dm/dt$, tasa de incorporación de masa (será de pérdida si $dm/dt < 0$), se obtiene la siguiente ecuación fundamental:

$$\boxed{m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}.} \tag{6.78}$$

En definitiva, la variación de masa produce un término adicional a las fuerzas, de valor $q\mathbf{v}_{rel}$. Por ejemplo, en el caso de movimiento según un eje, la pérdida de masa ($q < 0$) producirá un empuje neto en dirección de la marcha, siempre que la masa perdida salga despedida «hacia atrás» (es decir, si $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ lleva sentido opuesto a \mathbf{v}).

6.6.2. Sistema con masa distribuida

Para el caso general de un sistema de varias partículas, $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$, es preciso aplicar las ecuaciones generales de la dinámica de sistemas, junto con la ecuación fundamental (6.78) a cada parte del sistema asimilable a una partícula.

Cantidad de Movimiento

Suponiendo constante la velocidad relativa de la masa que se incorpora o pierde, $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i$, y efectuando la suma para el conjunto de partículas,

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \left[\frac{dm_i}{dt} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}_i \right]$$

es decir

$$\boxed{M\mathbf{a}_G = \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}}, \quad (6.79)$$

por lo que el efecto sobre el movimiento del centro de masa coincide con lo visto para el caso de una partícula (6.78).

Supongamos ahora un caso más general en el que la velocidad relativa de incorporación de masa no sea necesariamente constante para todas las partículas, pero sí lo sean la velocidad absoluta de la masa incorporada o perdida \mathbf{u} , y la tasa específica de incorporación de masa β , definida por

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_i} \frac{dm_i}{dt}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{dm_i}{dt} \mathbf{v}_i &= \beta \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \beta M \mathbf{v}_G = \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_G \\ \sum_i \frac{dm_i}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) &= \frac{dM}{dt} \mathbf{u} - \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_G = \frac{dM}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_G) \end{aligned}$$

Por lo que, llamando $\mathbf{v}_{rel} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{v}_G$, se obtiene la misma expresión que antes (6.79).

Momento Cinético

Para expresar el balance del momento cinético del sistema es necesario considerar el momento de las fuerzas debidas a la variación de masa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O &= \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left[\frac{dm_i}{dt} (\mathbf{v}_{rel})_i + \mathbf{F}_i \right] \\ &= \mathbf{M}_O + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{dm_i}{dt} (\mathbf{v}_{rel})_i; \end{aligned}$$

no es posible simplificar más esta ecuación para establecer una expresión analítica general. Por ello, en cada caso particular será necesario tener en cuenta el momento debido a cada uno de estos sumandos.

6.6.3. Aplicaciones

Propulsión a Chorro en el Vacío

Un cohete o nave espacial en el vacío no puede impulsarse mediante hélices o turborreactor, ya que falta un medio en el que «apoyarse».

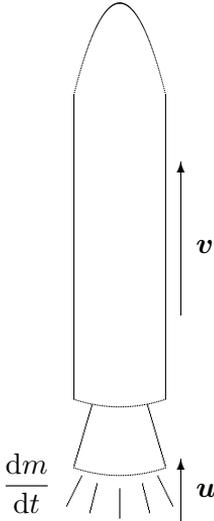


Figura 6.27: *Propulsión a chorro por expulsión del combustible quemado.*

La propulsión se produce por la pérdida de la masa de combustible quemado, que sale expulsada con una velocidad menor que la del cohete propulsado ($u < v$, siendo v positivo en la dirección de avance). Si el empuje se produce de forma simétrica, la resultante estará alineada con la dirección axial:

$$d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m}dt + \frac{dm}{m}\mathbf{v}_{rel}$$

Integrando entre el instante inicial ($t = 0$) y un instante genérico t :

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m}dt + \int_0^t \frac{dm}{m}\mathbf{v}_{rel}$$

Si $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{w}$ (cte.), entonces:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m}dt - \mathbf{w} \ln \frac{m_0}{m}$$

Examinando esta expresión, se desprende que para optimizar la propulsión será conveniente:

1. Que la relación (m_0/m) sea máxima, lo que se consigue minimizando el peso muerto;
2. Disminuir las resistencias pasivas (incluidas en \mathbf{F});
3. Aumentar la velocidad relativa a los gases de salida, \mathbf{w} .

Turborreactor

En un turborreactor se produce una tasa de admisión de aire q_a , que es expulsado una vez ha reaccionado con el combustible, cuya tasa es q_c .

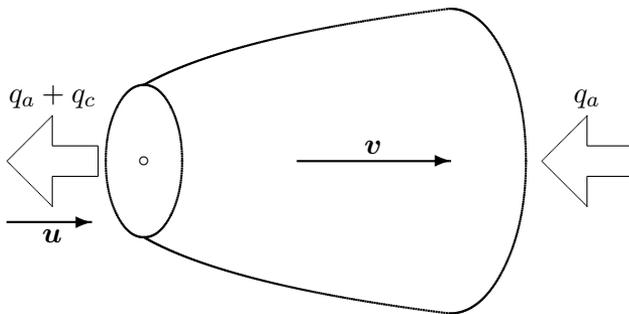


Figura 6.28: *Propulsión en un turborreactor; el empuje neto proviene de la admisión de aire (q_a) y de la expulsión de productos de combustión ($q_c + q_a$).*

Por lo general, $q_c \ll q_a$. En la dirección del eje, el empuje es:

$$e = -\underbrace{(q_c + q_a)}_{<0} \underbrace{(u - v)}_{v_{rel} < 0} + q_a(0 - v)$$

Se define el impulso específico como el cociente entre el empuje y el peso de gases expulsados por unidad de tiempo:

$$I_{esp} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e}{(q_c + q_a)g} = \frac{v_{rel}}{g} - \frac{q_a}{q_c + q_a} \frac{v}{g}$$

Si $q_c \ll q_a$, entonces $q_a/(q_c + q_a) \approx 1$. Así,

$$I_{esp} \approx \frac{1}{g}(v_{rel} - v) = \frac{v}{g} \left(\frac{v_{rel}}{v} - 1 \right).$$

EJEMPLO 6.12: Sea un cohete de masa total M , incluyendo el combustible ϵM ($0 < \epsilon < 1$) y carga útil («payload») m_0 . El gasto de combustible es $\dot{m} = kM$, que se ve expulsado por la tobera con velocidad relativa c . Calcular la condición para que se pueda efectuar el despegue, y la velocidad final una vez consumido el combustible.

Solución. En un instante t , la masa es $m(t) = M + m_0 - kMt$. Suponiendo la gravedad constante g , y despreciando resistencias pasivas, resulta la ecuación dinámica:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{(-c)(-kM)}{M + m_0 - kMt} \quad (6.80)$$

De esta ecuación, observamos que el cohete ascenderá ($dv/dt > 0$) en el instante inicial ($t = 0$) tan sólo si $kcM > (M + m_0)g$.

Integrando:

$$v - v_0 = -gt - c \ln \left(1 - \frac{kMt}{M + m_0} \right)$$

La velocidad final es, para $t = \epsilon/k$, una vez quemado todo el combustible:

$$v = -c \ln \left(1 - \frac{\epsilon M}{M + m_0} \right) - g \frac{\epsilon}{k}$$

Si el cohete tuviese varias fases sería necesario hacer la integración de (6.80) para cada tramo de tiempo por separado, tomando como condiciones iniciales para una fase las finales de la fase anterior con la nueva masa. \square

EJEMPLO 6.13: Sea una gota de lluvia esférica cayendo a través de una nube. Se admite que acumula masa con una tasa temporal proporcional a su sección transversal y a la velocidad de caída. Calcular la aceleración.

Solución. Al ser la gota esférica, en función del radio r y de la densidad ρ , la sección transversal y la masa total valen:

$$A = \pi r^2; \quad m = \rho \frac{4\pi r^3}{3}.$$

La acumulación de masa, según la condición dada, es

$$\frac{dm}{dt} = kAv = k(\pi r^2)v;$$

Aplicando la ecuación fundamental (6.78) y teniendo en cuenta que la incorporación de masa se realiza precisamente a la velocidad de caída v ,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} \\ &= g - \frac{v}{\rho \frac{4}{3} \pi r^3} k \pi r^2 v \\ &= g - \underbrace{\frac{3k}{4\rho}}_{\text{cte}} \frac{v^2}{r}. \end{aligned} \quad \square$$

6.7. Problemas propuestos.

Problema 6.1. Una granada que se mueve por el aire se rompe en dos partes de masas m_1 y m_2 por la acción de su carga explosiva, incrementando la energía total de los fragmentos en E . Se pide

- expresar la energía E en función de las velocidades de los fragmentos relativas al centro de masa, en el instante inmediatamente posterior a la explosión;
- calcular la velocidad relativa entre los fragmentos en dicho instante.

(Examen final, 17/9/93)

Problema 6.2. Un punto material Q de masa m está sometido al campo gravitatorio terrestre simplificado (esto es, con intensidad uniforme igual a g) y a la acción de n fuerzas producidas por un conjunto de n puntos materiales P_i , tal que

$$\mathbf{F}_i = k_i m_i \mathbf{d}_i,$$

siendo m_i la masa de cada punto y \mathbf{d}_i la distancia entre Q y P_i . las k_i son constantes dadas que pueden ser, todas o cualesquiera de ellas, positivas o negativas. Se pide:

- Estudiar el movimiento general de Q , haciendo todas las hipótesis sobre las constantes k_i .
- Determinar las condiciones iniciales para que describa una circunferencia de radio R , estableciendo las condiciones que deba cumplir ésta para que el movimiento sea posible. Como en el caso anterior, se tendrán en cuenta todas las hipótesis que quepa hacer sobre las k_i .

Problema 6.3. Un conjunto de p puntos materiales de masas m_i , ($i = 1, \dots, p$) está obligado a permanecer en un plano liso Π_1 , y otro conjunto de q puntos de masas M_j , ($j = 1, \dots, q$) está obligado a permanecer de la misma forma en otro plano Π_2 paralelo al anterior. Ambos planos son fijos. Entre dos puntos cualesquiera existe una fuerza de atracción

$$\mathbf{F}_{ij} = k m_i m_j \mathbf{d}_{ij},$$

siendo m_i y m_j las masas (tanto de Π_1 como de Π_2), \mathbf{d}_{ij} el vector que las une y k una constante dada. Se pide:

- estudiar el movimiento de los puntos en la hipótesis que Π_1 y Π_2 sean horizontales.
- lo mismo si no son horizontales.

- c. Condiciones iniciales para que, siendo los planos horizontales y $p = q = 1$, las trayectorias sean circunferencias.

Problema 6.4. En un punto de la superficie de la tierra de latitud λ se comprueba que la distancia entre dos isobaras con diferencia de 4 mb [1 mb = 100 N/m²] es de N grados de arco máximo. El viento circula siguiendo las isobaras cuando el gradiente de presión es contrarrestado por la fuerza de inercia de Coriolis (componente horizontal). Se sabe:

- Que la fuerza ejercida por la diferencia de presiones es $\mathbf{f} = -\text{grad } p$ por unidad de volumen;
- que la densidad del aire se puede tomar constante e igual a 1,293 kg/m³;
- que se puede despreciar el rozamiento con el suelo y la curvatura de las isobaras.

Se pide hallar la velocidad v del viento.

Problema 6.5. Una placa cuadrada de masa M , lado b , y vértices $ABCD$ está colgada de un punto fijo O mediante un hilo inextensible OA de longitud b , atado al vértice A . Se abandona la placa en reposo, estando contenida en un plano vertical y con el hilo tenso en la dirección de la diagonal AC , formando un ángulo $\beta \neq 0$ con la vertical. Se pide:

- Demostrar que durante el movimiento no podrá mantenerse alineado el hilo con AC .
- Encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento.

(Examen final, 10/1/94)

Problema 6.6. Una partícula P de masa $2m$ puede moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio R . A su vez P está atada a un hilo flexible inextensible y sin masa, que pasa por una pequeña polea sin rozamiento situada en el punto superior de la circunferencia (A), en cuyo extremo opuesto hay otra partícula de masa m obligada a moverse según la vertical de A . En el instante inicial la partícula P está en reposo en el punto B situado sobre un diámetro horizontal y se abandona a la acción de la gravedad. Se pide:

- definir el movimiento dejándolo expresado mediante una integral primera (ecuación diferencial de 1^{er} orden) en función de φ ;
- tensión en el hilo y reacción de la circunferencia sobre P para el instante en que está situada en el punto más bajo de la circunferencia ($\varphi = 0$).

(Examen parcial, 29/1/97)

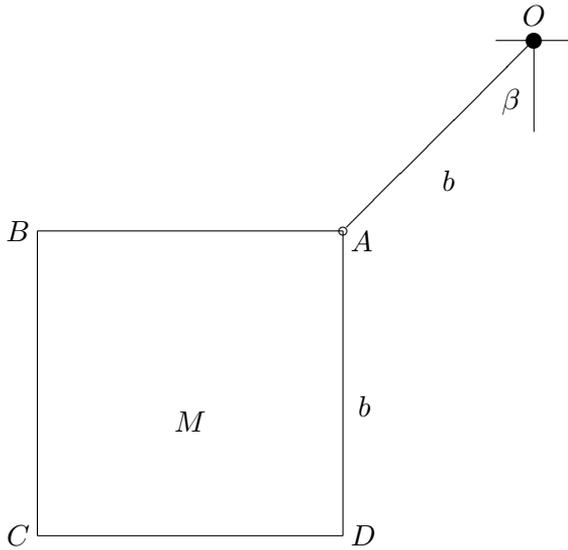


Figura 6.29: *Problema 6.5; situación inicial*

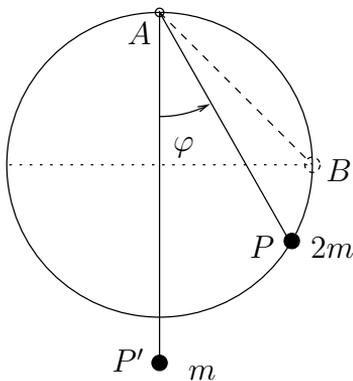


Figura 6.30: *Problema 6.6*

Problema 6.7. Una partícula de masa m se halla ensartada en un aro circular de radio R , pudiendo deslizarse libremente sobre él, sometida a su propio peso. A su vez, al aro se le comunica un movimiento impuesto de rotación respecto a un diámetro vertical, con velocidad angular constante ω . Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial del movimiento, en función de la posición de la partícula sobre el aro;
- Teniendo en cuenta que el sistema de referencia relativo al aro no es inercial, expresar las fuerzas de inercia de arrastre y de Coriolis;
- demostrar que la fuerza de inercia de arrastre proviene de un potencial y calcularlo;

- d. Obtener una integral primera del movimiento;
- e. Expresar la energía total ($T + V$) de la partícula. ¿se conserva?

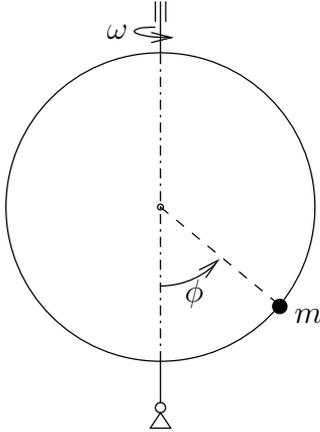


Figura 6.31: *Problema 6.7*

Problema 6.8. Una aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m . Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza $F(t)$ dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema. Se pide:

- a. Momento cinético en O del sistema formado por el aro y la partícula.
- b. Expresión del principio del momento cinético del sistema aro-partícula en O .
- c. Expresión del principio de la cantidad de movimiento de la partícula.
- d. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.
- e. Expresar la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico.

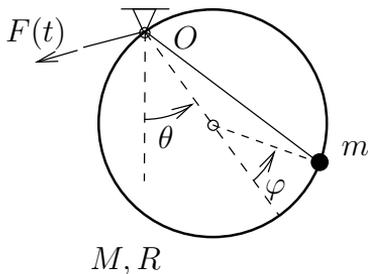


Figura 6.32: *Problema 6.8*

Problema 6.9. Un aro de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Sobre él se mueve sin rozamiento una partícula de masa m con ligadura bilateral que no estorba la rodadura. Aplicando los teoremas de Newton-Euler, se pide:

- Calcular la reacción que la recta ejerce sobre el aro y la reacción que el aro ejerce sobre la partícula, en función de los grados de libertad y sus derivadas.
- Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.

(Examen parcial, 31/1/2000)

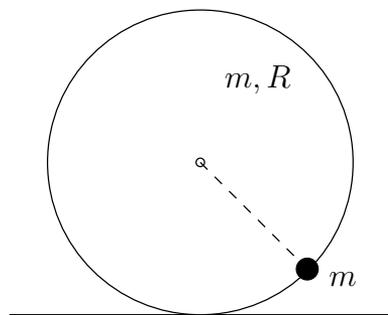


Figura 6.33: *Problema 6.9*

Problema 6.10. Una barra AB de longitud l y masa m tiene su extremo A fijo, mientras que su extremo B se apoya en un plano rugoso vertical OYZ (ver figura adjunta). Se pide:

- Suponiendo que la barra está deslizando, con un coeficiente de rozamiento dado μ , obtener la ecuación diferencial del movimiento.
- Calcular el coeficiente de rozamiento μ necesario, en función de la posición, para que la barra se encuentre en equilibrio.

(Examen final, 31/1/2000)

Problema 6.11. Una varilla AB de masa m y longitud total l se mueve en un plano vertical de forma que el extremo A desliza sobre la vertical y el extremo B desliza sobre una recta horizontal. Asimismo, una partícula P de masa m puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con $\theta = 30^\circ$ y $s = 0$. Se pide, en función de s , θ y sus derivadas:

- Expresión de la velocidad absoluta de la partícula P .
- Expresión del momento cinético del conjunto varilla+partícula en O .

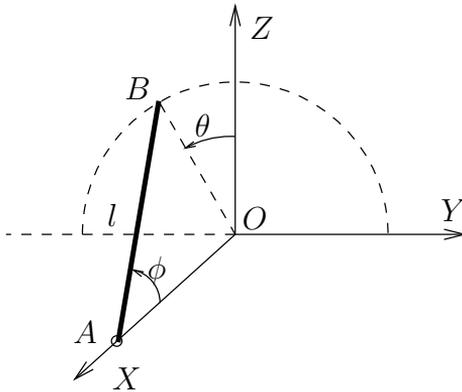


Figura 6.34: Problema 6.10

- c. Ecuación del momento cinético en O .
- d. Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la varilla AB
- e. Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la partícula P
- f. Expresar las ecuaciones del movimiento como dos ecuaciones diferenciales en las que intervengan exclusivamente s, θ y sus derivadas.

Nota: Expresar todas las magnitudes pedidas en el triedro fijo $(Oxyz)$ de la figura.

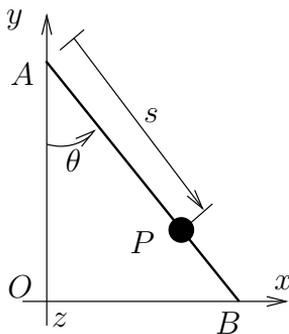
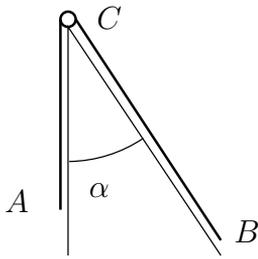


Figura 6.35: Problema 6.11

Problema 6.12. Una cadena pesada y perfectamente flexible, de longitud $ACB = 2a$ se encuentra en situación de equilibrio inestable alrededor de una pequeña polea en C , estando AC vertical y BC sobre un plano liso de inclinación α . Al separarla ligeramente hacia la derecha, la cadena desliza hacia abajo. Determinar la velocidad de la cadena en el instante en que el extremo A pasa por C .

(Examen final, 15/6/92)

Figura 6.36: *Problema 6.12*

Problema 6.13. Una varilla de longitud l , masa m y espesor despreciable se encuentra en reposo en posición vertical de equilibrio inestable sobre un plano horizontal rugoso. La varilla es desplazada ligeramente hacia la derecha y cae. Suponiendo que el extremo inferior de la varilla no desliza, se pide:

- Velocidad angular de la varilla en un instante genérico en que ésta forme un ángulo θ con la vertical.
- Ángulo α que forma la reacción del plano con la vertical en ese instante.
- Valor de θ para el que la reacción del plano tiene su inclinación máxima hacia la derecha, y coeficiente de rozamiento mínimo para que el extremo inferior de la varilla no deslice hacia la izquierda.

Problema 6.14. Consideramos un cilindro circular homogéneo de radio R y masa $2m$, que puede girar libremente alrededor de su eje que es vertical, sin desplazamiento según el mismo. En dicho cilindro existe una acanaladura en forma de hélice de inclinación 45° por la que puede moverse sin rozamiento un punto material pesado de masa m , con una ligadura bilateral. Inicialmente cilindro y partícula están en reposo. Se pide:

- Ecuaciones que definen el movimiento del sistema y su integración.
- Tiempo que tarda la partícula en desplazarse el primer *paso* sobre la hélice.
- Ángulo girado por el cilindro en este tiempo.

Problema 6.15. Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta inclinada un ángulo α , dentro de un plano vertical. El disco lleva adherida una masa puntual de valor M en el borde, pudiéndose considerar que ésta no estorba la rodadura. El conjunto parte del reposo en la situación de la figura, en que la masa puntual está a una distancia R de la recta inclinada. Se pide

- Ecuaciones del movimiento en ese instante;

- b. Valor necesario del coeficiente de rozamiento μ para que no deslice.
(Examen final, 20/6/94)

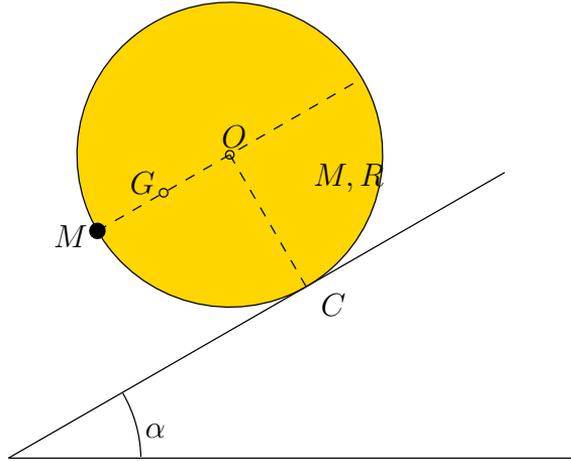


Figura 6.37: *Problema 6.15*

Problema 6.16. Una partícula pesada de masa m se mueve unida mediante una varilla AB rígida, sin masa y de longitud l , a una rótula A de masa despreciable. A su vez, esta rótula A está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio R . La rótula A actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por A a la circunferencia. Se pide:

- Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de Newton y Euler.
- En el caso de que A se mueva con velocidad de módulo constante $|\mathbf{v}_A| = \omega R$, expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en A , con el eje z vertical y cuyo plano yz contiene en todo momento a la varilla AB .
- Para la situación del apartado anterior, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

Problema 6.17. Se considera el sistema representado en la figura. En él, la masa m_1 se mueve sobre el plano inclinado con un coeficiente de rozamiento μ , mientras que la masa m_2 , que se considera puntual, está unida al carril circunferencial mediante un vínculo liso. Las masas de la polea y del hilo inextensible que une m_1 y m_2 se consideran despreciables. Se pide

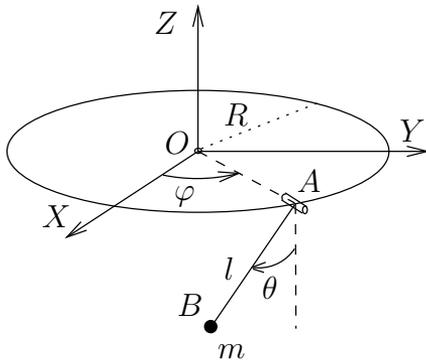


Figura 6.38: Problema 6.16

determinar, por aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, el valor de μ necesario para asegurar el equilibrio en función de la posición de m_2 , considerando asimismo todos los posibles valores de m_1 y m_2 .

(Examen final, 16/9/94)

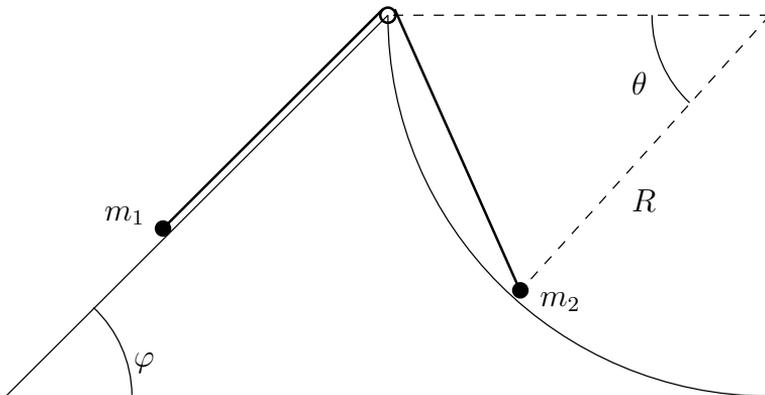


Figura 6.39: Problema 6.17

Problema 6.18. Un semicirculo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semicirculo desliza una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

- Ecuaciones del movimiento;
- Reacciones en un instante genérico;
- Integrales primeras, caso de haberlas.

(Examen final, 20/6/94)

Problema 6.19. Un hilo AB (flexible, inextensible y de masa despreciable) de longitud $3b$ pasa a través de un tubo CD (fijo, horizontal y liso) de

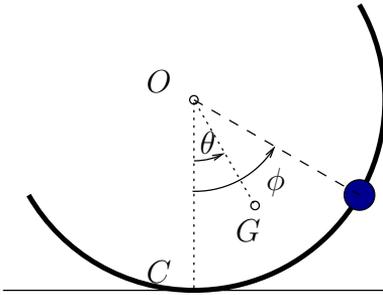


Figura 6.40: *Problema 6.18*

longitud b . En los extremos del hilo están sujetas sendas partículas, de masa M la que se encuentra en A , y de masa m la que se encuentra en B . En la situación inicial se cumple:

- El hilo sobresale por igual por ambos extremos del tubo (con lo que $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB} = b$)
- Todo el hilo se encuentra situado en un plano vertical DYZ , colgando verticalmente el tramo AC , mientras que el tramo DB está desviado 30° de la vertical descendente
- La partícula M está en reposo, mientras que la partícula m tiene velocidad horizontal $v_0 > 0$, dirigida según el eje X

Se pide:

- a. Expresar para un instante genérico, el momento cinético del sistema y el momento de las fuerzas respecto del punto D
 - b. Expresar las ecuaciones diferenciales necesarias para definir completamente el movimiento, mediante los teoremas generales de Newton-Euler.
 - c. Integrales primeras del movimiento.
 - d. Demostrar que no es posible que m alcance el extremo D .
 - e. Calcular el valor de v_0 que hace que la masa M permanezca en reposo.
- (Examen final, 26/01/1998)

Problema 6.20. Un semiarco de masa m y radio r se halla en un plano horizontal, con su punto medio Q fijo. Sobre él se mueve con ligadura bilateral lisa una masa puntual m (igual a la del semiarco). Inicialmente el semiarco está en reposo y la masa puntual en un extremo del mismo, con velocidad v_0 . Se pide

- a. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.

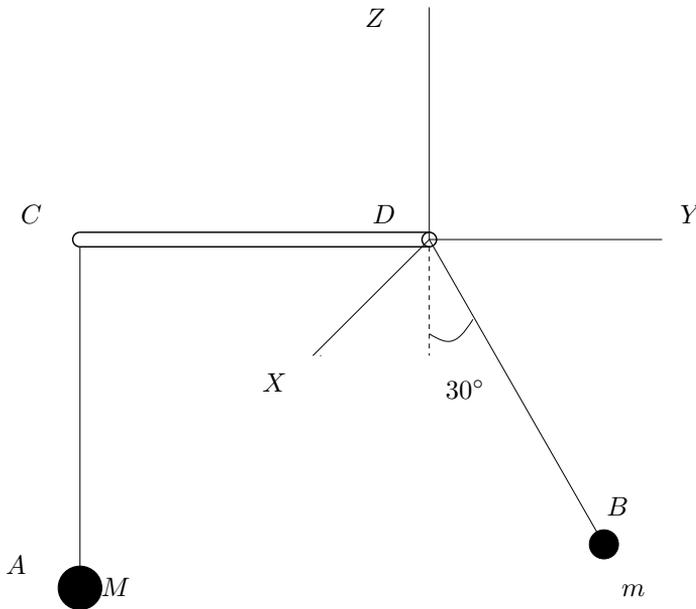


Figura 6.41: Problema 6.19

b. Integrales primeras.
(Examen final, 19/01/1996)

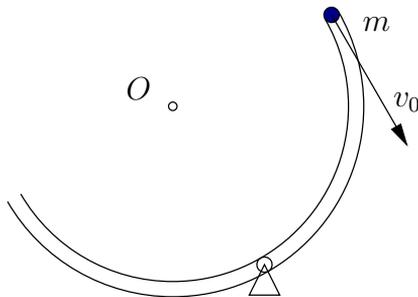


Figura 6.42: Problema 6.20

Problema 6.21. El péndulo doble de la figura está formado por las masas m_A y m_B , unidas entre sí y a un punto fijo O mediante barras rígidas sin masa de longitud l . Obtener las ecuaciones de la dinámica a partir del principio de D'Alembert, respondiendo a las siguientes cuestiones:

- Obtener los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_A$, $\delta \mathbf{r}_B$ en función de $\delta \varphi_1$ y $\delta \varphi_2$.
- Obtener las aceleraciones de A y B en función de (φ_1, φ_2) y sus derivadas.

- c. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas activas (pesos).
- d. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas de inercia.
- e. Plantear las ecuaciones de la dinámica, en función de (φ_1, φ_2) , mediante la aplicación del principio de D'Alembert.
- f. Calcular las reacciones externas (en O) e internas (tensiones en barras), en función de (φ_1, φ_2) y sus derivadas.
- g. Obtener las ecuaciones de la dinámica mediante la aplicación de los teoremas generales de Newton Euler y comprobar que coinciden con las obtenidas mediante D'Alembert.

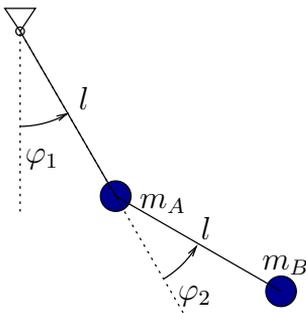


Figura 6.43: Problema 6.21

Problema 6.22. Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r , manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir del Principio de D'Alembert.

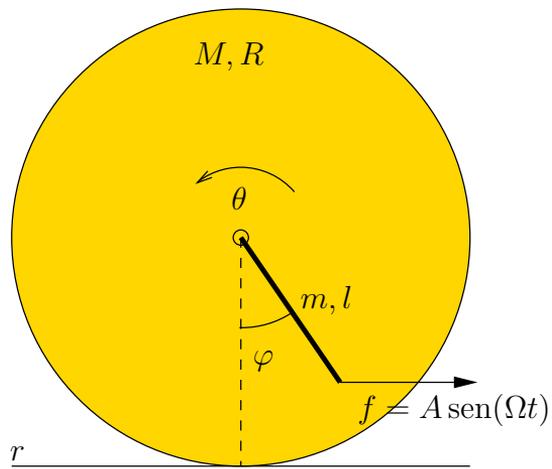


Figura 6.44: Problema 6.22

