

Capítulo 7

Dinámica Analítica

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la publicación de su obra *Mécanique Analytique*¹ en 1788. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy día en la mecánica y en las matemáticas: formuló las ecuaciones que llevan su nombre para la dinámica; colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones; fue el inventor de las palabras derivada y potencial; etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue William Rowan Hamilton, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad, desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la «búsqueda y diferenciación de una sólo función» (la integral de la acción S). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, resultando básico para otros campos como la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.

¹En ella, Lagrange se vanagloriaba de que no había ninguna figura, como botón de muestra de que los métodos propuestos estaban libres de casuística geométrica o topológica.

7.1. Coordenadas Generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas».

DEFINICIÓN: *Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema.*

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas $\{q_i\}$ se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas, $\{\delta q_i\}$, se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se traducirán en relaciones entre las q_i (y también sus derivadas \dot{q}_i para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que n . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la figura 7.1, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ($n = 1$; $q_1 \equiv \theta$). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas (N), sujeto a m ligaduras holónomas y k anholónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de $n = 3N - m$

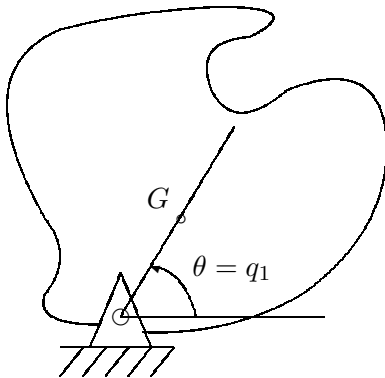


Figura 7.1: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo θ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en O).

parámetros o coordenadas generalizadas. Esquemáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\} \\ + \\ m \text{ enlaces holónomos} \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

\Updownarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, i = 1, \dots, N\}, \{q_j, j = 1, \dots, n\}. \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los m enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los k enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa.

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos (apartado 6.1) que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n) \quad (7.1)$$

A los vectores de posición de cada partícula $\{\mathbf{r}_i\}$ los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes

a definir las $3N$ coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (7.1) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (7.1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (7.2)$$

llamándose por extensión «velocidades generalizadas» a los términos $\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j$.

EJEMPLO 7.1: Se considera un sistema formado por dos masas puntuales (m_1, m_2) unidas entre sí por un hilo sin masa de longitud ℓ , estando m_1 a su vez unida a un punto fijo O por un hilo de igual longitud (*péndulo doble*). El conjunto se mueve en un plano vertical. Obtener los grados de libertad y las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

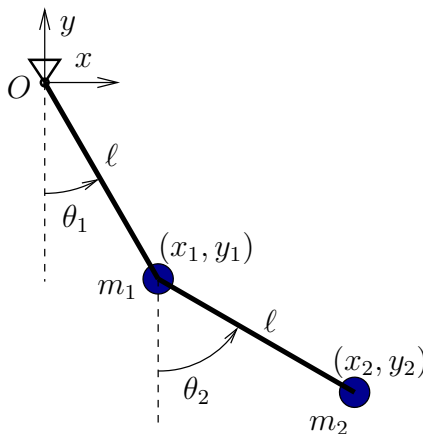


Figura 7.2: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo doble

Solución. El sistema tiene dos partículas en un plano, cuya configuración en principio estará fijada por sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Existen dos enlaces holónomos que definen la distancia fija ℓ entre m_1 y O y entre

m_2 y m_1 :

$$\begin{aligned}\ell^2 &= x_1^2 + x_2^2; \\ \ell^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.\end{aligned}$$

Por tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Al tratarse de un sistema con enlaces holónomos es posible encontrar un conjunto de 2 coordenadas generalizadas libres. En efecto, podemos considerar para ello los ángulos (θ_1, θ_2) . En función de ellos las coordenadas cartesianas se expresan como:

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell \operatorname{sen} \theta_1, & y_1 &= -\ell \cos \theta_1; \\ x_2 &= \ell \operatorname{sen} \theta_1 + \ell \operatorname{sen} \theta_2, & y_2 &= -\ell \cos \theta_1 - \ell \cos \theta_2.\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7.2: Se considera ahora dos masas m_0 y m_1 unidas por un hilo sin masa de longitud constante ℓ . La masa m_0 se mueve según una recta horizontal con velocidad impuesta v , mientras que m_1 permanece en el mismo plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

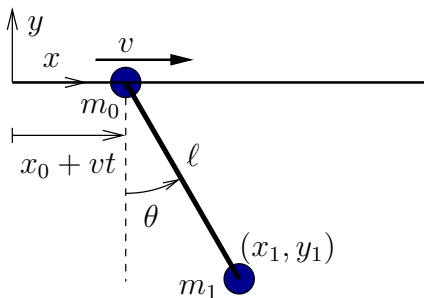


Figura 7.3: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo cuya base tiene un movimiento prescrito, con velocidad constante v . Se considera que en el instante inicial la posición de m_0 es x_0 .

Solución. El sistema consta en principio de dos masas, aunque la primera tiene su movimiento totalmente prescrito, por lo cual no es objeto de estudio mediante las ecuaciones de la dinámica. La otra masa tiene dos coordenadas cartesianas (x_1, y_1) sujetas a un enlace holónimo, $\ell^2 = x_1^2 + x_2^2$, por lo cual el sistema posee un solo grado de libertad. Podemos tomar como coordenada libre el ángulo θ , expresándose:

$$x_1 = x_0 + vt + \ell \operatorname{sen} \theta; \quad y_1 = -\ell \cos \theta.$$

Se observa en la ecuación anterior que la expresión de x_1 depende explícitamente del tiempo. Esto es debido al enlace móvil (movimiento impuesto) de m_0 . Asimismo, podemos considerar que el sistema de coordenadas (generalizadas) para definir la posición de m_1 es móvil, ya que el origen de las coordenadas polares está en m_0 . \square

EJEMPLO 7.3: Establecer los grados de libertad, coordenadas generalizadas y enlaces de un sistema formado por dos partículas A y B , unidas por una varilla rígida sin masa de longitud l . El conjunto se mueve sobre un plano horizontal liso, existiendo en A un pequeño cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla (figura 7.4).

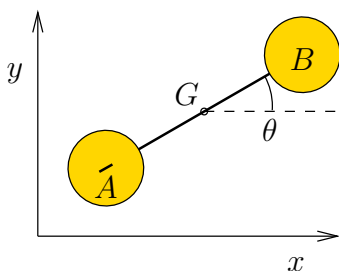


Figura 7.4: Sistema de dos partículas A y B , unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de A que materializa un enlace anholónimo.

Solución. Al estar en un plano, se precisan en principio 4 coordenadas cartesianas para definir la configuración, $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$. Estas se hallan sujetas a 2 condiciones de enlace. Primeramente, el enlace holónimo correspondiente a la varilla rígida entre A y B

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Por otra parte, la condición de apoyo mediante el cuchillo de cargas en A resulta en imponer que la velocidad de este punto lleve la dirección de la varilla, lo que constituye un enlace anholónimo:

$$-\dot{x}_A(y_B - y_A) + \dot{y}_A(x_B - x_A) = 0.$$

El sistema posee por tanto 2 grados de libertad. Podrían escogerse coordenadas generalizadas que eliminen el enlace holónimo (aunque no el anholónimo). Tomaremos para ello las coordenadas del centro de masas (x, y) y el ángulo θ formado con el eje x , un total de tres coordenadas. En función de éstas, la velocidad de A se expresa como $\mathbf{v}_A = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}$, y la normal a la varilla es $\mathbf{n} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$. La condición del enlace es $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = 0$, resultando

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0. \quad (7.3)$$

De esta forma, el sistema queda definido por tres coordenadas generalizadas sujetas a una ecuación de enlace anholónomo. A pesar de que tiene dos grados de libertad, debido a la naturaleza de este enlace no es posible definir explícitamente un conjunto de dos coordenadas libres. \square

7.2. Ecuaciones de Lagrange

7.2.1. El Principio de D'Alembert en Coordenadas Generalizadas

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. El principio de D'Alembert (6.65) expresa:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (7.4)$$

En esta expresión \mathbf{f}_i incluyen sólo las fuerzas activas, excluyendo las reacciones de los enlaces lisos.

Considerando una variación « δ » (es decir, infinitesimal y a tiempo constante) de las coordenadas en (7.1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Nótese que en esta expresión no existe término $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$, ya que $\delta t = 0$ para un desplazamiento virtual. La variación δ se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento. En esto difiere de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que serían

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo (7.5) en (7.4) y reorganizando el orden de las sumas i, j :

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.6)$$

Analícemos con mayor detalle cada uno de los dos términos dentro del corchete en esta expresión. El primero define unos coeficientes escalares que

llamaremos «Fuerzas generalizadas»:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Es inmediato comprobar que Q_j son precisamente los coeficientes de δq_j en la expresión del trabajo virtual δW :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \sum_j^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (7.8)$$

El segundo término de (7.6) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.9)$$

Para lo que sigue, debemos precisar que consideraremos la dependencia funcional de todas las magnitudes cinéticas sobre el conjunto de variables independientes (q_j, \dot{q}_j, t) . Esta aclaración precisa el significado de las derivadas parciales. Así, $\partial/\partial q_j(\cdot)$ indicará la derivada parcial respecto de la coordenada q_j , manteniéndose constantes el resto de coordenadas q_k ($k \neq j$) así como las velocidades \dot{q}_j y el tiempo t .

Para continuar el desarrollo de la expresión (7.9), establezcamos antes dos igualdades que será necesario emplear:

1. $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$.

Demostración. En efecto, desarrollando el primer término,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\overbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k}^{\dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad \square$$

2. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$.

Demostración. En efecto, desarrollando ambos términos por separado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \end{aligned}$$

siendo ambas expresiones iguales, por la igualdad de las derivadas cruzadas. \square

Empleando estos dos resultados y la definición de energía cinética, $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$, la ecuación (7.9) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

Finalmente, empleando (7.7) y (7.10), el principio de D'Alembert (7.4) queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles}} \quad (7.11)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como *ecuación fundamental de la dinámica*.

Conviene notar que en (7.11) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes Q_j , *fuerzas generalizadas*, calculadas directamente a partir de la expresión (7.7) o como coeficientes del trabajo virtual δW (7.8) según se ha dicho. Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de Q_j tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual.

7.2.2. Forma básica de las Ecuaciones de Lagrange

La expresión (7.11) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el caso en que *todos los enlaces sean holónomos*, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres $\{q_j\}$, en el que las variaciones $\{\delta q_j\}$ se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (7.11) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las $\{\delta q_j\}$ ha de anularse:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (7.12)$$

Estas expresiones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, en su forma básica.

OBSERVACIONES:

- En (7.12) existe una ecuación por cada grado de libertad, por lo que la elección de coordenadas generalizadas libres conduce directamente al mínimo número de ecuaciones dinámicas.
- Se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden (al existir derivadas temporales de los términos $\partial T/\partial \dot{q}_j$, que dependen, a su vez, de \dot{q}_j).
- De las ecuaciones (7.12) han quedado eliminadas todas las reacciones de enlace que no realizan trabajo virtual, correspondientes a los enlaces lisos. Esto contrasta con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos en las que, en principio, deben considerarse también estas reacciones.
- Una vez evaluadas las expresiones de T y de Q_j , las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener de forma automática sin más que aplicar las reglas analíticas de derivación correspondientes a (7.12). Es posible incluso automatizar su obtención mediante una programación adecuada de sistemas de matemática simbólica, como MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.
- El significado físico del término $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$ en (7.12) es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tomemos como coordenadas las propias coordenadas vectoriales \mathbf{r}_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j.$$

- Por último, los términos $\partial T/\partial q_j$ pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección de coordenadas generalizadas $\{q_j\}$. En caso de que éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores $\{\mathbf{r}_i\}$, desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas Q_j en la dirección de q_j .

7.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial V ,

$$\mathbf{f}_i = - \mathbf{grad}_i V = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (7.13)$$

En lo que sigue, admitimos la hipótesis de que el potencial V depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo², pero no de las velocidades³:

$$V = V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i, t).$$

Sustituyendo (7.13) y agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange (7.12) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se define la *función Lagrangiana* como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

al no depender V de las velocidades, se verifica $\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$. De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (7.14)$$

Estas expresiones constituyen las *ecuaciones de Lagrange* en su forma estándar, aplicables para sistemas en que las fuerzas provienen de un potencial.

Es necesario comprender la importancia de la función Lagrangiana L en la caracterización dinámica de un sistema: basta con conocer su expresión, $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, para poder determinar a partir de ella las ecuaciones dinámicas (7.14); toda la información dinámica del sistema está por tanto contenida en la estructura de $L(q_j, \dot{q}_j, t)$.

EJEMPLO 7.4: Sea el problema de Poggendorf (ver ejemplo 6.9). Resolver por los métodos de la dinámica analítica, obteniendo las ecuaciones de Lagrange.

²Ya se ha comentado (apartado 2.1.3) que si el potencial no es constante (es decir, $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t \neq 0$), las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.

³En caso de existir fuerzas de tipo electromagnético, esta suposición no es válida, ya que las fuerzas dependen de la velocidad con la que se mueven las partículas con carga. Es posible definir un potencial generalizado dependiente de la velocidad para este caso, y establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, aunque que no trataremos aquí este aspecto para no complicar el desarrollo.

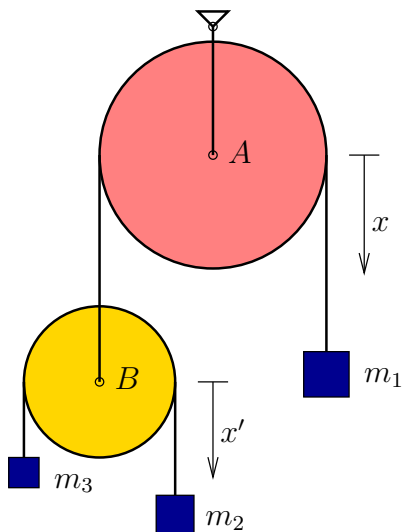


Figura 7.5: Ejemplo 7.4; Problema de Poggendorf.

Solución. El sistema es conservativo, ya que las poleas son lisas y sólo actúa la gravedad. La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3. \quad (7.15)$$

El sistema tiene en realidad dos grados de libertad sólo, ya que existe un enlace holónomo (6.68), que permite escribir:

$$x_3 = -2x_1 - x_2; \quad \dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2. \quad (7.16)$$

Eliminando \dot{x}_3 de (7.15), se expresa la Lagrangiana en función de coordenadas libres:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 - m_3g(2x_1 + x_2). \quad (7.17)$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtienen calculando las derivadas de L :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow (m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = m_1g - 2m_3g; \quad (7.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + 2m_3\ddot{x}_1 = m_2g - m_3g. \quad (7.19)$$

Estas ecuaciones coinciden con las que se obtuvieron antes (6.72) mediante la aplicación directa del principio de D'Alembert. \square

EJEMPLO 7.5: Para el problema del semidisco calculado anteriormente mediante las ecuaciones de Newton-Euler (6.7), obtener la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange en función del grado de libertad θ (figura 7.6).

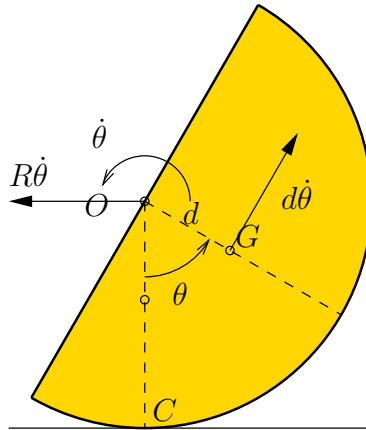


Figura 7.6: Ejemplo 7.5. Semidisco que rueda sin deslizar en una configuración genérica, definida por el ángulo θ . La distancia del centro de masas G vale $d = \frac{4R}{3\pi}$.

Solución. El sistema es conservativo, ya que no se produce deslizamiento en la base y las únicas fuerzas que trabajan son las de la gravedad. Está definido por un único grado de libertad (θ), ya que la condición de rodadura restringe dos grados de libertad de los teóricos tres que tendría un sólido rígido en movimiento plano.

La función Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

siendo

$$\begin{aligned} I_G &= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2; \\ y_G &= R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta; \\ v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \dot{\theta}^2 - 2R\frac{4R}{3\pi} \dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(La expresión de v_G se obtiene considerando que es la suma del arrastre del centro del arco $R\dot{\theta}$ y la rotación de G alrededor del mismo $d\dot{\theta}$.)

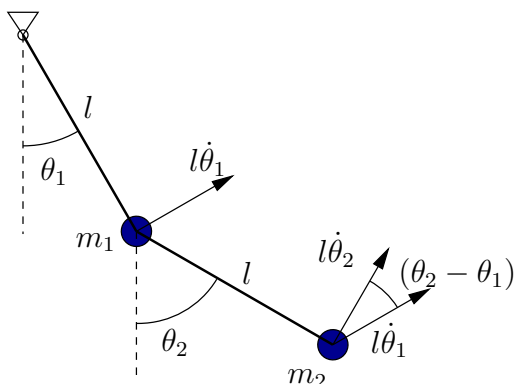


Figura 7.7: Ejemplo 7.6.

Desarrollando la expresión resulta

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \dot{\theta}^2 - MRg \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right). \quad (7.20)$$

Realizando las derivadas se obtiene la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} MR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta = -MRg \frac{4}{3\pi} \sin \theta. \quad (7.21)$$

De esta ecuación se puede despejar la aceleración,

$$\ddot{\theta} = - \frac{8 \left(\dot{\theta}^2 + g/R \right) \sin \theta}{9\pi - 16}. \quad (7.22)$$

Se trata de la misma ecuación obtenida antes (6.47), aunque ahora de forma mucho más sencilla. \square

EJEMPLO 7.6: El péndulo doble de la figura está formado por dos varillas rígidas y sin masa, con sendas masas (m_1, m_2) en los extremos. Las varillas están unidas mediante articulaciones entre sí y a un punto fijo. El movimiento se desarrolla en un plano vertical, sometido al peso propio. Determinar las ecuaciones de la dinámica, empleando como coordenadas (libres) los ángulos (θ_1, θ_2) (ver figura 7.7).

Solución. El sistema es conservativo y descrito mediante coordenadas libres. La velocidad de m_1 es $l\dot{\theta}_1$ y la de m_2 se halla como suma de los dos

vectores (figura 7.7) $l\dot{\theta}_1$ y $l\dot{\theta}_2$ que forman un ángulo $(\theta_2 - \theta_1)$. Con todo, la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] + m_1gl \cos \theta_1 + m_2g(l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2). \quad (7.23)$$

Derivando la Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \Rightarrow (m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + m_2l^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 = 0 \quad (7.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Rightarrow m_2l^2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2l^2\ddot{\theta}_2 + m_2l^2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gl \sin \theta_2 = 0. \quad \square \quad (7.25)$$

Unicidad de la función Lagrangiana

La elección de una función Lagrangiana para representar un sistema no es única. Para comprender esto basta considerar un potencial distinto, que difiera en una constante aditiva ($V' = V + \text{cte.}$), lo que, como sabemos, es equivalente por completo. Por tanto, dos Lagrangianas que difieran en una constante también son equivalentes. Este resultado se puede generalizar, ya que es posible comprobar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada total de alguna función que dependa exclusivamente de coordenadas y tiempo, son equivalentes⁴.

En efecto, sean L y L' tales que

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{d}{dt}F(q_j, t); \quad (7.26)$$

siendo $F(q_j, t)$ una función cualquiera de q_j y t pero no de las velocidades \dot{q}_j . Por la definición funcional de F , desarrollando la derivada temporal:

$$L' - L = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

⁴Las transformaciones que ocasionan una variación de L de este tipo se denominan «transformaciones de gauge», término proveniente del inglés, aunque la traducción directa en castellano «transformaciones de galga» no parece tampoco muy atractiva.

y las contribuciones de este término en las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{dF}{dt} \right) \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ \blacksquare \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{dF}{dt} \right] &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

Como se ve, al restar ambos términos en (7.14) se anulan entre sí, y el resultado neto, de emplear L' , son las mismas ecuaciones dinámicas que para L .

Caso de fuerzas no conservativas

En los casos en que existan algunas fuerzas que procedan de un potencial ($Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V / \partial q_j$) y otras que no (Q_j^N):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^N = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N,$$

es posible definir una Lagrangiana parcial $L = T - V$, resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N, \quad j = 1, \dots, n} \quad (7.27)$$

donde sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas Q_j^N .

Transformaciones admisibles de coordenadas

Supongamos un cambio de coordenadas definido mediante una función biunívoca $G : \{q_j\} \mapsto \{\hat{q}_j\}$, suave⁵. Llamaremos a su inversa $g = G^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= G_i(q_j, t); \quad q_i = g_i(\hat{q}_j, t) \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\left| \frac{\partial q_i}{\partial \hat{q}_j} \right| \neq 0. \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones en lo que sigue, definimos la *derivada variacional* de L respecto a q_j como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right); \quad (7.28)$$

⁵ es decir, con derivadas continuas hasta el orden que sea preciso

En función de ella, las ecuaciones de Lagrange (7.14) quedan expresadas simplemente como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Estas ecuaciones son equivalentes a $\delta \hat{L} / \delta \hat{q}_k = 0$, siendo $\hat{L} = L \circ g$, es decir $\hat{L}(\hat{q}_j, \dot{\hat{q}}_j, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t)$, es la Lagrangiana expresada en las nuevas coordenadas.

Demostración. Desarrollando los términos de $\delta \hat{L} / \delta \hat{q}_k$,

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \hat{q}_k} \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}_k} &= \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right]. \end{aligned}$$

Restando ambas resulta

$$\frac{\delta \hat{L}}{\delta \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\delta L}{\delta q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k},$$

y al ser $\left| \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} \right| \neq 0$, queda demostrada la equivalencia. \square

7.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento

Energía cinética y momentos generalizados

La energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Esta propiedad se conserva al expresarla en coordenadas generalizadas. En efecto, desarrollando la expresión,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

siendo T_2 , T_1 y T_0 términos homogéneos en las \dot{q}_j de tipo cuadrático, lineal e independiente respectivamente. Sus expresiones son

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (7.30)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n a_k \dot{q}_k, \quad \text{siendo } a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (7.31)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (7.32)$$

En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas ($\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$), la expresión de la energía cinética será cuadrática homogénea en las \dot{q}_j :

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (7.33)$$

Esto sucederá si no se emplean sistemas de coordenadas móviles ni hay enlaces reónomos (es decir, dependientes del tiempo).

Por otra parte, los momentos generalizados se definen como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n); \quad (7.34)$$

admitiendo que el potencial no depende de las velocidades, a partir de las expresiones (7.29, 7.30, 7.31, 7.32),

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j \quad (7.35)$$

Forma general de las ecuaciones

En función de los momentos generalizados, las ecuaciones de Lagrange (7.14) pueden reescribirse como

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.36)$$

Derivando (7.35) se obtiene

$$\dot{p}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t};$$

por otra parte, teniendo en cuenta las expresiones (7.29), (7.30) y (7.31),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad siguiente,

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_k,$$

resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \\ + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Esta expresión se puede simplificar introduciendo los coeficientes

$$[kl, j] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right), \quad (7.38)$$

que denominaremos «*símbolos de Christoffel de primera especie*»⁶, aplicados a la forma cuadrática que define T_2 . Por otra parte, podemos definir unos coeficientes hemisimétricos

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (7.39)$$

que darán lugar a fuerzas giroscópicas como veremos más adelante. De esta forma, las ecuaciones (7.40) pueden escribirse como

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \quad (7.40)$$

⁶Esta definición es la misma que se realiza en geometría diferencial de superficies, en la que para una superficie definida mediante coordenadas curvilíneas $\mathbf{r}(q_i)$ se emplean los términos $a_{kl} = (\partial \mathbf{r} / \partial q_k) \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial q_l)$, correspondiendo a los coeficientes de la métrica asociada, que es una forma cuadrática.

Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes $[a_{ij}]$ no puede ser singular, al ser la energía cinética definida positiva, podrían eliminarse las aceleraciones de las ecuaciones (7.40), quedando

$$\ddot{q}_j = f_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.41)$$

(Hemos empleado los símbolos $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ para denotar a los conjuntos de coordenadas o velocidades generalizadas respectivamente).

7.2.5. Integrales Primeras

Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas en la forma (7.36), si la función Lagrangiana L no depende explícitamente de una coordenada q_j —es decir, $\partial L / \partial q_j = 0$ —, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \quad (7.42)$$

Se dice entonces que q_j es una «*coordenada cíclica*» o ignorable. Las expresiones (7.42) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Se puede interpretar el significado de las coordenadas cíclicas considerando que, si una coordenada q_j es cíclica, se puede sustituir (q_j) por $(q_j + C)$, siendo C una constante, y las ecuaciones no varían. Esto se debe a que L no depende de q_j , y por otra parte \dot{q}_j es invariante ante ese cambio. Por el contrario, hacemos notar que el hecho de que una coordenada sea cíclica no quiere decir que su valor sea constante, ni tampoco la velocidad generalizada correspondiente.

Sin embargo, para una coordenada cíclica q_j , será posible eliminar de las ecuaciones la velocidad correspondiente \dot{q}_j , empleando la integral primera (7.42). Si el sistema tiene n grados de libertad, de los que k corresponden a coordenadas cíclicas, se podrán eliminar éstas y quedar descrito el movimiento mediante dos conjuntos desacoplados de ecuaciones: k ecuaciones (7.42) para las coordenadas cíclicas, y $(n - k)$ ecuaciones (7.14) para las demás coordenadas. El problema se ve considerablemente simplificado, procediéndose en primer lugar a resolver estas últimas $(n - k)$ ecuaciones; una vez resueltas, se obtiene el valor de las k coordenadas cíclicas. Más adelante veremos un método general de proceder a esta reducción, el método de Routh (apartado 12.7).

Es posible extender el concepto de coordenada cíclica para el caso en que las fuerzas no procedan de un potencial. Para ello se define el momento generalizado en dirección j como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La condición de coordenada cíclica será entonces:

$$\text{si } \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}$$

Integral de Jacobi o de la Energía

En ocasiones es posible obtener una integral primera cuyo significado está relacionado con la energía total del sistema a partir de la función Lagrangiana. Para ello, observamos que la derivada total de L respecto del tiempo es

$$\frac{d}{dt}L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Sustituyendo a partir de (7.14), $\partial L / \partial q_j = \frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{q}_j)$, y operando:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada «integral de Jacobi»:

$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{cte}$$

(7.43)

OBSERVACIONES:

- En el caso en que $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$, según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en \dot{q}_j . Entonces, a partir de (7.29, 7.30):

$$T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

y por tanto

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que h (7.43) coincide en este caso con la energía total, $T + V$.

- Pudiera darse el caso de que $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ y, por tanto, $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$, pero que esta expresión no se mantenga constante por ser $\partial L / \partial t \neq 0$. Esto último ocurrirá si $\partial V(q_j, t) / \partial t \neq 0$, siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico aunque las fuerzas procedan de un potencial.
- Por otra parte, en los casos en que existan sistemas de coordenadas móviles se verificará, como se ha dicho, $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$ y por tanto $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$. Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si $\partial L / \partial t = 0$), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía. Un ejemplo típico de esta situación es el de una referencia móvil pero inercial, con velocidad de traslación constante y rectilínea (cf. ejemplo 7.10)

Conservación de la energía.— Otra manera —más directa— de obtener una integral de la energía es observando que, si las fuerzas son todas conservativas, la energía se mantiene constante (6.16). En este caso, basta con expresar dicha ecuación en función de las coordenadas generalizadas para obtener, en el marco de la dinámica analítica, la integral primera de la energía, equivalente a (7.43). Recordemos que para que las fuerzas sean conservativas, además de provenir de un potencial, éste debe ser estacionario ($\partial V / \partial t = 0$). En función de las coordenadas generalizadas, esta condición se impone de la siguiente forma:

$\text{si } \exists V \text{ tal que } Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j}, \text{ siendo } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(q_j, t) = \mathbf{0}$ \Downarrow $E = T + V = \text{cte.}$

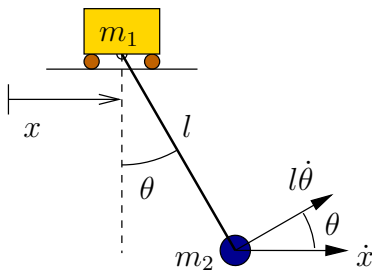


Figura 7.8: Ejemplo 7.7.

Hacemos notar que, en la expresión anterior, para establecer la constancia del potencial V , ha sido necesario añadir la condición $(\partial \mathbf{r}_i / \partial t)(q_j, t) = \mathbf{0}$, es decir, que no existan sistemas de coordenadas móviles. Otra manera más compacta de expresar la constancia de V sería en función de las coordenadas vectoriales, mediante la condición $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t = \mathbf{0}$.

Por el contrario, en el caso en que el potencial V no sea constante, aplicando el principio de la energía cinética (6.15),

$$dT = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = -dV + \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt$$

por lo que

$$d(T + V) = \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

es decir, no se conserva la energía $T + V$. Hacemos la observación de que en la expresión anterior se emplea la derivada parcial respecto del tiempo en relación con las coordenadas vectoriales (absolutas), que es en general distinta de la derivada cuando se consideran coordenadas generalizadas (posiblemente relativas o móviles):

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial V(q_j, t)}{\partial t}.$$

EJEMPLO 7.7: Sea el sistema formado por la masa m_1 que puede deslizar libremente sobre una recta horizontal, y m_2 unida mediante una varilla rígida y sin masa a m_1 , pudiendo girar libremente en un plano vertical.

- Considerando los parámetros (libres) (x, θ) (ver figura 7.8), obtener las ecuaciones de Lagrange e integrales primeras que hubiere.
- Considerando ahora que se impone una velocidad constante v a m_1 , discutir la existencia de integrales primeras.

Solución.

a.— Desarrollando la función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2gl\cos\theta. \quad (7.44)$$

Observamos que no depende explícitamente de x , por lo que ésta es una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) = (\text{cte.}) \quad (7.45)$$

La ecuación de Lagrange en la otra coordenada es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad m_2l^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{x}l\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (7.46)$$

En esta ecuación aparece tanto θ como la coordenada cíclica x . Es posible eliminar esta última para obtener una ecuación diferencial función exclusivamente de las coordenadas no cíclicas. Para ello, en primer lugar se despeja derivando (7.45)

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(-l\ddot{\theta}\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta\right),$$

y sustituyendo en (7.46) resulta finalmente:

$$m_2l\ddot{\theta}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\theta\right) + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (7.47)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas luego la energía total E se conserva:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - m_2gl\cos\theta \quad (\text{cte.}). \end{aligned} \quad (7.48)$$

También puede razonarse que la Lagrangiana no depende del tiempo explícitamente, por lo que la integral de Jacobi h (7.43) es constante, y además coincide con la energía E al no haber coordenadas móviles.

b.— El sistema queda ahora con el único grado de libertad θ . La lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta}\cos\theta) + m_2gl\cos\theta. \quad (7.49)$$

Ahora la energía total no se conserva, ya que se realiza un trabajo externo para mover m_1 con la velocidad impuesta v . Sin embargo, L no depende explícitamente del tiempo por lo que existe la integral de Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= -\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(-v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta} \cos \theta) - m_2gl \cos \theta \quad (\text{cte.}) \quad \square \end{aligned} \quad (7.50)$$

7.2.6. Teorema de Noether

Sea un sistema autónomo⁷, con Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j)$. Suponemos que existe una familia de transformaciones $q_j \mapsto h^s(q_j)$, función de un parámetro continuo $s \in \mathbb{R}$, de forma que L es invariante frente a ellas, y provienen de forma continua de la identidad $h^{s=0}(q_j) = q_j$. Existe entonces una integral del movimiento,

$$I(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} h^s(q_k) \Big|_{s=0}. \quad (7.51)$$

Demostración. Sea $q_j(t)$ la solución del movimiento. Por la hipótesis hecha, $q_j(s, t) = h^s(q_j(t))$. Derivando:

$$0 = \frac{d}{ds} L(q_j(s, t), \dot{q}_j(s, t)) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right].$$

Por las ecuaciones de Lagrange, $\partial L / \partial q_k = (d/dt)(\partial L / \partial \dot{q}_k)$;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} L = \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) \right] = \frac{d}{dt} I(q_j, \dot{q}_j), \end{aligned}$$

luego $I(q_j, \dot{q}_j)$ es una constante del movimiento. \square

EJEMPLO 7.8: Sea un sistema invariante frente a movimientos de traslación según una dirección determinada \mathbf{e} . Demostrar que la componente de la cantidad de movimiento según esa dirección es una constante del movimiento.

⁷es decir, aislado, lo que implica $\partial L / \partial t = 0$

Solución. En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje x según la dirección dada (es decir, tomamos $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}$). Podemos definir una transformación que cumple los requisitos del teorema de Noether mediante

$$h^s : \mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}'_i + s \mathbf{i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} = \mathbf{i}; I = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = P_x. \quad \square$$

EJEMPLO 7.9: Sea un sistema invariante frente a rotaciones alrededor de un determinado eje (O, \mathbf{e}). Demostrar que la componente del momento cinético según ese eje es una constante del movimiento.

Solución. En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje Oz según la dirección indicada (es decir, tomamos $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}$). La transformación es

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \mapsto \mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos s + y_i \operatorname{sen} s \\ y'_i = -x_i \operatorname{sen} s + y_i \cos s \\ z'_i = z_i \end{cases}$$

$$\left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \mathbf{r}'_i \right|_{s=0} = (y_i, -x_i, 0) = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k}$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = -H_z \quad \square$$

7.2.7. Sistemas naturales

Llamaremos *sistema natural* a un sistema descrito por las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar (7.14), en el que exista la integral de Jacobi como constante del movimiento ($\partial L / \partial t = 0$) y la energía cinética sea función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas ($T = T_2$).

Como se ha comentado antes (apartado 7.2.5), en este caso la integral de Jacobi resulta tener un significado físico claro, la energía total del sistema,

$$h = T + V.$$

Al conservarse h se mantiene igualmente constante la energía, resultando conservativo desde el punto de vista físico.

Teniendo en cuenta que en un sistema natural los coeficientes en las ecuaciones (7.31, 7.30) cumplen $a_j = 0$ y $\partial a_{ij} / \partial t = 0$, las ecuaciones del

movimiento tienen una expresión considerablemente más sencilla que en el caso general (7.40), resultando

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1 \dots, n). \quad (7.52)$$

En esta expresión se observa que las velocidades generalizadas \dot{q}_j intervienen únicamente en términos cuadráticos.

Podemos observar que un sistema holónomo con integral de Jacobi, en el que fuese $T_1 = 0$ pero $T_0 \neq 0$, tiene ecuaciones del movimiento muy similares a (7.52), ya que T_0 puede considerarse agrupado con la energía potencial V ,

$$V' = V - T_0,$$

de forma que la energía cinética restante es una expresión cuadrática homogénea en las \dot{q}_j , al igual que en un sistema natural.

EJEMPLO 7.10: Sea un sistema formado por una masa y un resorte lineal, capaz de moverse en una dirección, unido en su base a un punto que se tiene un movimiento impuesto con velocidad uniforme v_0 . Sea l_0 la longitud natural del muelle, k su constante, y x la elongación respecto de la natural. Discutir la existencia de una integral primera de la energía.

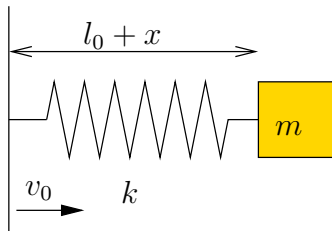


Figura 7.9: Sistema formado por una masa m y un muelle de constante k y longitud natural l_0 , capaz de moverse en dirección x , cuya base tiene un movimiento impuesto de velocidad constante v_0 .

Solución. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (v_0 + \dot{x})^2$$

por lo que sus componentes homogéneas son

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2; \quad T_1 = m v_0 \dot{x}; \quad T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2} k x^2.$$

Se comprueba inmediatamente que $\partial L/\partial t = 0$, por lo que existe la integral de Jacobi, que vale

$$h = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

En este ejemplo, T_0 es constante, por lo que la conservación de h conduce también a la conservación de $T_2 + V$, aunque ambas constantes tengan distinto valor.

Otro procedimiento para analizar este ejemplo sería, considerando que el sistema de referencia móvil con la base es inercial, realizar los cálculos relativos a él:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \\ V' &= \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned}$$

En este caso obtendríamos un sistema natural, en el que se conserva la energía total $T' + V'$. Observamos que ésta coincide con $T_2 + V$ relativa al sistema fijo inicial, que ya habíamos visto se conservaba. \square

7.2.8. Sistemas Giroscópicos

En el desarrollo explícito de las ecuaciones de Lagrange para un sistema holónomo dado anteriormente (7.40),

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j]\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (7.53)$$

los términos $\gamma_{jk}\dot{q}_k$ se denominan *términos giroscópicos*, dando lugar si aparecen a un *sistema giroscópico*. Se trata de coeficientes hemisimétricos, dados por (7.39),

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

donde a_j son los coeficientes definidos en (7.31),

$$a_k = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Por tanto, para que los a_j no sean nulos, al menos una de las ecuaciones de la relación de coordenadas $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$ debe ser función explícita tanto de

q_j como de t . Además, para que existan términos giroscópicos γ_{ij} , algunos de los coeficientes a_j deben ser funciones explícitas de las coordenadas q_j , como ocurre cuando hay un enlace móvil.

Una característica importante de los sistemas giroscópicos es el acoplamiento del movimiento entre dos o más coordenadas. En efecto, la *fuerza giroscópica* asociada en la ecuación (7.53) es

$$Q_j^{\text{gir}} = - \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k. \quad (7.54)$$

Al ser $\gamma_{jj} = 0$ (j no sumado), la fuerza Q_j^{gir} puede deberse a todos los componentes de las velocidades generalizadas excepto a \dot{q}_j , lo que produce necesariamente un acoplamiento.

Por otra parte, el trabajo realizado por estas fuerzas es

$$\frac{dW^{\text{gir}}}{dt} = \sum_{j,k=1}^n Q_j^{\text{gir}} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0, \quad (7.55)$$

al ser γ_{jk} hemisimétricos. Es decir, cualquiera que sea el movimiento, las fuerzas giroscópicas no realizan trabajo. En esto difieren de las fuerzas disipativas viscosas que pueden aparecer también en las ecuaciones del movimiento, que serían también términos proporcionales a \dot{q}_j , pero que por su propia naturaleza desarrollan un trabajo neto necesariamente negativo.

Las fuerzas giroscópicas aparecen en sistemas físicos que contengan alguna referencia móvil de tipo rotatoria para la definición de coordenadas. Estas fuerzas pueden servir para estabilizar el movimiento de ciertos sistemas alrededor de trayectorias dinámicas estacionarias, como es el caso de la peonza simétrica para su movimiento de precesión uniforme o la brújula giroscópica (capítulo 9).

EJEMPLO 7.11: Un disco circular de radio a , situado en un plano horizontal, tiene un movimiento de rotación impuesto alrededor de su centro con velocidad constante ω . En su perímetro está anclado un muelle, de longitud natural r_0 , que en su otro extremo tiene una masa m . Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar los términos giroscópicos.

Solución. Para calcular la energía cinética debemos expresar antes la velocidad del punto P , lo que puede hacerse a través del movimiento relativo al disco,

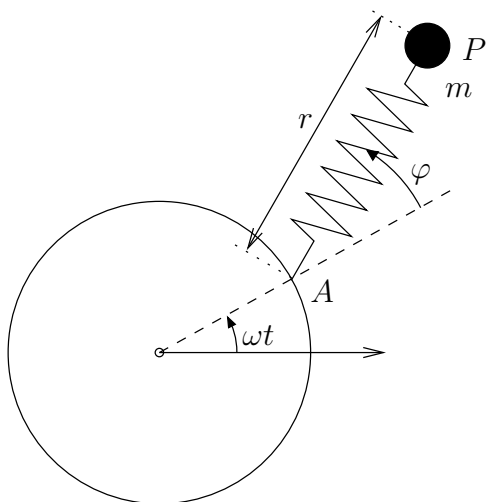


Figura 7.10: Disco que gira con velocidad constante ω , con un resorte fijado en su perímetro, al cual está sujeta a su vez una partícula de masa m .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P|A} \\ &= [-a\omega \operatorname{sen}(\omega t) - r(\omega + \dot{\varphi}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{r} \cos(\omega t + \varphi)] \mathbf{i} \\ &\quad + [a\omega \cos(\omega t) + r(\omega + \dot{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) + \dot{r} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

La expresión de la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} [a^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 + 2ar\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi + 2a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi] - \frac{k}{2}(r - r_0)^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - 2mr\omega\dot{\varphi} - mr\omega^2 - ma\omega^2 \cos \varphi + k(r - r_0) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + 2mr\omega\dot{r} + mar\omega^2 \operatorname{sen} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación —respecto a r — el término giroscópico es $-2mr\omega\dot{\varphi}$, y en la segunda ecuación —respecto a φ — el término correspondiente es $+2mr\omega\dot{r}$. La matriz de coeficientes hemisimétricos es por tanto

$$[\gamma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -2mr\omega \\ 2mr\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos términos son los que corresponden al desarrollo de la energía cinética,

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0; \\ T_2 &= \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \\ T_1 &= m(r^2\omega\dot{\varphi} + ar\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi), \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$a_r = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} = ma\omega r \sin \varphi, \quad a_\varphi = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\omega + mar\omega \cos \varphi;$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial a_r}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \dot{r}} = -2mr\omega, \quad \gamma_{\varphi r} = -\gamma_{r\varphi} = 2mr\omega \quad \square$$

7.3. Potencial dependiente de la velocidad

En las ecuaciones de Lagrange (7.14) y en la discusión posterior se admitió como base de partida que el potencial V no dependía de las velocidades. Sin embargo, esta restricción no es siempre necesaria, pudiendo existir casos en que se defina un potencial dependiente de las velocidades y se mantenga la forma estándar de las ecuaciones de Lagrange.

Recordemos la forma básica de las ecuaciones de Lagrange (7.12),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.56)$$

Supongamos ahora que las fuerzas generalizadas Q_j provienen de un potencial dependiente de la velocidad $U(q_j, \dot{q}_j, t)$, de acuerdo con

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.57)$$

Comprobamos inmediatamente que, llamando $L = T - U$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.58)$$

Aplicación: fuerzas electromagnéticas

Como ejemplo básico de potencial dependiente de la velocidad consideraremos las fuerzas electromagnéticas actuando sobre una partícula cargada. Si la carga eléctrica es e y la velocidad \mathbf{v} , estas fuerzas son

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (7.59)$$

donde \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico y \mathbf{B} el vector de inducción magnética. Éstos se obtienen respectivamente de un potencial escalar ϕ y de un potencial vector \mathbf{A} de acuerdo con

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (7.60)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad (7.61)$$

donde tanto ϕ como \mathbf{A} son en general funciones del tiempo. En función de éstos, la fuerza vale

$$\mathbf{F} = e \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right). \quad (7.62)$$

Veamos cómo puede obtenerse esta fuerza de un potencial U , dependiente de la velocidad. Sea (x, y, z) la posición de la partícula en coordenadas cartesianas. De entrada el término $-e\nabla\phi$ corresponde a la energía potencial ordinaria V .

Las componentes cartesianas del término $\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ son

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{k,l,m=1}^n \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l}; \quad (7.63)$$

consideremos —por ejemplo— la componente x (índice de coordenada 1):

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \end{aligned}$$

donde se ha añadido y restado $v_x(\partial A_x/\partial x)$ en el último término. A su vez, \mathbf{A} es función de coordenadas y tiempo, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right]. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Resulta por tanto

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (7.65)$$

Generalizando para una componente genérica x_i , la fuerza electromagnética es por tanto

$$F_i = e \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_i}{dt} \right], \quad (7.66)$$

y considerando asimismo (7.64) generalizada según una dirección x_i , se obtiene

$$F_i = e \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) \right]. \quad (7.67)$$

Tomando ahora

$$U = e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (7.68)$$

se obtiene finalmente

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (7.69)$$

de acuerdo con (7.57). Resulta por tanto una función Lagrangiana de la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (7.70)$$

Esta forma de la Lagrangiana permite observar que el momento de una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (7.71)$$

Este resultado llama la atención, ya que indica que una parte del momento está asociado al propio campo electromagnético. En el caso en que una coordenada x_i sea cíclica (es decir, $\partial L / \partial x_i = 0$), es la componente correspondiente de este momento generalizado, en lugar del momento mecánico —cantidad de movimiento—, la que se conserva.

La representación de las fuerzas electromagnéticas debidas a la inducción magnética, $e\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$, es similar a las fuerzas giroscópicas descritas anteriormente (apartado 7.2.8). En efecto, la expresión (7.63) se puede escribir como

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{x}_j, \quad (7.72)$$

donde se han empleado los coeficientes

$$\gamma_{ij}^{\text{em}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l,m=1}^n e \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \frac{\partial A_m}{\partial x_l}. \quad (7.73)$$

Se comprueba inmediatamente que $\gamma_{ij}^{\text{em}} = -\gamma_{ji}^{\text{em}}$. Por tanto, esta representación es análoga a la de los términos de fuerzas giroscópicas en (7.53). Al igual que entonces, debido a la hemisimetría de los coeficientes, las fuerzas debidas a la inducción magnética no desarrollan trabajo,

$$\frac{dW^{\text{em}}}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{q}_i \dot{q}_j = 0. \quad (7.74)$$

7.4. Sistemas con Ligaduras

Sea un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ no libres, gobernado por la ecuación fundamental de la dinámica (7.11). Si el sistema admite potencial V se puede escribir esta última ecuación en función de la Lagrangiana L :

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.75)$$

Las variaciones $\{\delta q_j\}$ no son libres, sino que están sujetas a restricciones o enlaces, por lo que no se pueden eliminar de la ecuación anterior.

No resulta posible elegir un conjunto de coordenadas libres si existen enlaces anholónomos en los que intervienen las velocidades, del tipo:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$$

Restringiremos nuestra atención a las ligaduras anholónomas denominadas *catástóficas*, caracterizadas por una expresión lineal en \dot{q}_j :

$$\sum_{j=1}^n A_j \dot{q}_j + C = 0.$$

De forma equivalente, en función de variaciones infinitesimales:

$$\sum_{j=1}^n A_j dq_j + C dt = 0 \quad (7.76)$$

En la expresión anterior tanto A_j como C serán a su vez funciones de q_j y de t ; en caso de que fuesen constantes, admitiría una integral directa dando lugar a una expresión holónoma, por lo que la ligadura sería anholónoma sólo en apariencia:

$$A_j, C \text{ constantes} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n A_j (q_j - (q_j)_0) + C(t - t_0) = 0$$

Además de los sistemas con ligaduras anholónomas, en que forzosamente se han de formular los enlaces de forma explícita, en ocasiones nos interesará formular de esta manera una ligadura, aunque sea holónoma. Como veremos, así será posible calcular la reacción de enlace, que de otra manera no entraría en las ecuaciones. De esta manera, una ligadura holónoma $\Phi(q_j, t) = 0$ es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

7.4.1. Método de los Multiplicadores de Lagrange

Supongamos un sistema mecánico, descrito mediante una función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, con:

- n coordenadas generalizadas $\{q_j, j = 1, \dots, n\}$
- k ecuaciones de ligadura $\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0, (i = 1, \dots, k)$

El sistema posee $(n - k)$ grados de libertad, por lo que las n coordenadas $\{q_j\}$ no forman un conjunto libre. En cualquier caso, se verifica la ecuación fundamental de la dinámica (7.75).

Los desplazamientos virtuales se toman en un instante fijo, sin variación del tiempo ($\delta t = 0$). Las condiciones de compatibilidad de éstos con los enlaces se obtienen sustituyendo $(\delta q_j, \delta t = 0)$ en (7.76):

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (7.77)$$

En sentido estricto no se puede decir sin embargo que los desplazamientos $\{\delta q_j\}$ que cumplan (7.77) sean compatibles con los enlaces, al estar éstos últimos definidos en función de velocidades que implican necesariamente una variación del tiempo. Sin embargo, las $\{\delta q_j\}$ que cumplen (7.77) no producen trabajo virtual con las fuerzas de enlace, que es lo que en realidad nos interesa.

Introducimos ahora unos multiplicadores $\{\lambda_i\}, i = 1, \dots, k$, de valores en principio arbitrarios. Multiplicaremos por ellos a cada una de las k expresiones (7.77), que seguirán valiendo cero:

$$\lambda_i \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{no sumado}) \quad (7.78)$$

Sumamos ahora para las k expresiones anteriores (la suma seguirá valiendo cero) e introducimos esta suma en (7.75), que no se verá alterado:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0 \quad (7.79)$$

donde para sacar factor común δq_j se ha intercambiado el orden de los sumatorios en i y j . Las expresiones (7.79) obtenidas dependen pues de $(n+k)$ parámetros: k multiplicadores $\{\lambda_i\}$ y n desplazamientos virtuales, $\{\delta q_j\}$.

Puesto que los multiplicadores λ_i son arbitrarios, podemos elegirlos de forma que se anulen k de los coeficientes del sumatorio en (7.79). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que éstos son los k primeros:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad (7.80)$$

restan pues en el sumatorio (7.79) tan sólo $(n-k)$ coeficientes no nulos. Puesto que el sistema posee $(n-k)$ grados de libertad, será posible elegir de forma libre los $(n-k)$ desplazamientos virtuales correspondientes, de manera que se deberán anular los coeficientes respectivos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (7.81)$$

Así, por un motivo o por otro, han de anularse los n coeficientes entre corchetes en (7.79). El sistema queda entonces planteado con $(n+k)$ ecuaciones,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (7.82)$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (7.83)$$

siendo las $(n+k)$ incógnitas $\{q_1, \dots, q_n\}$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Este planteamiento define las ecuaciones del movimiento en un caso general.

Sin embargo, en la práctica no suele ser aconsejable abordar directamente el problema de $(n+k)$ ecuaciones (7.82), (7.83) con $(n+k)$ incógnitas. Normalmente es posible eliminar de las ecuaciones los k multiplicadores λ_i , dejando un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Si las fuerzas no provienen de un potencial, el desarrollo sería enteramente análogo, pero partiendo de (7.11) en lugar de (7.75). Al final, las ecuaciones equivalentes a (7.82) serían:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esta expresión permite interpretar el significado físico del término $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}$. Se trata de la reacción en el enlace, en la dirección de la coordenada q_j . Ésta se suma a las fuerzas generalizadas Q_j , que recordamos provenía únicamente de las fuerzas activas.

EJEMPLO 7.12: Sea un aro de radio r y masa m que rueda sin deslizar, dentro de un plano vertical, sobre una recta inclinada un ángulo α . Obtener las ecuaciones dinámicas y la reacción tangencial de la recta sobre el disco que asegura la rodadura.

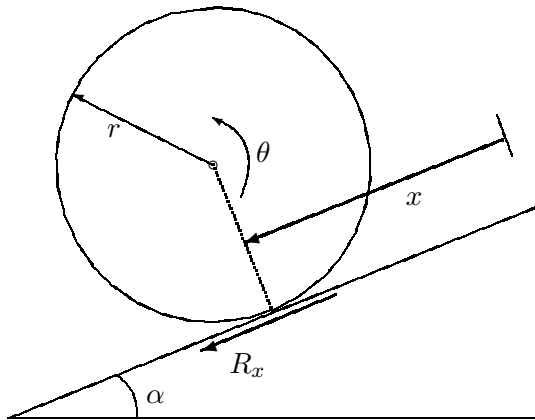


Figura 7.11: Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado. (nota: al resolver el problema la reacción R_x resulta con valor negativo, lo que quiere decir que tiene sentido opuesto al dibujado)

Solución. La ligadura impuesta por la rodadura es:

$$r d\theta - dx = 0.$$

En realidad esta ligadura es holónoma, pues se podría integrar, quedando

$$r\theta = x;$$

sin embargo, deseamos mantener la ligadura de forma explícita, lo que nos permitirá obtener después la reacción del enlace.

En función de las coordenadas (x, θ) (no libres), la Lagrangiana vale

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\theta}^2 + mgx \operatorname{sen} \alpha$$

Introducimos un multiplicador λ ; siguiendo la notación de (7.78)

$$\lambda (A_x \dot{x} + A_\theta \dot{\theta}) = 0, \quad \text{siendo } A_x = -1, A_\theta = r$$

Resultan pues de (7.82) y (7.83) tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - mg \operatorname{sen} \alpha + \lambda &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Lagrange}$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad \text{Ligadura}$$

Es posible eliminar λ de estas ecuaciones, derivando la ecuación de ligadura y entrando en la segunda ecuación de Lagrange:

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad mr\ddot{x} = \lambda r \quad \Rightarrow \quad \lambda = m\ddot{x}$$

Deduciéndose finalmente:

$$\lambda = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{x} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{\theta} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2r}.$$

La fuerza tangencial sobre el disco es por tanto:

$$R_x = \lambda A_x = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}(-1) = -\frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Hacemos notar que el signo negativo para R_x indica que tiene el sentido contrario al considerado positivo para x (descendiente según la recta en la figura), es decir, tiene sentido ascendente.

Podemos obtener también:

$$R_\theta = \lambda A_\theta = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}r,$$

que no es sino el momento debido a R_x .

Como comprobación, realizamos el mismo cálculo por los métodos de Newton-Euler:

$$\begin{aligned} \text{cantidad de movimiento: } m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \alpha + R_x \\ \text{momento cinético: } (mr^2)\frac{\ddot{x}}{r} &= -R_x r \end{aligned}$$

Es decir,

$$R_x = -m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad R_x = -\frac{1}{2}mg \operatorname{sen} \alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \operatorname{sen} \alpha. \quad \square$$

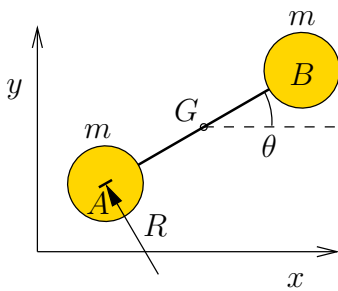


Figura 7.12: Sistema de dos partículas A y B, unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de A que materializa un enlace anholónomo.

EJEMPLO 7.13: Para el sistema descrito anteriormente en el ejemplo 7.3, Suponiendo que la masa de cada partícula vale m , obtener las ecuaciones del movimiento, y demostrar que el multiplicador de Lagrange representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

Solución. La ecuación de ligadura anholónoma (7.3) era

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta} = 0. \tag{7.84}$$

Los coeficientes son

$$A_x = -\sin \theta; \quad A_y = \cos \theta; \quad A_\theta = -\frac{l}{2}.$$

La lagrangiana, correspondiente en este caso únicamente a la energía cinética, vale

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange, empleando un multiplicador λ para la restricción, resultan

$$2m\ddot{x} = -\lambda \sin \theta; \tag{7.85}$$

$$2m\ddot{y} = \lambda \cos \theta; \tag{7.86}$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -\lambda \frac{l}{2}. \tag{7.87}$$

Estas tres ecuaciones, junto con la de la restricción (7.84), sirven para resolver las cuatro incógnitas (x, y, θ, λ) . Es posible eliminar el multiplicador λ , cuyo valor a partir de (7.87) vale $\lambda = -ml\ddot{\theta}$, en las otras dos ecuaciones:

$$2\ddot{x} = l\ddot{\theta} \sin \theta; \quad 2\ddot{y} = -l\ddot{\theta} \cos \theta; \tag{7.88}$$

de esta forma, el problema queda planteado mediante estas dos ecuaciones, junto con la restricción (7.84), para las incógnitas (x, y, θ) .

Las ecuaciones de Newton/Euler correspondientes al balance de cantidad de movimiento y momento cinético en G , función de la reacción R normal a la cuchilla, resultan:

$$2m\ddot{x} = -R \operatorname{sen} \theta; \quad (7.89)$$

$$2m\ddot{y} = R \operatorname{cos} \theta; \quad (7.90)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -R\frac{l}{2}. \quad (7.91)$$

Se aprecia inmediatamente que coinciden exactamente con las ecuaciones (7.85-7.87) con $\lambda = R$. □

7.5. Introducción al Cálculo de Variaciones

7.5.1. Los Principios Variacionales

Los principios de Newton-Euler (apartado 6.2) dan como resultado ecuaciones diferenciales, es decir, relaciones entre funciones del movimiento y sus derivadas en un instante dado. Según vimos, el principio de los trabajos virtuales y el de D'Alembert globalizan el planteamiento de las ecuaciones para sistemas de varias partículas, definiendo una condición que se ha de verificar para todo el sistema (la nulidad del trabajo virtual para conjuntos arbitrarios de desplazamientos virtuales). El principio de D'Alembert permite formular, para sistemas de N partículas sujetos a enlaces, un conjunto de ecuaciones diferenciales por lo general mucho más reducido que las que se obtendrían de aplicar directamente los principios Newtonianos a cada una de las N partículas.

En cualquier caso, los procedimientos arriba comentados se basan en el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, que se han de cumplir para cada instante de tiempo. Al basarse en relaciones que se han de verificar para cada «punto» de tiempo, a esta formulación cabría llamarla «puntual» o «local».

Una alternativa a la formulación local de la dinámica es la ofrecida por los *principios variacionales*. Éstos se basan en establecer una propiedad global del movimiento a lo largo de todo un periodo de tiempo. En lugar de originar un sistema de ecuaciones diferenciales para cada instante, plantean una característica global del movimiento, es decir, una medida integral que lo caracteriza desde el instante inicial hasta el final.

El empleo de principios variacionales en la física proviene históricamente del campo de la óptica. El llamado principio de Fermat (1608-1665) permitió establecer las leyes básicas de la óptica de manera muy elegante. Establece este principio que la luz va de un punto a otro por el camino por el que tarda menos tiempo, incluso si sufre reflexiones y refracciones. De este principio se obtienen otras propiedades fundamentales como la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión en un espejo, o la ley de Snell de la refracción. Todo se deduce de una condición de extremo (mínimo) para una magnitud dada: el tiempo recorrido por el rayo de luz en su trayectoria.

En la mecánica, se plantea el problema de si es posible definir un funcional, en relación con la trayectoria dinámica de un sistema, que juegue un papel análogo al principio de Fermat. Así, la trayectoria real que seguiría el sistema, para unas condiciones iniciales determinadas, ocasionaría un extremo de este funcional.

Este funcional existe de hecho, como veremos en el apartado 7.6; se trata de la integral a lo largo del tiempo de la función Lagrangiana L , denominada *acción Hamiltoniana*. En el apartado mencionado desarrollaremos el principio, verificando su equivalencia con las formulaciones dinámicas ya conocidas.

Este principio de extremo o variacional tiene una gran potencia: puede ser generalizado a la mecánica de medios continuos (sistemas con infinitos grados de libertad), a sistemas cuánticos o relativistas. Por lo tanto, merece la pena detenerse, antes de presentar el principio de Hamilton, en la justificación y aplicación general de este planteamiento variacional nuevo.

7.5.2. El Problema Fundamental del Cálculo de Variaciones

El planteamiento del problema consiste en encontrar una función $y(x)$, de variable real x , de forma que un funcional determinado $I[y]$ de esta función sea extremal. Sea el funcional con la estructura general siguiente,

$$I[y] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad \text{con } y'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx}, \quad (7.92)$$

donde f es una función dada de las variables (y, y', x) , a la que supondremos los requisitos de continuidad y diferenciabilidad necesarios, y (x_1, x_2) los dos puntos extremos, dentro de los que interesa el estudio de $y(x)$. El problema es determinar las funciones $y(x)$, que toman valores dados en los extremos $y_1 = y(x_1)$ e $y_2 = y(x_2)$, y que hacen del valor del funcional $I[y]$ extremal, es decir, un máximo o un mínimo.

Para ello, estudiaremos la variación del funcional, que llamaremos δI , para variaciones arbitrarias de $y(x)$ que cumplan las condiciones de borde dadas. Esta variación debe ser nula, como expresión de la condición de extremal. Como primer paso, investigamos la familia uniparamétrica de funciones variadas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (7.93)$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro continuo y $\eta(x)$ una función real dada arbitraria, a la que únicamente exigiremos que tenga condiciones de borde homogéneas, es decir $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Es decir, «enmarcamos» la solución buscada $y(x)$ dentro de un conjunto de curvas de comparación $y(x, \alpha)$ que cumplan todas ellas las mismas condiciones de borde que $y(x)$.

De esta manera el valor del funcional depende de α :

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx.$$

La primera variación de este funcional⁸ para una variación arbitraria $\delta\alpha$ es

$$\delta I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{d\alpha} \delta\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} \delta\alpha dx. \quad (7.94)$$

Claramente,

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right);$$

por lo que integrando por partes el segundo sumando en (7.94),

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

El segundo sumando en la expresión anterior (términos de contorno) no contribuye, puesto que según (7.93) es $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$, que desaparece en x_1 y x_2 . Así,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha dx = 0. \quad (7.95)$$

En esta expresión $(\partial y / \partial \alpha) \delta\alpha = \eta(x) \delta\alpha$ se pueden interpretar como variaciones de la curva $y(x)$. Estas variaciones, que llamaremos $\delta y(x)$, son arbitrarias, puesto que $\eta(x)$ es una función cualquiera con la única salvedad

⁸Es decir, la variación suponiendo $\delta\alpha$ infinitesimal y despreciando los términos del desarrollo en serie de orden 2 o superior, $\mathcal{O}(\delta\alpha^2)$.

de las condiciones de borde homogéneas. En la ecuación anterior, el término entre corchetes, en consonancia con la denominación establecida en (7.28), se denomina «derivada variacional»:

$$\frac{\delta f}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right). \quad (7.96)$$

Puesto que $\delta I = 0$ para variaciones arbitrarias δy , el teorema fundamental del cálculo de variaciones establece que la derivada variacional en (7.95) se debe anular en todos los puntos del intervalo:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad \forall x \in]x_1, x_2[\quad (7.97)$$

Esta expresión se denomina la *ecuación de Euler del cálculo variacional*.

Es posible observar la similitud de la ecuación de Euler con las ecuaciones de Lagrange de la dinámica (7.14), sin más que sustituir $f(y, y', x)$ por $L(q, \dot{q}, t)$, en un hipotético sistema de un grado de libertad. Este resultado será el punto de partida para el principio variacional de Hamilton (apartado 7.6).

EJEMPLO 7.14: Obtener la curva a lo largo de la cual una partícula, sometida al campo gravitatorio, realiza el descenso entre dos puntos dados en un tiempo mínimo (*problema de la «braquistócrona»*).

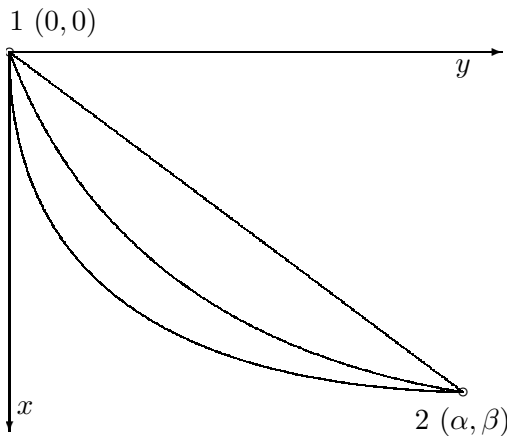


Figura 7.13: Una partícula sometida a su propio peso debe descender del punto 1 al 2 en la trayectoria por la que tarde un tiempo mínimo (denominada braquistócrona).

Solución. Tomando como punto de partida el $1 \equiv (0, 0)$ y de llegada el $2 \equiv (\alpha, \beta)$, se plantea obtener la curva $y(x)$ tal que la duración

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

sea mínima. En la expresión anterior ds es el elemento diferencial de arco, y v la velocidad:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \text{siendo } y' = dy/dx,$$

$$v = \sqrt{2gx},$$

suponiendo $v = 0$ en el punto 1. Así,

$$T = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx$$

Planteado de esta forma, el problema es formalmente idéntico al expresado en (7.92), siendo $f = \sqrt{[1 + (y')^2]/x}$, por lo que se podrá aplicar la ecuación de Euler (7.97):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

En este caso, $\partial f / \partial y = 0$, luego la ecuación anterior se reduce a la integral primera

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \quad (\text{cte.})$$

Particularizando:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x[1 + (y')^2]}} = C \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{C^2} - x}}.$$

Para facilitar la integración de y' , realizamos el cambio de variable y de constante siguiente:

$$\frac{1}{C^2} = 2r; \quad x = r(1 - \cos \varphi);$$

resultando

$$\frac{dy}{d\varphi} = y' \frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{x}{2r - x}} r \operatorname{sen} \varphi = r(1 - \cos \varphi).$$

Esta expresión se integra directamente, teniendo en cuenta las condiciones iniciales ($y_1 = 0, \varphi_1 = 0$), obteniéndose

$$y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi).$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la curva buscada es

$$\begin{cases} x = r(1 - \cos \varphi), \\ y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \end{cases}$$

que corresponde a una *cicloide*⁹, con cúspide en $1 \equiv (0, 0)$. El parámetro r de la misma se hallaría obligando a que el punto $2 \equiv (\alpha, \beta)$ pertenezca a la curva:

$$\begin{aligned} \alpha &= r(1 - \cos \varphi); \\ \beta &= r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi). \end{aligned}$$

Este constituye un sistema de ecuaciones no lineal para las incógnitas (r, φ) , que se resolvería por métodos numéricos iterativos. \square

7.6. El Principio de Hamilton

Sea un sistema conservativo y holónomo con n grados de libertad, en el que se ha definido una función Lagrangiana (L) . El principio de Hamilton establece que:

«entre dos instantes t_1 y t_2 , caracterizados por las configuraciones respectivas $\{q_i^{(1)}\}$ y $\{q_i^{(2)}\}$, el sistema evoluciona de forma que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (7.98)$$

adopta un valor estacionario (es decir, extremal) para la trayectoria real del sistema.»

Esta estacionariedad se refleja en un mínimo de S , denominada *acción Hamiltoniana*. Al principio de Hamilton también se le llama principio de la mínima acción¹⁰.

⁹La cicloide es la curva que traza un punto del perímetro de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta.

¹⁰Existe otro principio también llamado de la mínima acción, formulado históricamente antes que el de Hamilton, debido a Maupertuis (1744), y clarificado posteriormente por Euler. En éste, se define la acción como $\int_{t_1}^{t_2} 2T dt$, siendo T la energía cinética, y la propiedad de mínimo se verifica para variaciones en las trayectorias del sistema que mantengan constante la integral de Jacobi h (7.43). Una exposición concisa de este último principio puede encontrarse en J.B. Griffiths: *The Theory of Classical Dynamics*, Cambridge U.P., 1985. La mayor generalidad de las variaciones posibles en el principio de Hamilton lo hacen preferible desde un punto de vista práctico, aunque si se quiere evitar confusiones conviene diferenciar ambos enunciados, precisando «mínima acción Hamiltoniana» o «mínima acción Maupertuisiana.»

El principio de Hamilton se puede considerar como un postulado básico, siendo posible deducir a partir de él toda la dinámica, de forma alternativa a las leyes de Newton o al principio de los trabajos virtuales. De hecho, se trata del planteamiento más «elegante»: constituye una única expresión, con un enunciado preciso, y permite definir la evolución dinámica global a lo largo del tiempo por contraposición a la descripción local instantánea a instante.

En lo que sigue, comprobaremos la equivalencia del principio de Hamilton con las ecuaciones de Lagrange, que anteriormente se habían deducido a partir del principio de D'Alembert.

7.6.1. Las Ecuaciones de Lagrange a Partir del Principio de Hamilton

Suponemos que la trayectoria real que sigue el sistema es $\{q_i(t)\}$. Tomamos una familia de variaciones $\{\delta q_i\}$ a tiempo constante, de la forma:

$$\delta q_i(t) = a_i(t)\delta\alpha,$$

donde $\delta\alpha \in \mathbb{R}$ es una variación arbitraria, y $a_i(t)$ son funciones dadas del tiempo, arbitrarias salvo por la restricción de tener condiciones de borde homogéneas $a_i(t_1) = a_i(t_2) = 0$. De esta forma, todos los caminos variados $q_i(t) + \delta q_i(t)$ tienen el mismo origen y final. Expresando la condición de extremal de la acción Hamiltoniana S al variar α , y teniendo en cuenta que las variaciones no afectan a los límites de la integral,

$$\delta S = \frac{dS}{d\alpha}\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} a_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i \right) \delta\alpha dt.$$

En esta expresión, así como en el resto de este apartado 7.6 se sobreentiende el convenio de sumación de índices repetidos, salvo en el caso en que estos índices afecten a vectores. Integrando por partes el segundo sumando dentro del paréntesis resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} a_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) a_i dt$$

El término de contorno desaparece, puesto que $dL/d\alpha = a_i(t)$, que se anula en t_1 y t_2 . Así, se llega a

$$\delta S = \delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] a_i(t) dt = 0.$$

Considerando que $a_i(t)$ son funciones independientes para cada coordenada i (recordemos que se hizo la hipótesis de que el sistema era holónomo por lo que esto siempre será posible), con valor arbitrario salvo la condición de borde homogénea, la expresión anterior obliga a

$$-\frac{\delta L}{\delta q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots, n; \quad t \in]t_1, t_2[. \quad (7.99)$$

Estas relaciones son precisamente las ecuaciones de Lagrange deducidas anteriormente (7.14), y constituyen para este caso las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional (7.98). Por este motivo, se denominan también *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Hemos comprobado que del principio de Hamilton se deducen las ecuaciones de Lagrange. Recíprocamente, es inmediato comprobar que si se cumplen las ecuaciones de Lagrange, se sigue la estacionariedad de (7.98). Por tanto, queda demostrada la equivalencia.

El principio de Hamilton explica con gran claridad algunas propiedades que habíamos demostrado anteriormente, como la invariancia de las ecuaciones de Lagrange respecto a transformaciones «de galga» (7.26). En efecto, al sumar a L el término $\frac{d}{dt}F(q_i, t)$, el efecto sobre la acción S en (7.98) es

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_i, t) dt = F(q_i^{(2)}, t_2) - F(q_i^{(1)}, t_1) = \text{cte.} \quad (7.100)$$

El añadir una constante no altera la estacionariedad de S , por lo que queda comprobada la «neutralidad» dinámica de este tipo de transformaciones.

7.6.2. Generalización del principio de Hamilton

Es posible obtener una generalización del principio de Hamilton, para considerar fuerzas no conservativas o sistemas anholónomos, que no puedan definirse mediante coordenadas libres.

Supongamos un sistema definido con coordenadas $\{q_j\}$ no libres, en el que existen fuerzas generalizadas Q_j , posiblemente no conservativas. Además, las coordenadas están sujetas a k ecuaciones de ligadura,

$$\Phi_i(q_j, \dot{q}_j, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}}_{A_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}_{C_i} = 0$$

o en función de desplazamientos virtuales

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0. \quad (7.101)$$

Las ecuaciones de la dinámica serían

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}}$$

Tomaremos variaciones $\{\delta q_i\}$ compatibles con los enlaces, a tiempo constante ($\delta t = 0$), de forma que cumplan la condición de contorno $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. El principio generalizado afirma que se ha de verificar

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum_{j=1}^N \left(Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.102)$$

Empleando la ecuación (7.101), al tratarse de desplazamientos compatibles, en la expresión anterior se anulan los términos de los multiplicadores, quedando

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.103)$$

En el caso en que las fuerzas provengan de un potencial, es inmediata la equivalencia de esta expresión del principio generalizado con el principio de Hamilton expresado en (7.98):

$$\delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \delta T - \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta V} = \delta L.$$

En un caso general, la justificación del principio generalizado se realiza como sigue. La variación de la energía cinética se puede desarrollar como

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i;$$

con la definición realizada de las variaciones, se verifica

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i;$$

siguiendo ahora un procedimiento similar al expuesto en el apartado 7.6.1, la integral respecto del tiempo del primer sumando se realiza por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.102) resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i dt = 0.$$

Puesto que esta relación se verifica para $\delta q_i(t)$ de evolución arbitraria en el tiempo (con la única restricción de las condiciones de borde homogéneas), el integrando ha de anularse:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0;$$

expresión que concuerda con la ecuación fundamental de la dinámica o principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas (7.11). A su vez, si $\{q_i\}$ es un sistema libre, $\{\delta q_i\}$ se pueden escoger de forma independiente entre ellas, por lo que se obtienen finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

7.7. La Dinámica a Partir del Principio de Hamilton

Como ya se ha mencionado, el principio de Hamilton puede servir de sustento a todo el desarrollo de la dinámica, admitiendo como postulados adicionales únicamente las propiedades del espacio y del tiempo y el principio de relatividad de Galileo, expuestos en el capítulo 1 (apartados 1.2 y 1.3).

Este planteamiento es el seguido por algunos textos de mecánica clásica teórica, resultando interesante por la elegancia formal de su desarrollo, así como por la fundamentación sólida de las leyes de conservación de la mecánica.

Expondremos aquí de manera resumida tan sólo algunos resultados básicos y su relación con las leyes y teoremas de conservación conocidos de la dinámica. El enfoque seguido es similar al propuesto por Landau¹¹, cuya obra se recomienda al lector que desee profundizar en este tema.

7.7.1. Estructura de la Función Lagrangiana

Lagrangiana de una partícula aislada.— Para empezar consideremos el problema mecánico más simple, consistente en una partícula aislada. La función Lagrangiana L correspondiente, por la homogeneidad del tiempo, no debe depender de t ; por la homogeneidad del espacio, no podrá depender de la posición \mathbf{r} , y por la isotropía del espacio tampoco se verá influida por la dirección de la velocidad \mathbf{v} . Por lo tanto, será una función únicamente del módulo de la velocidad, $L(v^2)$.

Imponemos ahora la invariancia de las leyes dinámicas con respecto a una transformación de Galileo. Para ello estudiemos una traslación con velocidad uniforme \mathbf{w} , por la cual la velocidad pasa a ser $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$. La Lagrangiana en este nuevo sistema, $L(v'^2)$, para ser equivalente a $L(v^2)$ debe diferir de ella en una derivada temporal total de una función de coordenadas y tiempo (7.100). Esta condición se verifica únicamente por una función de la forma

$$L = kv^2.$$

En efecto, se puede comprobar que al hacer la transformación $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}$, se obtiene

$$L(v^2) = k(\mathbf{v}' + \mathbf{w})^2 = kv'^2 + 2k\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} + kw^2,$$

lo que se puede poner como

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{d}{dt} \underbrace{(2k\mathbf{r}' \cdot \mathbf{w} + kw^2t)}_{F(\mathbf{r}', t)},$$

relación que prueba la equivalencia.

La *masa* de la partícula se define en función de la constante k de su Lagrangiana, como $m \stackrel{\text{def}}{=} 2k$; de esta forma, la Lagrangiana del punto material aislado resulta finalmente

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

¹¹L. Landau y E. Lifshitz: *Curso Abreviado de Física Teórica; 1-Mecánica y Electrodinámica*, ed. Mir, 1971.

Es inmediato comprobar que la masa así definida no puede ser negativa. Si así lo fuese, la acción S correspondiente a un trayecto entre dos puntos dados 1 y 2,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m v^2 dt,$$

no tendría un mínimo; basta para ello considerar distintos movimientos, en que la partícula parte de 1, primero se aleja rápidamente de 2, para después acercarse a él. Cuanto más rápido sea este movimiento, menor (más negativa) sería la acción. En este caso no existiría un extremal, contradiciendo al principio de Hamilton.

Lagrangiana de la unión de dos sistemas aislados.— Se consideran ahora dos sistemas aislados A y B , con lagrangianas respectivas L_A y L_B , que no ejercen ninguna interacción entre sí. La Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L_{A+B} = L_A + L_B.$$

En efecto, supongamos que el sistema A posee unas coordenadas libres $\{q_i, i = 1, \dots, p\}$, mientras que el B posee otras $\{q_j, j = p + 1, \dots, n\}$. Así, la suma de las Lagrangianas es

$$L(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j, t) = L_A(q_i, \dot{q}_i, t) + L_B(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Puesto que ambas partes del nuevo sistema conjunto no tienen ninguna interacción, debemos obtener las mismas ecuaciones de Lagrange con la Lagrangiana conjunta para q_i que si tomásemos tan sólo L_A . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{A+B}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_i} \right); \\ \frac{\partial L_{A+B}}{\partial q_i} &= \frac{\partial L_A}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Si se tienen dos partículas a y b que no interaccionan entre sí, la Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_b v_b^2}{2}.$$

Si las dos partículas se mueven a la misma velocidad $v_a = v_b$, se puede considerar la masa conjunta como $m_{a+b} \stackrel{\text{def}}{=} m_a + m_b$, lo que justifica la propiedad de aditividad de la masa.

Función de interacción.— Si las partículas interactúan entre sí, postularemos que la Lagrangiana conjunta diferirá de la correspondiente a las partículas aisladas en una función de interacción $V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ que dependa únicamente de las coordenadas de cada partícula¹²:

$$L = \sum_{i=a,b} \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b). \quad (7.104)$$

Supondremos por otra parte que las dos partículas a y b están aisladas respecto del resto del universo, constituyendo un sistema cerrado. En este caso, por la homogeneidad del tiempo, L no podrá depender de t : $\partial L / \partial t = 0$, por lo que la función V tampoco puede depender de t .

Lagrangiana de un sistema de N partículas El razonamiento anterior se puede extender a un sistema cerrado (es decir, aislado) de N partículas, descritas por sus posiciones vectoriales \mathbf{r}_i . La suma $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$ se denomina *energía cinética* del sistema, y $V(\mathbf{r}_i)$ se denomina *energía potencial*. La expresión de la Lagrangiana es

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_i). \quad (7.105)$$

En función de esta Lagrangiana y del principio de Hamilton, siguiendo un desarrollo similar al expuesto en el apartado 7.6.1, y escogiendo como coordenadas generalizadas las coordenadas vectoriales \mathbf{r}_i , se obtiene la expresión:

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{ \delta \mathbf{r}_i \} \text{ compatibles.} \quad (7.106)$$

Nótese que en la expresión anterior, en general no será posible eliminar los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_i$ y garantizar la nulidad de los términos entre corchetes. En general $\delta \mathbf{r}_i$ no serán libres salvo que garanticemos que no existan enlaces internos de ningún tipo.

¹²Conviene notar que esta hipótesis implica que si se produce una variación de las coordenadas, su efecto se nota de manera instantánea a través de la función V , por lo que las interacciones se propagan con velocidad infinita, posibilidad que no admite la mecánica relativista.

7.7.2. Teoremas de Conservación

En lo anterior se ha establecido la estructura de la función Lagrangiana (7.105) y su equivalencia con el principio de D'Alembert (7.106), a partir únicamente del principio de Hamilton y de las propiedades básicas del espacio y tiempo.

Se puede igualmente deducir los teoremas de conservación para sistemas aislados (apartado 6.3.5), empleando las propiedades básicas del espacio y tiempo de la mecánica clásica.

Conservación de la Energía.—

La *homogeneidad del tiempo* tiene como consecuencia la conservación de la energía en un sistema aislado.

Demostración. En efecto, si el sistema está aislado, hemos visto antes que la Lagrangiana no puede depender explícitamente del tiempo. La derivada temporal (total) de $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ se puede desarrollar como

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Empleando las ecuaciones (7.106) para un conjunto de desplazamientos virtuales que coincida con las velocidades reales del sistema (que obviamente cumplen la condición de compatibilidad con los enlaces) se obtiene

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Sustituyendo en la expresión anterior queda

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L \right) = 0.$$

Es inmediato comprobar que la magnitud entre paréntesis en la ecuación anterior coincide con la suma de energía cinética y la potencial definidas en (7.105); a esta suma la llamaremos energía total del sistema, y al anularse su derivada temporal, la energía se mantendrá constante:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L = \text{cte.} \quad \square$$

Conservación de la Cantidad de Movimiento.—

La *homogeneidad del espacio* da lugar a otro teorema de conservación. Debido a dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema aislado no deben variar si dicho sistema, en su conjunto, experimenta un desplazamiento paralelo (traslación) en el espacio.

Demostración. Sea un sistema aislado de N partículas, con coordenadas (vectoriales) $\{\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\}$, y Lagrangiana $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$. Se verifica $\partial L/\partial t = 0$ debido a que el sistema es aislado, por el mismo razonamiento que se hizo anteriormente. Tomaremos por tanto una traslación arbitraria infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}$, e imponemos la invariancia de la Lagrangiana. Debido a la traslación, las posiciones de las partículas varían como $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon}$, mientras que las velocidades no cambian:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \overbrace{\delta \mathbf{r}_i}^{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0,$$

y al ser $\boldsymbol{\epsilon}$ arbitrario se deduce que $\sum_i \partial L/\partial \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$.

En función de las ecuaciones (7.106) particularizadas para un desplazamiento virtual $\boldsymbol{\epsilon}$ (que obviamente es compatible, por tratarse de una traslación uniforme de un sistema aislado que no puede tener vínculos externos), se verifica

$$\left[\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon},$$

y al ser $\boldsymbol{\epsilon}$ arbitrario, se llega a

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \mathbf{0}. \quad \square$$

De esta manera llegamos a la conclusión que la magnitud vectorial

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i},$$

que se denomina *cantidad de movimiento* del sistema, se mantiene constante para un sistema cerrado.

Conservación del momento cinético.—

Debido a la *isotropía del espacio*, un sistema aislado sometido a un cambio de orientación no debería variar su comportamiento dinámico.

Demostración. Para ello, imaginemos que se efectúa un giro infinitesimal $\delta\varphi$. Las variaciones en posiciones y velocidades son respectivamente

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}_i &= \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i \\ \delta\dot{\mathbf{r}}_i &= \delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i\end{aligned}$$

Con estas variaciones de las velocidades, el módulo de la velocidad de cada partícula se conserva, por lo que la energía cinética T no varía. Por lo tanto la diferencia entre las Lagrangianas será únicamente función de las posiciones. Imponiendo la invariancia de la Lagrangiana,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i) = 0.$$

Permutando el producto mixto en esta expresión,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \left[\mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = 0$$

y teniendo en cuenta que $\delta\varphi$ es arbitrario,

$$\sum_i \left[\mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = \mathbf{0}. \quad (7.107)$$

Expresamos ahora las ecuaciones (7.106), particularizadas para desplazamientos virtuales $\delta\mathbf{r}_i = \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i$ (compatibles siempre en un sistema aislado libre de enlaces externos, ya que representan una rotación rígida infinitesimal):

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) = 0$$

y permutando el producto mixto,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] = 0$$

y al ser $\delta\varphi$ arbitrario,

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0}$$

empleando la ecuación (7.107) esta expresión queda convertida finalmente en

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right]}_{\mathbf{H}_O} = \mathbf{0}.$$

Es decir, se conserva el *momento cinético*, definido como la suma de los momentos de las cantidades de movimiento: $\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$, siendo $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$ la cantidad de movimiento de cada partícula. \square

7.8. Problemas propuestos.

Problema 7.1. En un triángulo rectángulo isósceles de masa m , que puede deslizar sin rozamiento dentro de un plano vertical sobre una recta horizontal, apoyándose sobre un cateto, se coloca un disco homogéneo, de radio r y masa $2m$, que puede caer rodando sin deslizar por la hipotenusa del triángulo, desde el punto más alto de ésta. Se pide:

- Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento, discutiendo la existencia de integrales primeras.
- Obtener la reacción del triángulo sobre el disco para un instante genérico, en que el disco aún no haya llegado a tocar la base.

(Examen final, 16/9/1994)

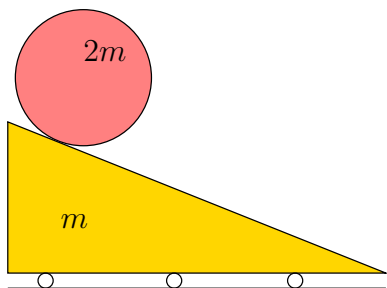


Figura 7.14: *Problema 7.1*

Problema 7.2. Un sistema formado por dos masas de valor m unidas por una varilla rígida sin masa de longitud l se mueve sobre un plano horizontal. Cada masa está apoyada sobre el plano mediante un pequeño cuchillo que impide totalmente el desplazamiento en dirección de la varilla, quedando libre el movimiento en dirección normal. El sistema tiene un movimiento impuesto de rotación con velocidad angular ω constante, teniendo su centro

en el instante inicial una velocidad v_0 según una determinada dirección. Se pide:

- empleando las coordenadas cartesianas de cada partícula, expresar las ecuaciones de los enlaces y determinar el n.º de g.d.l.;
- escoger coordenadas generalizadas que eliminen los enlaces holónomos y en función de ellas obtener las ecuaciones de Lagrange de la dinámica;
- integrar completamente dichas ecuaciones y obtener de forma explícita la trayectoria del sistema;
- calcular de forma explícita la reacción de enlace en los cuchillos.

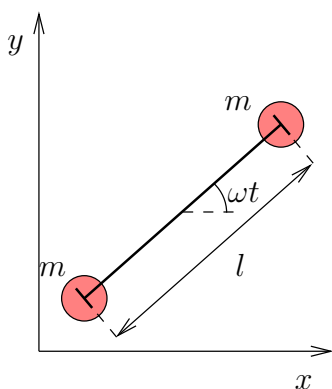


Figura 7.15: *Problema 7.2*

Problema 7.3. Un disco de masa M y radio R puede girar libremente alrededor de su eje de revolución vertical Oz . En el disco existe una acañaladura radial lisa por la que desliza una rótula cilíndrica A , que a su vez es el punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m . La rótula A actúa obligando al péndulo a moverse en el plano vertical que contiene a la ranura OA . Se pide:

- Obtener las ecuaciones del movimiento de la masa puntual, utilizando métodos de la dinámica analítica.
- Expresar las posibles integrales primeras del movimiento del sistema e interpretarlas físicamente.

Problema 7.4. Una partícula pesada de masa m se mueve unida mediante una varilla AB rígida, sin masa y de longitud l , a una rótula A de masa despreciable. A su vez, esta rótula A está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio R . La rótula A actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por A a la circunferencia. Se pide:

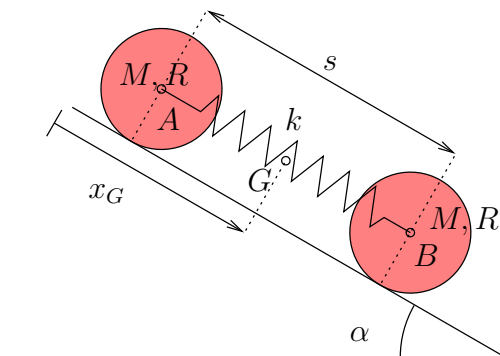


Figura 7.16: Problema 7.3

- Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de la mecánica analítica.
 - Expresar las posibles integrales primeras del movimiento, e interpretarlas físicamente.
 - En el caso de que A se mueva con velocidad de módulo constante $|\mathbf{v}_A| = \omega R$, expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en A , con el eje z vertical y cuyo plano yz contiene en todo momento a la varilla AB .
 - Para la situación del apartado 3, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.
- (Véase problema propuesto 6.16, empleando métodos de Newton y Euler)

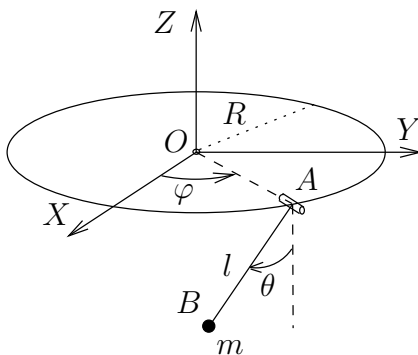


Figura 7.17: Problema 7.4

Problema 7.5. Un aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m . Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por

O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza $F(t)$ dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema. Se pide:

- Calcular las fuerzas generalizadas asociadas a los grados de libertad indicados en la figura.
 - Calcular la energía cinética y potencial del sistema.
 - Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange.
 - Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento y su interpretación física.
 - Calcular la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange.
- (Véase problema propuesto 6.8, empleando métodos de Newton y Euler)

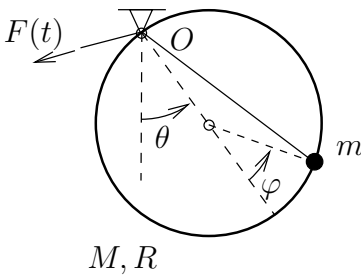


Figura 7.18: Problema 7.5

Problema 7.6. Un semiarco homogéneo de radio R gira con velocidad angular ω constante alrededor del eje Z vertical, estando obligado a permanecer en todo momento en un plano vertical, tal y como se muestra en la figura adjunta. Una partícula pesada de masa m puede moverse sin rozamiento ensartada en el semiarco. En el instante inicial la partícula se encuentra situada en el punto B y se lanza con una velocidad v_0 relativa al semiarco. Se pide:

- Ecuación del movimiento.
 - Velocidad v_0 mínima necesaria para que la partícula alcance el punto A .
 - Reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico para una v_0 cualquiera.
- (Examen final, 27/6/1997)

Problema 7.7. Una varilla AB de masa m y longitud total l se mueve en un plano vertical de forma que el extremo A desliza sobre la vertical y el

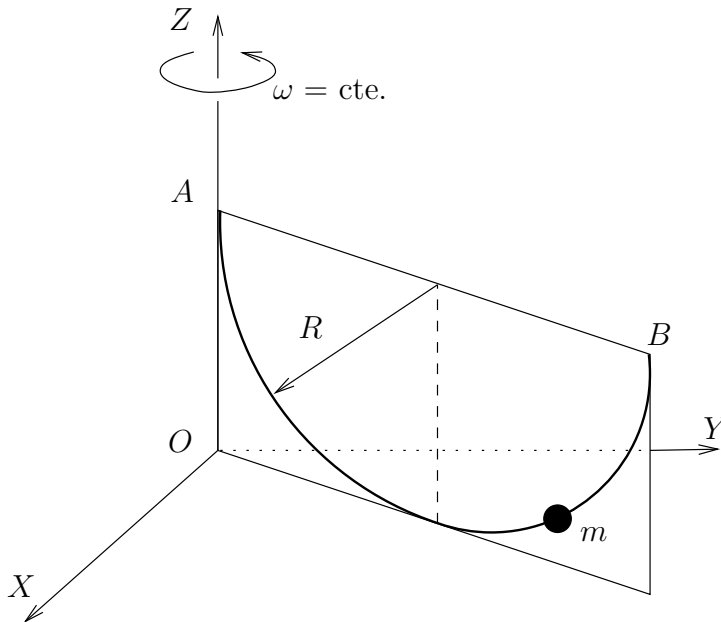


Figura 7.19:
Problema
7.6

extremo B desliza sobre una recta horizontal. Asimismo, una partícula P de masa m puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con $\theta = 30^\circ$ y $s = 0$. Se pide, en función de s , θ y sus derivadas:

1. Expresión de la lagrangiana del sistema formado por la varilla y la partícula.
2. Ecuaciones de Lagrange.
3. Integrales primeras del movimiento.
4. Si $\dot{\theta} = \omega$ (cte), calcular mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

(Véase problema propuesto 6.11, empleando métodos de Newton y Euler)

Problema 7.8. El dispositivo de la figura consta de un aro de masa M y radio R con un diámetro obligado a permanecer vertical, alrededor del cual puede girar sin rozamiento. Una partícula de masa m se halla ensartada en el aro pudiendo deslizar libremente sobre él, sometida a su propio peso y sin

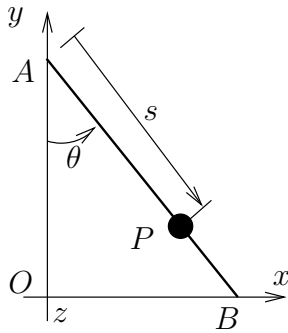


Figura 7.20: Problema 7.7

rozamiento. Se aplica al aro un momento $N(t)$ respecto al diámetro vertical que hará girar al sistema alrededor de este eje. Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial del movimiento, en función de la posición de la partícula sobre el aro (ϕ), la rotación del aro respecto a la vertical (ψ) y sus derivadas;
- Expresar las posibles integrales primeras del movimiento en el caso de que el momento aplicado sea nulo ($N(t) = 0$);
- Calcular el momento $N(t)$ necesario para que el aro se mueva con una velocidad angular constante $\dot{\psi} = \omega$;
- Expresar posibles integrales primeras del movimiento para este último caso.

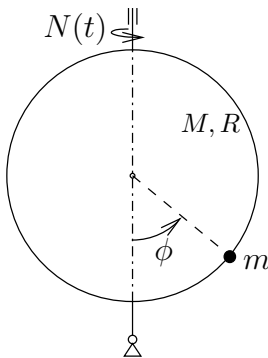


Figura 7.21: Problema 7.8

Problema 7.9. Un sistema está formado por dos partículas de masas M y m . La partícula M se encuentra unida a un punto fijo O a través de una varilla sin masa de longitud a . Además, esta partícula está sujeta mediante un resorte de constante k y longitud natural nula a una recta vertical fija (r) que pasa por O . La partícula m se encuentra unida a la partícula M

mediante otra varilla sin masa de longitud a . Todo el conjunto de partículas, varillas y muelle se mueve en todo momento contenido en un plano vertical que gira con velocidad angular ω constante alrededor de la recta vertical r . Se pide:

- Deducir razonadamente el número de grados de libertad del sistema y seleccionar de forma justificada unas coordenadas generalizadas adecuadas.
- Expresar la función Lagrangiana del sistema en función de las coordenadas del problema.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento.
- Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresarlas en su caso.
- Expresión de la reacción ejercida sobre la partícula m .

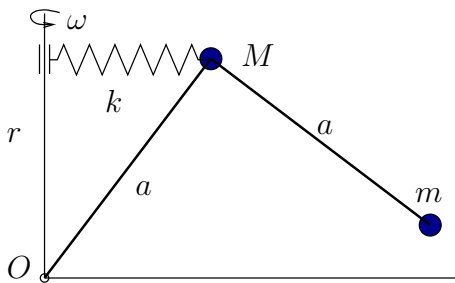


Figura 7.22: Problema 7.9

Problema 7.10. En un plano vertical fijo se mueven dos partículas iguales, de masa m , que se encuentran unidas entre sí por un resorte elástico de constante k y longitud natural b . Una de las partículas debe permanecer sobre una recta horizontal fija y lisa. Se abandona el sistema en reposo, estando las partículas a una distancia b y a la misma altura. Se pide:

- Empleando como coordenadas los parámetros (x, s, θ) de la figura, discutir si se trata de parámetros independientes o si por el contrario se hallan sujetos a alguna ecuación de ligadura.
- Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a estos parámetros.
- Expresión de la energía cinética del sistema.
- Expresión de su energía potencial.
- Ecuaciones de Lagrange.
- Caso de existir integrales primeras, escribirlas e interpretarlas.

- g. ¿Se modifican estas ecuaciones (las de los dos apartados anteriores), si la distancia inicial entre las partículas es inferior a b ?

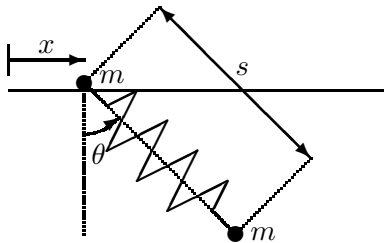


Figura 7.23: Problema 7.10

Problema 7.11. Un aro de masa m y radio R puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto O de su perímetro que está fijo. A su vez, otro aro de masa m y radio $r = R/3$ rueda sin deslizar dentro del primero. Obtener las ecuaciones de Lagrange de la dinámica del sistema. (Examen parcial, 9/6/1997)

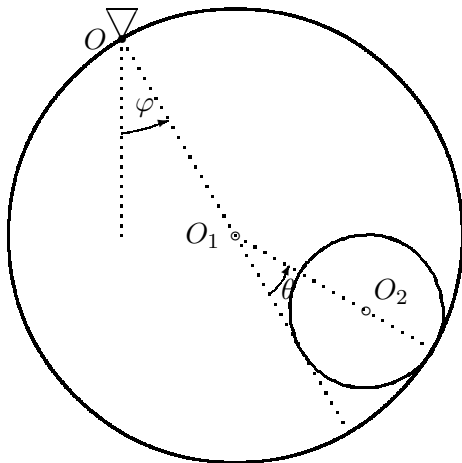


Figura 7.24: Problema 7.11

Problema 7.12. Dos masas puntuales (pesadas) m están unidas por una varilla rígida de longitud $2a$ y masa despreciable, estando obligadas a moverse dentro de un plano vertical $Ox'z$, de forma que una desliza sobre un eje vertical Oz y la otra desliza sobre una recta horizontal Ox' del mismo, ambas sin rozamiento. A su vez el plano vertical $Ox'z$ puede girar alrededor del eje Oz , no poseyendo otra masa que la correspondiente a las dos partículas antes citadas. Se pide:

- a. En la hipótesis de que el giro del plano alrededor de Oz es libre sin ninguna resistencia ni momento aplicado según este eje, obtener las ecuaciones diferenciales (de 2.º orden) del movimiento.

- b. Supuesto que se parte de unas condiciones iniciales dadas $(\theta_0, \dot{\theta}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, integrales primeras (ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden) que existan y su interpretación física.
- c. Calcular el valor del momento M que debe aplicarse según el eje Oz para obtener un movimiento de rotación uniforme ($\dot{\varphi} = \omega$) del plano.
- (Examen parcial, 29/1/1997)

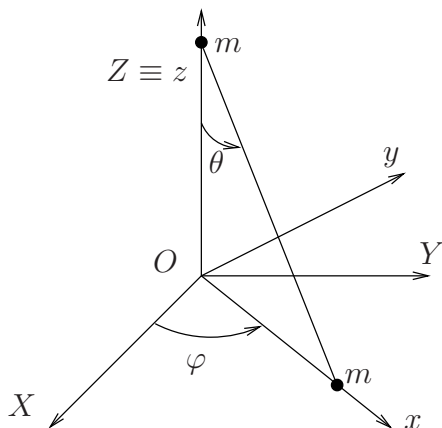


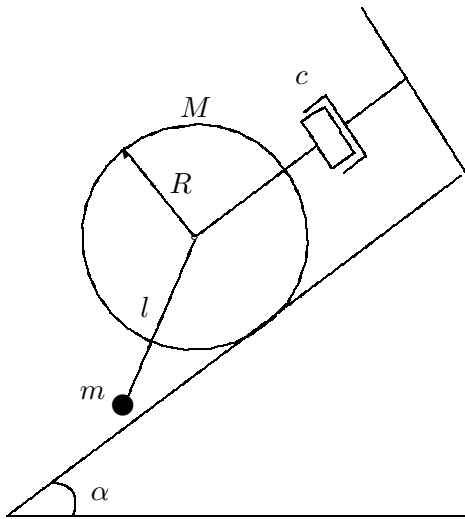
Figura 7.25: Problema 7.12

Problema 7.13. Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto de la horizontal. Del centro del disco cuelga un péndulo simple constituido por una varilla sin masa de longitud l con una masa puntual m en su extremo. El centro del disco está unido a un punto fijo mediante un amortiguador viscoso de constante c que se opone al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad (ver figura). Para considerar la resistencia del aire, se supone que sobre la masa puntual actúa una fuerza viscosa $\mathbf{F} = -c\mathbf{v}$, siendo \mathbf{v} la velocidad de dicha masa. Se pide:

- Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a las fuerzas viscosas.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento. Discutir la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial, 9/2/1996)

Problema 7.14. Una placa semicircular homogénea, de masa m y radio r , puede girar libremente en su propio plano vertical Π alrededor del centro O de su borde diametral. A su vez el plano Π (que no tiene masa) puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por O . Se abandona la placa en reposo respecto de Π , con su borde diametral formando un ángulo

Figura 7.26: *Problema 7.13*

θ_0 con la horizontal, mientras que Π tiene una velocidad angular $\dot{\psi}(0) = \omega_0$. Se pide:

- Expresión, en un instante genérico, del momento cinético respecto de O y de la energía cinética.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.
- describir el movimiento resultante, en concreto:
 - ley $\dot{\psi}(t)$ de la velocidad angular del plano;
 - demostrar que el movimiento $\theta(t)$ es pendular, obteniendo la longitud del péndulo simple equivalente.

(Examen final, 28/6/1996)

Problema 7.15. Dos partículas, de masas respectivas m y λm , están unidas mediante un hilo inextensible de longitud $2b$. Este hilo pasa por un pequeño agujero existente en el vértice A de una superficie cónica S fija, lisa, de eje vertical y semiángulo α . Mientras m permanece sobre la superficie S por debajo de A con ligadura unilateral lisa, la otra partícula λm pende libremente, permaneciendo en el volumen interior determinado por S . Se pide:

- Suponiendo que el movimiento comienza con unas condiciones iniciales generales,
 - Escoger unos parámetros adecuados para estudiarlo y determinar el n.º de grados de libertad;
 - Obtener las integrales primeras que pudiera haber e interpretarlas físicamente;

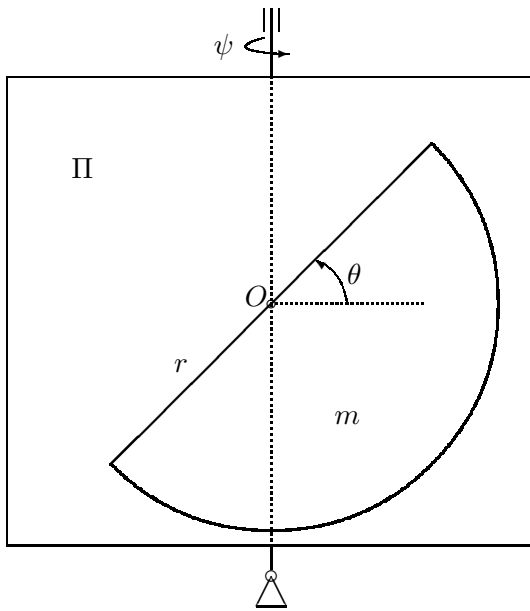
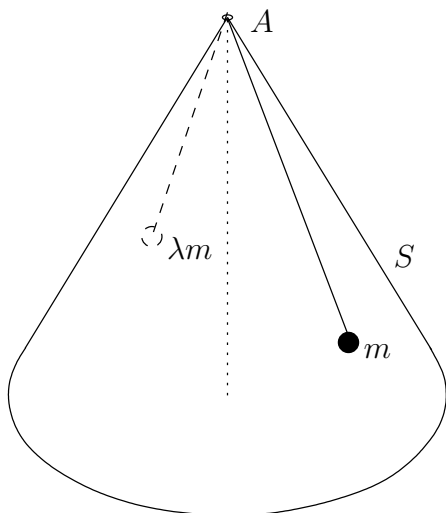


Figura 7.27: Problema 7.14

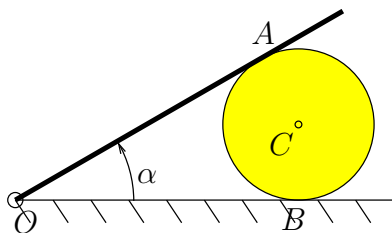
3. Obtener las ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento.
 - b. Suponemos ahora que inicialmente λm parte del reposo, a una distancia b en la vertical por debajo de A , y m tiene una velocidad v_0 con el hilo tenso. Encontrar los valores entre los que debe estar comprendido λ así como el valor adecuado de v_0 para que λm permanezca en reposo y m no se separe de S .
- (Examen final, 31/1/2001)

Problema 7.16. Un disco pesado de masa M y radio R con centro en C está contenido en un plano vertical fijo y apoyado sobre la recta horizontal OB . A su vez, una varilla pesada de masa M y longitud $4R$ tiene un extremo articulado en el punto fijo O y se apoya sobre el disco en A . El contacto del disco con la recta horizontal en B es perfectamente rugoso (rueda sin deslizar), mientras que el contacto con la varilla en A es perfectamente liso (desliza libremente). Se pide:

- a. Definir el número de grados de libertad del sistema y obtener las expresiones cinemáticas de la velocidad y aceleración del centro del disco C , así como de la velocidad y aceleración angular del disco, en función del ángulo α y sus derivadas.
- b. Analizando ahora la dinámica del sistema, obtener las ecuaciones que definen el movimiento del disco, así como las reacciones en A y B ,

Figura 7.28: *Problema 7.15*

empleando los teoremas generales de Newton y Euler.
(Examen final, 14/6/2001)

Figura 7.29: *Problema 7.16*

Problema 7.17. Una barra homogénea AB de masa m y longitud l se mueve en un plano horizontal. En el extremo A tiene un apoyo en forma de pequeña cuchilla, que impide el movimiento de dicho punto en dirección perpendicular a la varilla. Se pide:

- Expresar la ecuación de ligadura anholónoma.
- Usando (x, y, θ) como coordenadas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento. Emplear para ello el formalismo de la dinámica analítica, haciendo uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminar la citada ligadura.
- Demostrar que el multiplicador de Lagrange λ representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

(Examen final, 30/1/1999)

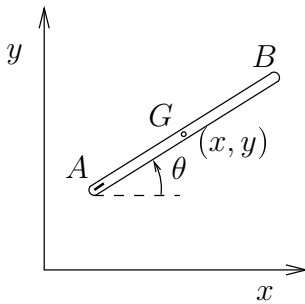


Figura 7.30: Problema 7.17

Problema 7.18. Un semiaro pesado de masa M y radio R puede deslizar y girar sin rozamiento a lo largo de una recta horizontal fija r por su diámetro AB . Además, una partícula pesada de masa m desliza sin rozamiento ensartada en el semiaro. Se pide:

- Expresiones de la energía cinética y potencial del sistema formado por la partícula y el semiaro.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento.
- Expresar las posibles integrales primeras e interpretarlas físicamente.
- Expresión de la reacción entre el aro y la partícula en función de las coordenadas generalizadas seleccionadas y sus derivadas.

(Examen final, 14/6/1999)

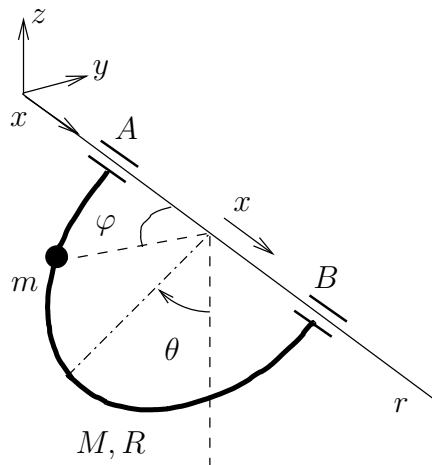


Figura 7.31: Problema 7.18

Problema 7.19. Dos poleas A y B pueden rodar sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose verticales en todo instante y unidas mediante un hilo sin masa que se enrolla en el perímetro exterior de las mismas, con un resorte lineal de constante k en su centro. La masa de la primera polea es m_A y su radio $1,5R$, mientras que la masa de la otra es m_B y su radio exterior $2R$. La rodadura de la polea B sobre la recta se produce mediante un pequeño saliente de forma circular y radio R . Al ser este saliente pequeño, ambas poleas se pueden considerar como discos homogéneos. Considerando que el hilo se mantiene tenso en todo instante y que es suficientemente largo para que el resorte central no llegue a tocar las poleas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.

(Examen parcial, 26/1/1998)

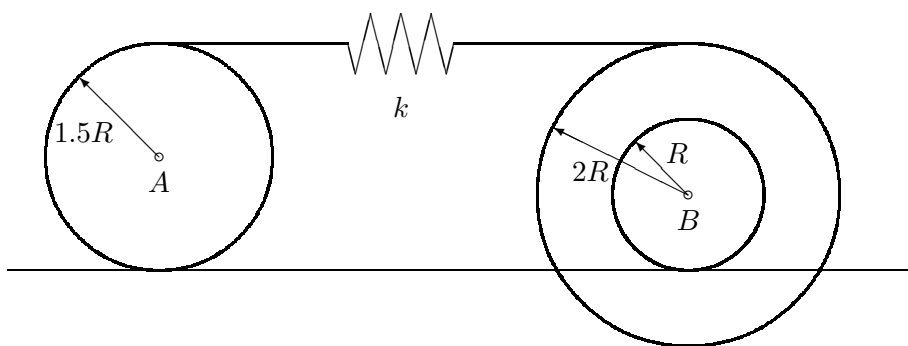


Figura 7.32: Problema 7.19

Problema 7.20. Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r , manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \sin \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:

- Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ , expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.
- Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.
- Ecuaciones de Lagrange del movimiento.
- Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

- e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.
(Examen parcial, 25/1/1993)

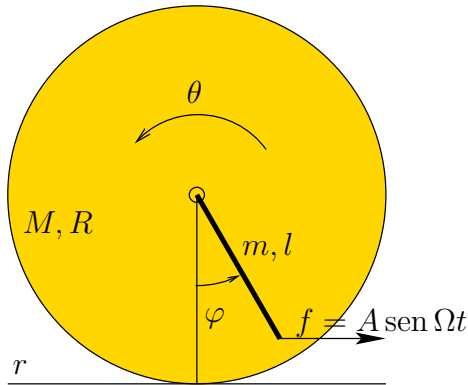


Figura 7.33: Problema 7.20

- Problema 7.21.** Un aro homogéneo de masa $3m$ y radio R se mueve en un plano vertical colgado de un punto O de su perímetro que se halla fijo. Sobre este aro desliza una bolita de masa m que no puede separarse del mismo, y que se halla sujeta por un resorte elástico de constante $k = mg/R$ al punto del aro diametralmente opuesto a O . Obtener las ecuaciones diferenciales (de Lagrange) del movimiento e integrales primeras si las hubiere.
(Examen final, 11/9/1991)

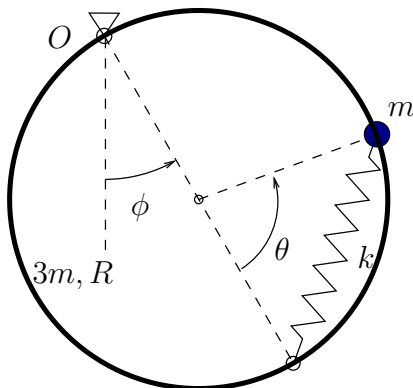


Figura 7.34: Problema 7.21

- Problema 7.22.** Un aro de masa M y radio $2a$ puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto O de su perímetro que está fijo. A su vez, un disco de masa m y radio a rueda sin deslizar dentro del aro. Existe un resorte de constante k y longitud natural $2a$, uno de cuyos extremos

está unido al centro del disco. El otro extremo está unido a una varilla de longitud a sin masa, soldada al aro en el punto O en dirección normal al perímetro, y que se mueve por tanto solidariamente con el aro (ver figura). Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento, y discutir la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial, 24/5/1993)

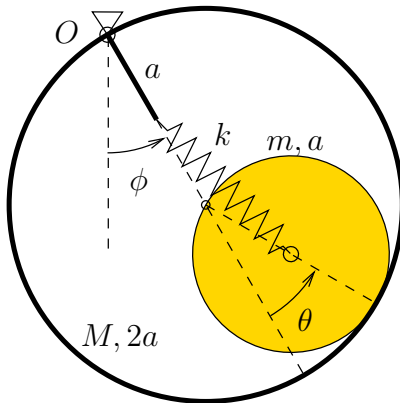


Figura 7.35: *Problema 7.23*

Problema 7.23. Un sistema binario formado por dos partículas de masas m_A y m_B se mueve sin resistencias en un plano vertical fijo, atrayéndose las partículas entre sí con una fuerza proporcional a su distancia de constante k , actuando asimismo sobre ellas la gravedad terrestre. Empleando como coordenadas del sistema la posición de su centro de masas G , la distancia s entre partículas, y el ángulo que forma el segmento AB con la horizontal, se pide:

- Lagrangiana del sistema;
- Ecuaciones del movimiento e integrales primeras;
- Reducir el movimiento relativo a G a una ecuación diferencial en función de s tan sólo.
- Tomando ahora como coordenadas generalizadas las coordenadas absolutas de m_A que denominaremos (r_x, r_y) y las coordenadas relativas de m_B respecto a m_A que denominaremos (s_x, s_y) , obtener la Lagrangiana; comprobar que las coordenadas (r_x, r_y) son cíclicas y las integrales primeras correspondientes expresan la conservación de la cantidad de movimiento del sistema; obtener las ecuaciones de Lagrange para las otras dos coordenadas, eliminar en ellas las coordenadas cíclicas, y comprobar que definen trayectorias relativas elípticas.

(Examen final, 20/6/1994)

Problema 7.24. Una placa cuadrada $ABCD$, de masa m , está colgada de un carretón de masa M , mediante dos varillas inextensibles de masa despreciable y longitud l , articuladas en sus extremos (ver figura). La placa sólo puede moverse en su plano y el carretón puede desplazarse en el mismo plano sobre la recta horizontal en que se apoya, sin rozamiento y con un amortiguador viscoso de constante c . Se pide:

- Ecuaciones diferenciales del movimiento. ¿Existen Integrales Primeras?
- En el caso particular en que $c = 0$, si la placa se suelta estando el sistema en reposo con las varillas horizontales, calcular:
 - Desplazamiento del carretón cuando la placa llega al punto más bajo de su trayectoria.
 - Velocidad del carretón en dicho instante.

(Examen parcial, 28/1/1994)

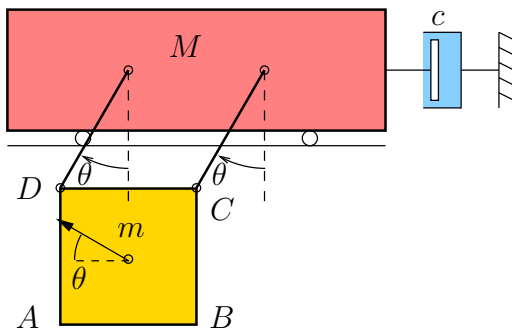


Figura 7.36: Problema 7.24

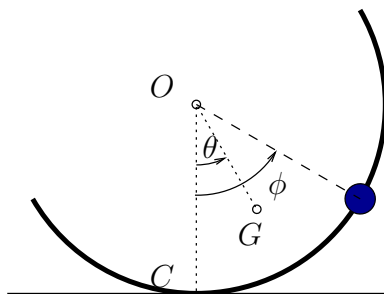
Problema 7.25. Un semicirculo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semicirculo desliza una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

- Lagrangiana del sistema y ecuaciones de Lagrange del movimiento;
- Integrales primeras, caso de haberlas.

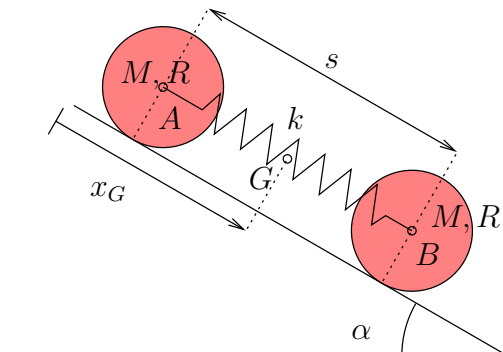
(Véase problema propuesto 6.18, empleando métodos de Newton y Euler)

(Examen final, 20/6/1994)

Problema 7.26. El sistema de la figura está formado por dos discos iguales, de masa M y radio R , cuyos centros A y B están unidos mediante un resorte elástico de constante k . Se pide:

Figura 7.37: *Problema 7.25*

- a. Empleando las coordenadas (x_G, s) , donde x_G es el desplazamiento según la dirección inclinada del C.D.M. del conjunto y s la elongación del muelle respecto a su longitud natural, determinar las ecuaciones del movimiento del sistema y las integrales primeras. Se supondrá que en el instante inicial el conjunto parte del reposo con el muelle sin tensión.
- b. Obtener la reacción de la recta sobre el disco A .
(Examen final, 20/6/1995)

Figura 7.38: *Problema 7.26*

