

Capítulo 9

Aplicaciones de la Dinámica del Sólido

Se describen en este capítulo algunos ejemplos de aplicación significativos de la dinámica del sólido en 3D. Se estudia en primer lugar el movimiento por inercia y los ejes permanentes de rotación. A continuación se trata de la peonza simétrica, la brújula giroscópica, y el péndulo esférico. Por último, se estudia el comportamiento dinámico del sólido en un sistema no inercial.

9.1. Movimiento por inercia; Descripción de Poincot.

Cuando un sólido con un punto fijo no tiene fuerzas aplicadas o éstas son tales que su momento respecto del punto fijo es nulo ($\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$), el movimiento se produce únicamente por la inercia del mismo. Este movimiento tiene varias propiedades notables, por lo que lo estudiaremos en primer lugar en este capítulo de aplicaciones.

9.1.1. Propiedades del movimiento

a. *El momento cinético, \mathbf{H}_O , es constante.*

Se deduce inmediatamente de la nulidad del momento de las fuerzas,

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O); \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

□

Por tanto \mathbf{H}_O define un vector de módulo y dirección constantes en el espacio. Convencionalmente, escogeremos esta dirección como versor \mathbf{K} del “triedro fijo”, y llamaremos H al módulo:

$$\mathbf{H}_O = HK. \quad (9.1)$$

b. *La Energía Cinética, T , es constante.*

En efecto, debido a la constancia de \mathbf{H}_O ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega});$$

premultiplicando escalarmente por $\boldsymbol{\Omega}$, que es perpendicular al segundo sumando de la expresión anterior, resulta:

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}});$$

por otra parte, considerando la simetría de \mathbf{I}_O :

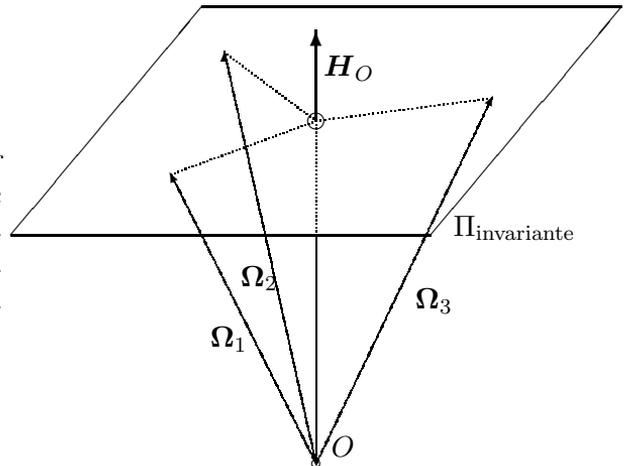
$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = 0.$$

□

Como corolario de esta última propiedad, se puede afirmar que

«la proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección fija de \mathbf{H}_O es constante.»

Figura 9.1: *En el movimiento por inercia la proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección fija de \mathbf{H}_O es constante, estando el extremo del vector $\boldsymbol{\Omega}$ situado sobre el plano invariante.*



En efecto,

$$\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 2T \quad (\text{cte})$$

Otra forma de expresar este resultado es diciendo que el extremo del vector $\mathbf{\Omega}$, supuesto su origen en O , pertenece a un plano fijo, perpendicular a \mathbf{H}_O y situado a una distancia $2T/h$, denominado *plano invariante*.

c. Dada la constancia de \mathbf{H}_O ,

$$H^2 = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{H}_O = (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O^2 \cdot \mathbf{\Omega}), \quad (9.2)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de \mathbf{I}_O . Por otra parte, de la constancia de T , se expresa:

$$2T = \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}). \quad (9.3)$$

Multiplicando (9.2) por $2T$, (9.3) por H^2 y restando ambas términos a término:

$$\mathbf{\Omega} \cdot [(\mathbf{H}^2 \mathbf{I}_O - 2T \mathbf{I}_O^2) \cdot \mathbf{\Omega}] = 0, \quad (9.4)$$

ecuación que indica que $\mathbf{\Omega}$ es la generatriz de un cono cuádrico¹ en el triedro del sólido, ya que en este triedro las componentes de \mathbf{I}_O se mantienen constantes. Este cono se denomina *cono del cuerpo*, y a lo largo del movimiento rueda sin deslizar sobre el *cono fijo*, superficie que describe $\mathbf{\Omega}$ en relación al triedro fijo. Este último es también un cono, al pasar su generatriz $\mathbf{\Omega}$ siempre por el punto O , aunque por lo general no es cuádrico. Ambos conos corresponden, respectivamente, a los axoides móvil y fijo del movimiento del sólido (apartado 4.3.2).

d. La constancia de la energía cinética permite escribir:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \left(\frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \mathbf{\Omega} \right) = 1,$$

expresión que es enteramente análoga a la (8.53) del elipsoide de inercia, sin más que tomar $\mathbf{r} = \mathbf{\Omega}/\sqrt{2T}$ (recordemos que T es constante). Por lo tanto, el lugar geométrico definido por el vector $\mathbf{\Omega}/\sqrt{2T}$ es precisamente el elipsoide de inercia².

¹Un cono cuádrico es un cono (superficie reglada definida por generatrices que pasan todas por O), cuya sección recta es una cónica, no necesariamente circular, pudiendo ser una elipse, parábola o hipérbola; En el caso en que la sección recta es una circunferencia se denomina cono de revolución o circular. Es inmediata la comprobación de que la ecuación (9.4) define un cono cuádrico, sin más que particularizar la expresión de las componentes de \mathbf{I}_O en el triedro principal.

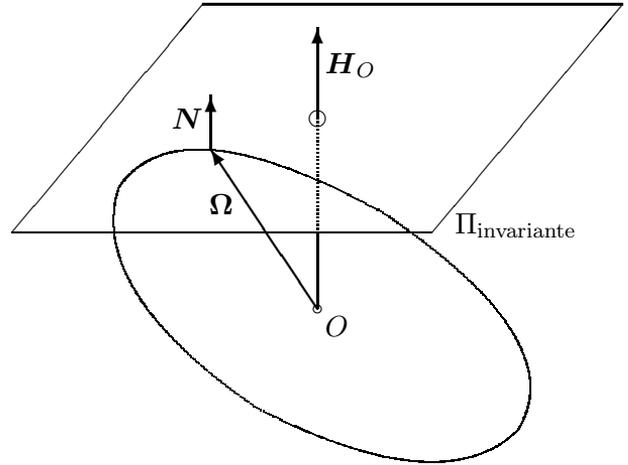
²Otra manera de expresar lo mismo es diciendo que $\mathbf{\Omega}$ define un elipsoide homotético al de inercia, de razón $\sqrt{2T}$.

La normal a este elipsoide en Ω viene definida por el gradiente de la superficie:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\Omega \cdot \left(\frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \Omega \right) \right] = \frac{\mathbf{I}_O}{T} \cdot \Omega = \frac{\mathbf{H}_O}{T}.$$

Comprobamos por tanto que este elipsoide es tangente precisamente al plano invariante definido en la propiedad b.

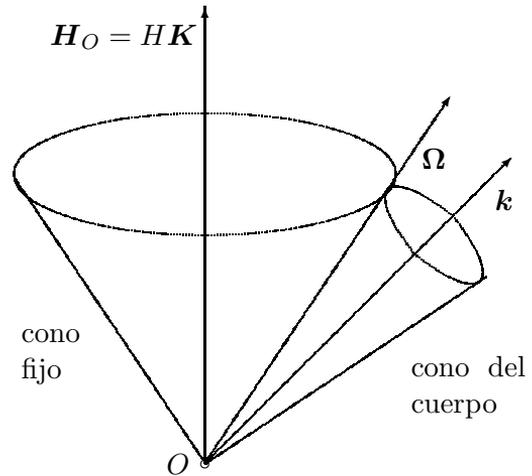
Figura 9.2: *El extremo de Ω , en relación con el sistema de referencia del cuerpo, está sobre un elipsoide, homotético al de inercia. Este elipsoide es además tangente en todo instante al plano invariante (su normal común es \mathbf{N}), sobre el cual rueda (y pivota) sin deslizar.*



En resumen, las propiedades anteriores del movimiento por inercia permiten la siguiente interpretación geométrica del mismo debida a Poincot:

1. El vector Ω define un *elipsoide* homotético al de inercia (de razón $\sqrt{2T}$), con centro en O .
2. Este elipsoide permanece tangente a lo largo del movimiento al *plano invariante*, plano perpendicular a \mathbf{H}_O y situado a una distancia $2T/H$ de O .
3. Al ser nula la velocidad de todos los puntos del sólido sobre el eje (O, Ω) , el movimiento es una *rodadura sin deslizamiento* del elipsoide sobre el plano invariante.
4. El movimiento del sólido se puede interpretar igualmente como el del *cono del cuerpo* (cono cuádrico) rodando sin deslizar sobre el *cono fijo*.

Figura 9.3: El movimiento por inercia es análogo al de un cono móvil con el cuerpo, que rueda sin deslizar sobre un cono fijo. Ambos conos son los axoides del movimiento, y comparten en todo instante una generatriz, definida por el vector Ω .



OBSERVACIONES.-

- En general Ω no es constante ni en módulo ni en dirección, a pesar de que H_O sí lo sea.
- En el caso en que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir si dos momentos principales de inercia son iguales ($A = B$), por ejemplo para un sólido de revolución, según la expresión (9.4) el eje de Ω genera un cono de revolución. En este caso particular, el módulo de Ω sí es constante, aunque su dirección no lo será en general. Es fácil ver que el cono fijo también es de revolución en este caso, por lo que el movimiento se reduce a la rodadura de un cono circular (de eje el de revolución del sólido, k) sobre otro cono circular (de eje la dirección invariante, K).

EJEMPLO 9.1: Sea un cilindro macizo homogéneo de radio r , altura h y masa m , que se mueve libremente en el campo gravitatorio simplificado. Se le pone en movimiento comunicándole una velocidad inicial de rotación que forma 45° con el eje del cilindro, y cuya componente según dicho eje vale ω . Describir el movimiento del sólido.

SOLUCIÓN: Los momentos principales de inercia son:

$$A = B = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2; \quad C = \frac{1}{2}mr^2.$$

La velocidad de rotación inicial es $\boldsymbol{\Omega}_0 = (\omega, 0, \omega)$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= A\omega \mathbf{i} + C\omega \mathbf{k}; & T &= \frac{1}{2}(A\omega^2 + C\omega^2); \\ H &= \omega\sqrt{A^2 + C^2}; & \mathbf{K} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}}(A\mathbf{i} + C\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de coeficientes del cono del cuerpo (cf. ecuación (9.4)) es

$$\mathbf{A} = 2T\mathbf{I}_O^2 - H^2\mathbf{I}_O = AC(A - C)\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un cono de revolución, con vértice en el centro del cilindro y cuyo eje lleva la dirección \mathbf{k} . El semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte, el cono fijo es igualmente un cono de revolución, cuyo eje lleva la dirección de \mathbf{K} y el semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{K} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{A + C}{\sqrt{2}\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

A su vez, el elipsoide de inercia será de revolución con semiejes $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{C})$, siendo su ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cz^2 = 1$. El vector velocidad angular, en el sistema de referencia del cuerpo, permanece sobre un elipsoide homotético al de inercia, de ecuación

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 = 2T.$$

(Siendo (p, q, r) las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$.)

9.1.2. Ejes permanentes de rotación

En el apartado anterior hemos hecho notar que el vector velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ no tiene porqué ser constante, ni en dirección ni en módulo, en un caso general de movimiento por inercia. Se plantea ahora obtener las condiciones en las que dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ pueda permanecer constante. Se denomina *eje permanente de rotación* de un sólido aquél que, para un movimiento por inercia con velocidad de rotación inicial alrededor de dicho eje, se mantenga invariante la dirección de rotación.

Sea el eje (O, \mathbf{e}) , y una velocidad de rotación inicial $\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}$. Suponemos que la dirección de $\mathbf{\Omega}$ permanece según la misma dirección \mathbf{e} a lo largo del movimiento. En primer lugar, observemos que puesto que la energía T es constante,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{\Omega^2}{2} I_e = \text{cte},$$

siendo $I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})$, momento de inercia respecto al eje (O, \mathbf{e}) . Al ser éste constante se deduce que el módulo de $\mathbf{\Omega}$ tampoco varía: $\Omega = \Omega_0$.

Por otra parte, de la ecuación de Euler (8.106), al ser $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}).$$

Se deduce por tanto que $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}$ ha de ser paralelo a $\mathbf{\Omega}$, es decir la dirección \mathbf{e} debe ser principal de inercia en O . Por tanto, un eje permanente de rotación será *necesariamente un eje principal de inercia del sólido*.

Esta condición, que es necesaria, no basta sin embargo para garantizar la *estabilidad* del eje permanente de rotación. Para analizar este aspecto, elegiremos unos ejes del cuerpo de forma que \mathbf{k} corresponda con la dirección principal que se desea estudiar, según la cual se imprime una velocidad de rotación $\mathbf{\Omega}$. Supongamos que se producen unas inevitables perturbaciones pequeñas en las otras dos direcciones perpendiculares, con lo que la velocidad angular es:

$$\mathbf{\Omega} \equiv (\epsilon_p, \epsilon_q, r) \quad \text{siendo } \epsilon_p, \epsilon_q \ll r$$

La estabilidad de $\mathbf{\Omega}$ como dirección permanente de rotación equivale a garantizar que las perturbaciones introducidas (ϵ_p, ϵ_q) se mantengan pequeñas (acotadas) a lo largo del movimiento. Si por el contrario estas perturbaciones crecen sin acotar, el movimiento de rotación alrededor de dicho eje será inestable.

Analicemos por tanto la evolución de (ϵ_p, ϵ_q) . Desarrollando para este caso las ecuaciones de Euler (8.107) con $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{\epsilon}_p - (B - C)\epsilon_q r \\ 0 &= B\dot{\epsilon}_q - (C - A)r\epsilon_p \\ 0 &= C\dot{r} - (A - B)\epsilon_p \epsilon_q \simeq C\dot{r} \end{aligned} \tag{9.5}$$

De la ecuación (9.5₃), despreciando infinitésimos de orden superior, se deduce que $r = \text{cte}$. Derivando (9.5₁),

$$0 = A\ddot{\epsilon}_p - (B - C)\dot{\epsilon}_q r;$$

despejando de (9.5₂) ($\dot{\epsilon}_q = (C - A)r\epsilon_p/B$) y eliminando en la ecuación anterior se obtiene finalmente:

$$A\ddot{\epsilon}_p + \frac{(C - B)(C - A)}{B}r^2\epsilon_p = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado en función exclusivamente de ϵ_p . Es una ecuación similar a la del oscilador armónico simple (apartado 3.1),

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Como se vió esta ecuación tiene solución armónica (acotada) para x si $k > 0$, y solución exponencial (monótona creciente, no acotada) si $k < 0$. Así, la condición de estabilidad para que ϵ_p se mantenga pequeña es:

$$(C - B)(C - A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{bien} & C > B \text{ y } C > A, \\ \text{ó bien} & C < B \text{ y } C < A. \end{cases}$$

Por lo tanto para que el eje principal sea estable como eje permanente ha de corresponder bien al máximo, bien al mínimo, de los momentos principales de inercia. En el caso en que corresponda al intermedio, no podrá ser eje permanente, siendo en este caso el movimiento inestable.

La propiedad anterior se puede confirmar experimentalmente con numerosos objetos de uso cotidiano, arrojándolos al aire con una velocidad de rotación inicial, en caída libre. Es fácil verificar que sometido únicamente a su propio peso, para un objeto en caída libre el momento en el centro de masa G es nulo³, por lo que experimenta un movimiento por inercia alrededor de G .

Podemos realizar el experimento con una caja rectangular de cartón fácil de encontrar en cualquier domicilio u oficina. Admitiendo que la caja es sensiblemente plana, como se muestra en la figura 9.4, dos momentos principales de inercia corresponden a los dos ejes de simetría dentro del plano A y B . La planitud de la caja permite deducir que para la tercera dirección principal, normal al plano, el momento de inercia será suma de los

³En efecto, calculemos dicho momento para un cuerpo \mathcal{B} de masa M :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge (-g\mathbf{k}) \rho dV = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge g\mathbf{k} \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} \rho dV \\ &= -M\mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} + \mathbf{r}_G \wedge Mg\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como receta, es válido suponer que un campo de fuerzas uniforme y paralelo como el gravitatorio simplificado produce en el sólido el mismo efecto que su resultante ($-Mg\mathbf{k}$) “aplicada” en el C.D.M. (G).

otros dos ($C = A + B$) y por tanto el máximo. Por otra parte, el momento del eje paralelo al lado menor del rectángulo (B en la figura) será mayor que el otro (A), por lo que B será el intermedio y A el mínimo. Si se lanza la caja al aire girando alrededor de los ejes C o A , permanecerá en rotación estable, mientras que la rotación alrededor del eje B es inestable.

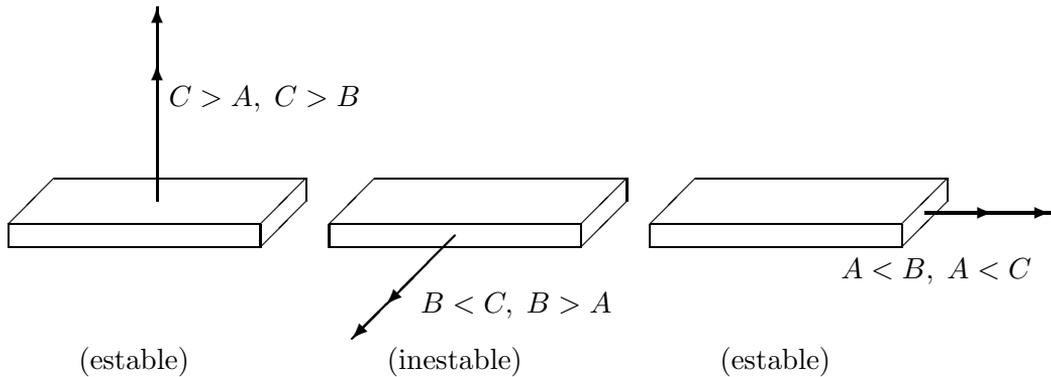


Figura 9.4: Los ejes de momento de inercia máximo (C) y mínimo (A) permiten movimientos de rotación permanente estables, mientras que el intermedio (B) es inestable.

Análogamente podríamos probar con una raqueta de tenis o de ping-pong. En este caso el momento de inercia mínimo corresponde al eje del mango, y el máximo al eje perpendicular a la raqueta.

9.1.3. Ecuaciones del movimiento

En un caso general de sólido con punto fijo el movimiento se define mediante las 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (8.108) y (8.109), en función de las correspondientes 6 variables. Veremos en primer lugar éstas para el caso más general de movimiento por inercia. En el caso particular en que dos momentos principales sean iguales (sólido de revolución), la solución se simplifica considerablemente y se puede integrar directamente.

Caso general.— Recordemos en primer lugar la expresión de las componentes de la velocidad de rotación en el triedro del cuerpo, $\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$,

en función de los ángulos de Euler (8.102):

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad (9.6)$$

$$q = -\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad (9.7)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (9.8)$$

La expresión del momento cinético en este triedro es, a partir de (9.1) y (8.101)

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K} = H(\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k})$$

Es posible obtener otra expresión del momento cinético en el triedro del cuerpo aplicando directamente (8.29). Supondremos para ello, sin pérdida de generalidad, que los ejes son los principales de inercia, con momentos de inercia (A , B , C):

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k}.$$

Igualando componentes entre ambas expresiones de \mathbf{H}_O ,

$$p = \frac{H}{A} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \quad (9.9)$$

$$q = \frac{H}{B} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \quad (9.10)$$

$$r = \frac{H}{C} \cos \theta. \quad (9.11)$$

De (9.11) se deduce

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H}; \quad (9.12)$$

y del cociente término a término entre las ecuaciones (9.9) y (9.10),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (9.13)$$

Sumando la ecuación (9.6) multiplicada por $\operatorname{sen} \varphi$ a la (9.7) multiplicada por $\cos \varphi$, se puede despejar $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta};$$

eliminando mediante (9.9) y (9.10) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{pA}{h \operatorname{sen} \theta}$ y $\cos \varphi = \frac{qB}{h \operatorname{sen} \theta}$, obtenemos:

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \operatorname{sen}^2 \theta},$$

y por último, eliminando $\text{sen}^2 \theta$ en virtud de (9.12),

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \left(1 - \frac{C^2 r^2}{H^2}\right)} = H \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} \quad (9.14)$$

Las ecuaciones (9.12, 9.13, 9.14), junto con las tres ecuaciones de Euler,

$$0 = A\dot{p} - (B - C)qr \quad (9.15)$$

$$0 = B\dot{q} - (C - A)rp \quad (9.16)$$

$$0 = C\dot{r} - (A - B)pq \quad (9.17)$$

forma un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas: $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$, que se puede resolver de manera autónoma.

Sólido de revolución.— Sea el caso particular de un sólido de revolución⁴. Según se sabe (apartado 8.4.4) un eje de revolución es siempre principal de inercia. Todos los ejes normales a éste son también principales y tienen igual momento de inercia. Tomaremos convencionalmente la dirección \mathbf{k} según el eje de revolución; los momentos de inercia serán C (según \mathbf{k}) y $A = B$ (según direcciones perpendiculares a \mathbf{k}).

En la tercera ecuación de Euler (9.17) el segundo sumando se anula, por lo que:

$$C\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \text{cte}}.$$

De la igualdad (9.12) con r constante, se deduce que la nutación es también constante:

$$\cos \theta = \frac{Cr}{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \text{cte}}.$$

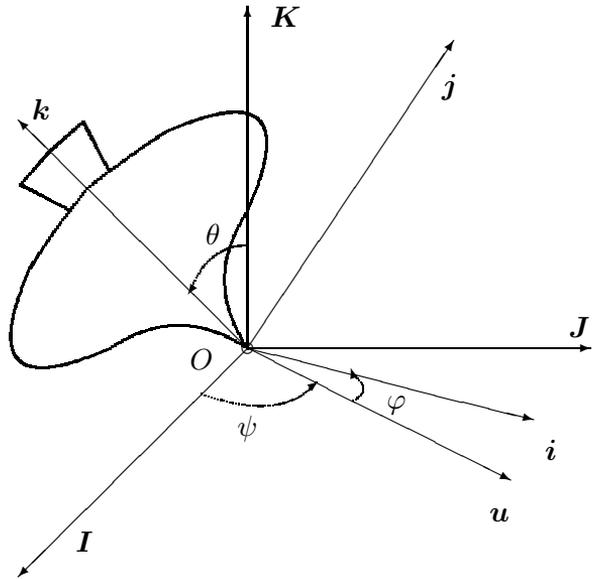
La interpretación geométrica de la nutación (figura 9.5) es el ángulo que forma el eje del cuerpo (\mathbf{k}) con el eje invariante (\mathbf{K}) (recuérdese que en el movimiento por inercia se ha tomado convencionalmente \mathbf{K} según la dirección fija de \mathbf{H}_O).

De la ecuación (9.14) con $A = B$ se obtiene:

$$\dot{\psi} = H \frac{Ap^2 + Aq^2}{A^2 p^2 + A^2 q^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} = \frac{A}{A} \quad (\text{cte})}.$$

⁴Para el desarrollo que sigue no es necesario exigir estrictamente que el sólido sea de revolución, bastaría con la condición de que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir, con dos momentos principales iguales ($A = B$).

Figura 9.5: Interpretación geométrica de los ángulos de Euler para el movimiento de Poinsot de un sólido con simetría de revolución.



Por último, a partir de este último resultado y las ecuaciones (9.8) y (9.12),

$$\dot{\varphi} = \frac{A - C}{A} r \quad (\text{cte}).$$

Por tanto, en el caso en que el sólido sea de revolución, en el movimiento por inercia el eje del cuerpo describe un cono circular alrededor de la dirección invariante (nutación θ constante). El movimiento de precesión de dicho eje tiene velocidad $\dot{\psi}$ constante, con una velocidad de rotación propia alrededor del mismo ($\dot{\varphi}$) asimismo constante. El cono del cuerpo es de revolución, con semiángulo cónico dado por $\alpha = \arctg\left(\frac{C}{A} \operatorname{tg} \theta\right)$. El cono fijo es también de revolución, con semiángulo $\beta = \theta \pm \alpha$ (dos casos posibles).

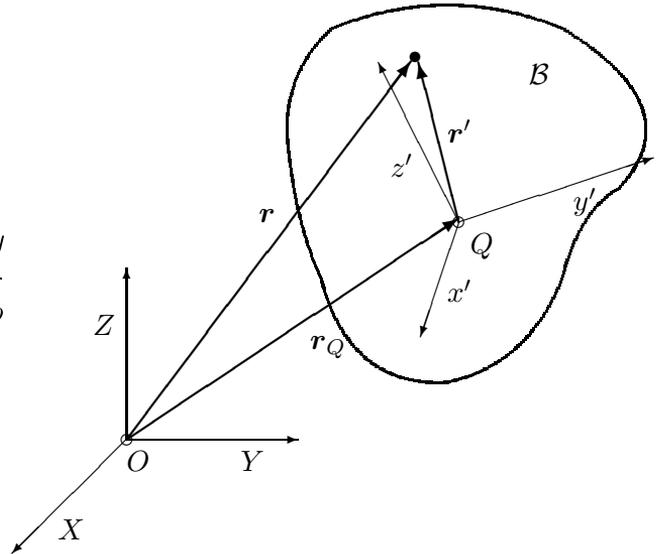
9.2. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales

Las ecuaciones de Euler (8.106) son las ecuaciones de la dinámica en un sistema de referencia inercial ($OXYZ$), siendo O un punto fijo del sólido. Alternativamente, pueden aplicarse también para el movimiento alrededor del centro de masas (G).

Las ecuaciones (8.107) son la expresión en coordenadas de las ecuaciones de Euler para el triedro del cuerpo. Recordemos que independientemente del sistema en el que se expresan las coordenadas en un instante dado, las

derivadas que intervienen en las ecuaciones de la dinámica deben realizarse siempre respecto a una referencia inercial⁵

Figura 9.6: Ejes inerciales $(Oxyz)$ y no inerciales $(Qx'y'z')$ para la descripción del movimiento del sólido \mathcal{B} .



Si se quiere describir el movimiento en relación a un sistema no inercial $SQ \equiv (Qx'y'z')$, siendo Q un punto arbitrario dado del sólido⁶, será necesario considerar el efecto de las fuerzas de inercia correspondientes.

Sistema ligado a un punto del sólido con orientación arbitraria.-

Se plantea en primer lugar el caso más general, en que se desea establecer las ecuaciones del movimiento relativas a un sistema de referencia de orientación arbitraria $SQ \equiv (Qx'y'z')$, que no coincida necesariamente con el triedro del sólido que gira con el mismo $(Qxyz)$. Sea Ω la velocidad de rotación del sólido, y $\omega \neq \Omega$, la del triedro $(Qx'y'z')$. Sea \mathbf{r} el vector posición genérico medido desde O , \mathbf{r}' el vector posición medido desde Q , y $\mathbf{r}_Q = \mathbf{OQ}$ (figura 9.6). La relación entre la aceleración absoluta y la relativa al sistema

⁵Recordemos la diferencia existente entre el sistema de referencia en que un observador realiza las derivadas para las ecuaciones de la dinámica, con la expresión de las componentes de estas ecuaciones, que en un momento dado pueden obtenerse en cualquier triedro o sistema de coordenadas.

⁶Es decir, Q se identifica con una partícula dada del sólido; en general este punto no tiene porqué estar fijo en el espacio, ni coincidirá con el centro de masas, aunque sí sería "fijo" para un sistema de referencia ligado al sólido, al moverse junto con él.

no inercial (SQ) es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\ddot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')}_{\mathbf{a}_{arr}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{cor}} + \underbrace{\left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{rel}} \quad (9.18)$$

El movimiento del sólido relativo a (SQ) es una rotación instantánea de velocidad ($\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$), por lo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ} &= (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}' \\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ} &= \left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})\right)_{SQ} \wedge \mathbf{r}' + (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}'] \end{aligned} \quad (9.19)$$

Para establecer la ecuación dinámica del movimiento relativo a (SQ) es preciso añadir al momento de las fuerzas exteriores en Q , \mathbf{M}_Q , el momento debido a las fuerzas (ficticias) de inercia originadas por \mathbf{a}_{arr} y \mathbf{a}_{cor} :

$$\mathbf{M}_Q^* = \mathbf{M}_Q - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{a}_{arr} + \mathbf{a}_{cor}) \rho dV \quad (9.20)$$

El desarrollo de esta expresión requeriría sustituir las expresiones de \mathbf{a}_{arr} a partir de (9.18) y \mathbf{a}_{cor} a partir de (9.18) y (9.19) y puede resultar algo engorroso.

Sistema ligado a un punto del sólido, sin rotación.- Es raro el caso en que sea necesario un planteamiento tan general como el anterior. En la práctica es más común que lo que interese sea el estudio del movimiento del sólido relativo a un punto Q del mismo, de movimiento conocido o impuesto, sin prescribir necesariamente una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ al triedro. En este caso, tomaremos el triedro de referencia $(Qx'y'z') = (QXYZ)$ con origen en Q y direcciones paralelas al inercial (cumpliendo un papel similar al del “triedro fijo” para el planteamiento de las ecuaciones de Euler), y por otra parte tomaremos el triedro “del cuerpo” $(Qxyz)$ con direcciones materiales fijas, es decir, que rote con el sólido. Será entonces $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, y (9.18) se convierte en:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_Q + \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ},$$

Por lo que el término adicional en (9.20) será únicamente el debido al arrastre de la traslación de Q :

$$- \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}' \wedge \ddot{\mathbf{r}}_Q) \rho dV = - \underbrace{\mathbf{r}'_G}_{=QG} \wedge (M\ddot{\mathbf{r}}_Q) \quad (9.21)$$

Resulta finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q - \mathbf{r}'_G \wedge (M\ddot{\mathbf{r}}_Q) &= \left(\frac{d\mathbf{H}_Q^{SQ}}{dt} \right)_{SQ} \\ &= \mathbf{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (9.22)$$

Nótese que en esta expresión se ha empleado el momento cinético \mathbf{H}_Q^{SQ} con velocidades relativas al sistema (SQ) , para el que es válida la expresión $\mathbf{H}_Q^{SQ} = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$. Sin embargo, si se empleasen velocidades “absolutas”, resultaría

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + M(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_Q) \wedge \mathbf{v}_Q$$

Por otra parte, al igual que en el desarrollo de las ecuaciones de Euler, se ha derivado primero respecto al sistema de referencia $(Qxyz)$, utilizando la propiedad de constancia de \mathbf{I}_Q en relación con este sistema de referencia. El término adicional (9.21) se puede interpretar como el momento en Q de $(-M\ddot{\mathbf{r}}_Q)$ situado en G .

Sistema del Centro de Masas (SCM).- En el caso en que sea $Q \equiv G$, será $\mathbf{r}'_G = \mathbf{Q}G = \mathbf{0}$, por lo que las fuerzas de inercia no dan momento en G , y la ecuación (9.22) es idéntica a la de un punto fijo en un sistema inercial (8.106):

$$\mathbf{M}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Este resultado lo conocíamos ya, habiéndolo visto al tratar del principio del momento cinético.

Si consideramos el movimiento de un sólido en el campo gravitatorio simplificado, sin otras fuerzas aplicadas ni ligaduras, será entonces posible descomponerlo en:

1. Movimiento del centro de masas G , como si fuera una partícula

$$\mathbf{a}_G = -g\mathbf{k},$$

que da lugar a una trayectoria parabólica.

2. Movimiento relativo a G , con momento nulo (movimiento por inercia), ya que el peso no produce momento respecto del centro de masas:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad (9.23)$$

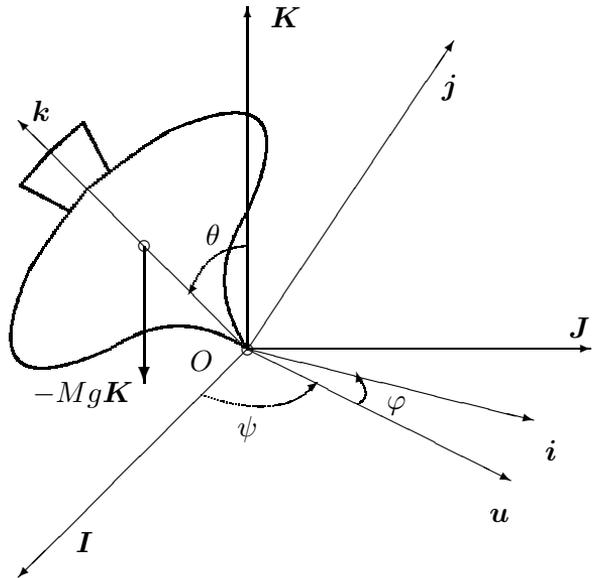
9.3. El Giróscopo

9.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza

Consideremos el movimiento de una peonza con simetría de revolución, moviéndose con un punto de su eje fijo, sometida a su propio peso (figura 9.7). Tomando los ejes locales de forma que \mathbf{k} esté según el eje de revolución, el tensor de inercia es:

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Figura 9.7: *Movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso, alrededor de un punto fijo O de su eje.*



La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2$$

Desarrollando la expresión en función de los ángulos de Euler mediante (8.102):

$$T = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

A su vez, el potencial es

$$V = Mgd \cos \theta$$

donde se ha llamado $d = OG$. La Lagrangiana resulta entonces:

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgd \cos \theta \quad (9.24)$$

Se observa que L no depende explícitamente de ψ ($\partial L/\partial \psi = 0$) ni de φ ($\partial L/\partial \varphi = 0$); por lo tanto ambas coordenadas son cíclicas, y podemos escribir las correspondientes integrales primeras como ecuaciones del movimiento:

$$\boxed{p_\psi = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta \quad (\text{cte})}$$

$$\boxed{p_\varphi = C \underbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)}_r \quad (\text{cte})}$$

La integral primera de p_ψ corresponde a la constancia del momento cinético según el eje vertical \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{K} &= (A p \mathbf{i} + A q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \cdot (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \\ &= A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C r \cos \theta \\ &= A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C \dot{\psi} \cos^2 \theta + C \dot{\varphi} \cos \theta \\ &= H. \end{aligned}$$

Esta magnitud, que denotamos por la constante escalar H , se conserva puesto que el momento de las fuerzas en esta dirección fija es nulo:

$$M_Z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{K} = [d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K})] \cdot \mathbf{K} = 0$$

La integral primera de p_φ expresa simplemente la constancia de r , componente de $\boldsymbol{\Omega}$ según el eje \mathbf{k} del cuerpo; de forma equivalente, se puede considerar que establece la conservación del momento cinético según este eje:

$$\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = (A p \mathbf{i} + A q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = C r$$

La conservación de esta magnitud no es tan obvia como en el caso anterior, al ser \mathbf{k} una dirección móvil. Para justificarla derivamos directamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} + \mathbf{H}_O \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \underbrace{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}}_{=0} + \mathbf{H}_O \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}) \\ &= (A - B)pq, \end{aligned}$$

siendo este término nulo gracias a que el sólido es de revolución ($A = B$).

Al no existir fuerzas disipativas, otra integral primera es la constancia de la energía, $T + V = E$.

Resumiendo, las tres integrales primeras de la peonza simétrica son:

$$\boxed{H = A\dot{\psi} \operatorname{sen}^2 \theta + Cr \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.25)$$

$$\boxed{r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.26)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{1}{2}Cr^2 + Mgd \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.27)$$

Podemos despejar $\dot{\psi}$ de (9.25),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (9.28)$$

para después eliminarla en (9.27), obteniendo así una ecuación función de θ exclusivamente, que expresaremos en relación a la nueva constante E' :

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} E - \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr \cos \theta)^2}{2A \operatorname{sen}^2 \theta} + Mgd \cos \theta \quad (9.29)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

se obtiene

$$E' = \frac{1}{2}A \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(H - Cru)^2}{2A(1 - u^2)} + Mgd u$$

y despejando \dot{u}^2 ,

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1 - u^2) \left(\frac{2E'}{A} - \frac{2Mgd u}{A} \right) - \frac{(H - Cru)^2}{A^2} \quad (9.30)$$

Ecuación cuya solución se obtendría directamente mediante la cuadratura:

$$t(u) = \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(2E'/A - 2Mgd u/A) - (H - Cru)^2/A^2}} \quad (9.31)$$

Una vez calculado $u(t)$ y en consecuencia $\theta(t)$, sustituiríamos en las ecuaciones (9.25) y (9.26) para obtener ψ y φ respectivamente. La cuadratura

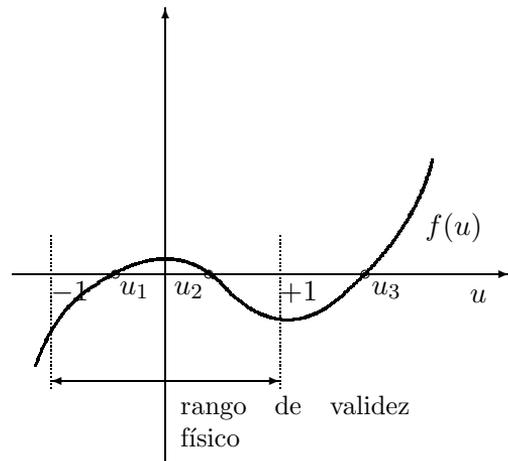
planteada en (9.31) no es inmediata de manera analítica, pero se puede abordar mediante integrales elípticas, o bien por métodos numéricos.

Sin necesidad de obtener la solución explícita, podemos sin embargo estudiar de manera cualitativa el movimiento. Para ello, observemos que las raíces de la ecuación (9.30): $f(u) = 0$, corresponden a los puntos en que $\dot{u} = 0$ y por tanto $\dot{\theta} = 0$, es decir los máximos o mínimos locales de θ . Al ser $f(u)$ un polinomio cúbico, podrá tener hasta tres raíces reales. Podemos acotar dos raíces de esta ecuación, observando que para los valores

$$u = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(u) = -\frac{(H - Cru)^2}{A^2} < 0$$

El rango de validez de u es precisamente $-1 < u < +1$, correspondiente

Figura 9.8: Valor de la ecuación cúbica $f(u)$, de la que buscamos las raíces $f(u) = 0$, correspondientes a los valores extremos de la nutación. Esta ecuación siempre tiene dos raíces en el rango de validez físico de u , $-1 < u < +1$.



a $\pi > \theta > 0$. Al ser $f(u) = \dot{u}^2$ esencialmente positivo, por motivos físicos en este rango existirá al menos una zona en que $f(u) > 0$. Por tanto en el intervalo $[-1, +1]$ existen dos raíces u_1 y u_2 . Así, θ oscilará entre los dos valores correspondientes $\theta_1 = \arccos u_1$ y $\theta_2 = \arccos u_2$, máximo y mínimo de la nutación, $\theta_1 > \theta > \theta_2$.

Una forma de visualizar geoméricamente el movimiento es a través de la trayectoria descrita por extremo del versor del eje de revolución \mathbf{k} , que podrá describir distintos tipos de curvas sobre una esfera de radio unidad, restringidas a la banda entre dos paralelos extremos: $\theta_1 > \theta > \theta_2$ (ver figura 9.9). Los distintos comportamientos vienen definidos por el signo de la velocidad de precesión, obtenido por el numerador en la ecuación (9.28), pudiéndose distinguir tres casos en función de las condiciones iniciales del movimiento (en concreto según el valor de las constantes H y r):

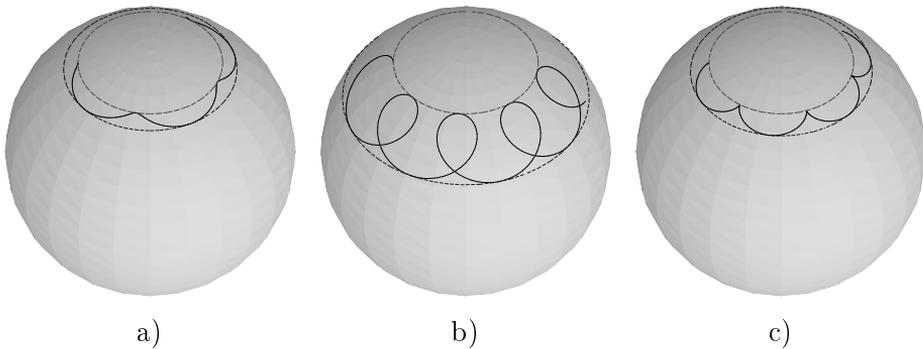


Figura 9.9: Los tres tipos de soluciones para el movimiento de la peonza simétrica, obtenidos mediante integración numérica en el ordenador de las ecuaciones del movimiento. La figura representa, sobre una superficie esférica, la trayectoria del extremo del eje de revolución de la peonza. En el caso a) la velocidad de precesión lleva siempre el mismo signo; en el caso b) alterna de signo, describiendo bucles característicos; en el caso límite c), en los puntos de nutación mínima (puntos más altos de la trayectoria) se anula $\dot{\psi}$, produciendo cúspides en la trayectoria.

1. $H - Cr \cos \theta_2 > 0$ y $H - Cr \cos \theta_1 > 0$, en cuyo caso la precesión siempre tiene el mismo sentido;
2. $H - Cr \cos \theta_2 < 0$ y $H - Cr \cos \theta_1 > 0$, en cuyo caso la precesión alterna de sentido, desarrollándose unos lazos característicos;
3. $H - Cr \cos \theta_2 = 0$, en cuyo caso se producen unas cúspides en la trayectoria con velocidad de precesión nula. Este caso se produce en la práctica cuando las condiciones iniciales corresponden a la peonza con rotación propia y su eje en reposo, a partir de una inclinación determinada (nutación θ_2). A partir de este instante la peonza empieza a caer y a precesionar simultáneamente, siendo inicialmente $\dot{\psi} = 0$.

9.3.2. Efecto giroscópico

El giróscopo es un cuerpo con simetría de revolución, con un punto de su eje fijo, y girando a gran velocidad respecto de dicho eje. En estas condiciones se produce el llamado “efecto giroscópico” que describimos a continuación.

Veremos en primer lugar el efecto giroscópico aplicado a la peonza simétrica estudiada en el apartado anterior. La condición de rotación propia

elevada la concretaremos admitiendo que la energa cinetica de rotaci6n alrededor de su eje sea mucho mayor que las posibles fluctuaciones de energa potencial gravitatoria. Como m6ximo, estas se producen al variar la altura de G entre $[-d, +d]$. Admitimos por tanto que

$$\frac{1}{2}Cr^2 \gg 2Mgd \quad (9.32)$$

De esta manera, al ser la energa asociada a la rotaci6n propia mucho mayor, cabe esperar que las oscilaciones de nutaci6n (θ) debidas al potencial gravitatorio sean peque~nas, produci6ndose un movimiento de precesi6n con nutaci6n cuasi-constante. En la realidad, debido al inevitable amortiguamiento, estas oscilaciones peque~nas en la nutaci6n se amortiguan, dando lugar con bastante aproximaci6n a un movimiento con nutaci6n constante.

En el planteamiento de las ecuaciones de Lagrange vimos que las correspondientes a ψ y φ daban lugar a sendas integrales primeras (9.25) y (9.26). La ecuaci6n en θ se obtiene derivando la Lagrangiana (9.24):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = A\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr(-\dot{\psi} \sin \theta) + Mgd \sin \theta$$

y resulta

$$\boxed{A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0} \quad (9.33)$$

Deseamos comprobar las condiciones bajo las que se puede dar un movimiento con nutaci6n cuasi-constante. Suponiendo entonces que las oscilaciones de nutaci6n son peque~nas y $\ddot{\theta} \approx 0$, se obtiene:

$$Mgd = Cr\dot{\psi} - A\dot{\psi}^2 \cos \theta$$

y resolviendo para $\dot{\psi}$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{Cr \pm \sqrt{C^2r^2 - 4AMgd \cos \theta}}{2A \cos \theta} \\ &= \frac{Cr}{2A \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AMgd \cos \theta}{C^2r^2}} \right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Para que puedan existir soluciones reales el radicando debe ser positivo, es decir $C^2r^2 > 4AMgd \cos \theta$. Debido a la hip6tesis anteriormente realizada

(9.32) queda garantizada esta condición. Por otra parte, considerando que la raíz en (9.34) se puede aproximar como $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$ (teniendo en cuenta $\epsilon \ll 1$) se obtienen dos soluciones posibles para $\dot{\psi}$:

$$\begin{cases} \dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A \cos \theta} & (\text{precesión rápida}) \\ \dot{\psi} \approx \frac{Mgd}{Cr} & (\text{precesión lenta}) \end{cases} \quad (9.35)$$

De las dos soluciones, la que se obtiene en la mayoría de los casos prácticos es la precesión lenta. Aunque en teoría sería posible la otra solución, la energía requerida es mucho mayor, por lo que es difícil alcanzar las condiciones iniciales precisas. No entramos en consideraciones de la estabilidad de las soluciones, que también juegan en contra de la precesión rápida por lo general.

Vemos pues que, en el caso del giróscopo sujeto a una fuerza gravitatoria excéntrica respecto del punto fijo, se ocasiona un movimiento de precesión alrededor del eje vertical paralelo a la acción gravitatoria, con velocidad constante.

Para generalizar este efecto, definamos los vectores siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_p = \dot{\psi} \mathbf{K} & (\text{velocidad de precesión}) \\ \mathbf{H}_z = (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = Cr \mathbf{k} & (\text{Momento cinético respecto del eje del cuerpo, orientado}) \end{cases}$$

El vector \mathbf{H}_z tiene módulo constante, siendo su ángulo con la dirección fija \mathbf{K} asimismo constante (e igual a θ). Su evolución es una rotación alrededor de \mathbf{k} con velocidad $\boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto, aplicando la fórmula de derivación de vectores móviles,

$$\frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z = \dot{\psi} Cr (\mathbf{K} \wedge \mathbf{k}) \quad (9.36)$$

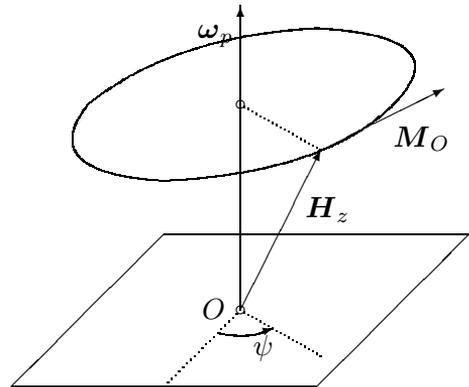
El momento de las fuerzas en O vale

$$\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K}) = Mgd(\mathbf{K} \wedge \mathbf{k}). \quad (9.37)$$

Podemos comprobar que, si se sustituye el valor obtenido en (9.35) para la precesión lenta, $\dot{\psi} = Mgd/Cr$, en la ecuación (9.36), se obtiene la identidad de esta última con (9.37):

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z.$$

Figura 9.10: En el movimiento giroscópico, el vector \mathbf{H}_z que define el eje del giróscopo gira alrededor del eje ω_p , moviéndose en dirección normal a la fuerza aplicada (es decir, paralelamente al momento $\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}$).



El resultado anterior se verifica no sólo para el momento originado por el peso, sino en general para una fuerza excéntrica \mathbf{F} cualquiera. Si consideramos a ésta aplicada en un punto P definido por $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, considerando el eje \mathbf{K} de precesión en la dirección de \mathbf{F} , se verifica igualmente

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \omega_p \wedge \mathbf{H}_z$$

Conviene destacar dos características importantes del efecto giroscópico, aparentemente contradictorias con las leyes clásicas de la dinámica, al menos tal y como se formulan para partículas:

1. La acción de una fuerza \mathbf{F} sobre el sólido produce un desplazamiento del eje del cuerpo en dirección *perpendicular a \mathbf{F}* , en lugar de según la dirección de \mathbf{F} . En efecto, el movimiento del eje lleva la dirección de $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$.
2. La acción de \mathbf{F} y por consiguiente \mathbf{M}_O produce una *velocidad de precesión constante*, en lugar de una aceleración constante, como ocurriría en un cuerpo sin efecto giroscópico. Si cesa la acción de \mathbf{M}_O , cesa inmediatamente la velocidad de precesión.

Un giróscopo que no esté sometido a momentos —por ejemplo, si está sometido al campo gravitatorio en movimiento libre, en cuyo caso el momento respecto del centro de masas es nulo— mantiene fija la orientación de su eje con una gran exactitud. Tan sólo se produce una variación de la dirección de su eje si se aplica un momento sobre él, precesionando en este caso según la dirección del momento. Similarmente al concepto de “fuerzas de inercia” en dinámica de la partícula, que representa la resistencia a variar

la velocidad de la misma, se produce aquí un “momento giroscópico” que es la resistencia a variar la orientación del eje del giróscopo.

Este fenómeno es la base de numerosas aplicaciones prácticas. Cabe citar entre ellas la brújula giroscópica. Esta consiste en un giróscopo cuyo eje puede girar libremente alrededor del centro de masas, con la única restricción de obligarle a mantenerse horizontal. En estas condiciones el eje tiende a colocarse orientado hacia el Norte geográfico, con oscilaciones pequeñas alrededor de esta orientación⁷. Asimismo, los giróscopos se emplean como sistemas de navegación inercial en aeronaves, cohetes, y satélites espaciales.

Por último, un fenómeno interesante basado en el efecto giroscópico es la *precesión de los equinoccios* en el movimiento de la tierra. Es sabido que

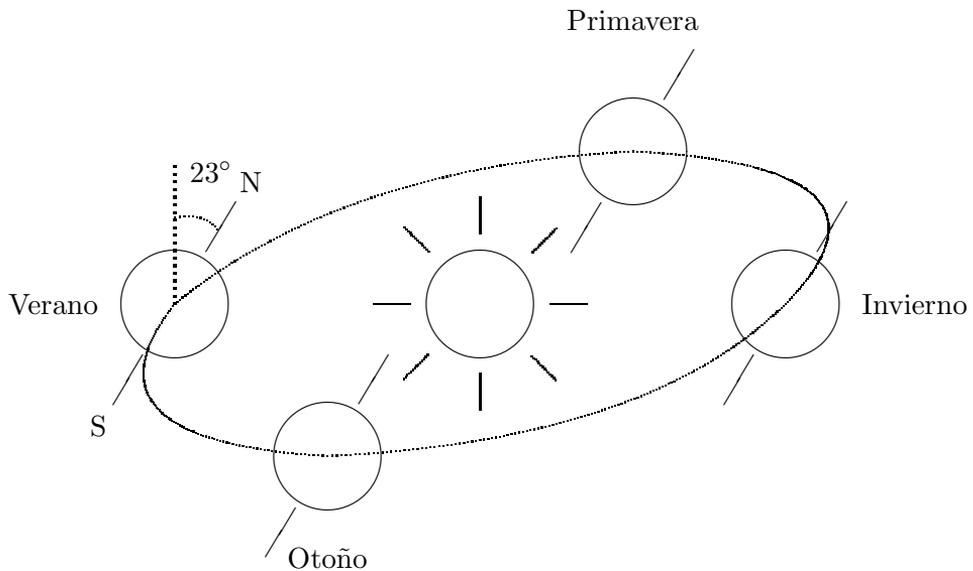


Figura 9.11: *En el movimiento de la tierra alrededor del sol, que se desarrolla sobre el plano de la eclíptica, debido a los momentos originados por la atracción excéntrica del sol y la luna, el eje N-S de rotación de la tierra precesiona muy lentamente alrededor de la perpendicular al plano, originando el fenómeno llamado “precesión de los equinoccios”.*

el movimiento de la tierra se produce en el plano de la eclíptica, con una rotación propia alrededor del eje N-S que se halla inclinado respecto a la

⁷Se puede encontrar una descripción más detallada de la brújula giroscópica en: J.A. Fernández Palacios, *Mecánica teórica de los sistemas de sólidos rígidos*, Ed. el autor, 1989; J.L. Synge y B.A. Griffith, *Principles of Mechanics*, McGraw-Hill 1970; J.M. Bastero y J. Casellas, *Curso de Mecánica*, Ediciones Univ. de Navarra, 1987

eclíptica unos 23° . Esta inclinación produce una incidencia distinta de los rayos solares en distintas fases de la órbita terrestre, siendo la responsable de los equinoccios (primavera y otoño) y los solsticios (verano e invierno). En principio, parece que el eje de la tierra se mantiene constante en dirección, por lo cual los equinoccios ocurrirían siempre en la misma época del año sidéreo. Si la tierra fuera perfectamente esférica y homogénea, esto sería así, ya que la acción gravitatoria del sol y de la luna darían un momento neto nulo respecto del centro de masas, con lo cual no existiría precesión de su eje. Sin embargo la tierra no es una esfera homogénea sino que está achatada, no siendo tampoco perfectamente uniforme, debido a la fuerza centrífuga de la propia rotación terrestre. Así el momento neto ejercido por la luna y el sol sobre la tierra producen una precesión del eje de giro (N-S) de la tierra alrededor de la normal a la eclíptica, con un periodo aproximado de 26.000 años.

Esto quiere decir que, respecto a direcciones fijas en el firmamento, léase estrellas del zodiaco o galaxias lejanas, la posición de los equinoccios varía a lo largo del tiempo; cada 2000 años aproximadamente se produce un corrimiento de un mes. Así los signos del Zodiaco, asociados con la posición de la tierra alineada en la eclíptica bajo diversas constelaciones en el firmamento celeste que dan su nombre a cada signo, no corresponden a fechas fijas en el calendario de las estaciones. Asimismo, en cada época distintas estrellas hacen el papel de estrella Polar (situada sobre el Norte, en la prolongación del eje N-S).

9.3.3. Estabilidad de la peonza dormida

Estudiamos aquí la estabilidad del movimiento de la peonza simétrica, cuyas ecuaciones se desarrollaron en el apartado 9.3.1, en la posición $\theta = 0$ (peonza «dormida»). El estudio de estabilidad tiene como objetivo analizar bajo qué condiciones un movimiento posible, cuando está sometido a pequeñas perturbaciones, se mantiene próximo al movimiento original, en cuyo caso se denomina *estable*. En el caso contrario, cualquier perturbación pequeña respecto del movimiento producirá la pérdida del mismo, denominándose *inestable*.

Estudiaremos las oscilaciones de nutación (θ), caracterizadas por la ecuación de Lagrange correspondiente que ya fue deducida anteriormente (9.33):

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0. \quad (9.38)$$

Esta ecuación se ve complementada por las dos integrales primeras de la

peonza simétrica, expresadas anteriormente en (9.25) y (9.26):

$$H = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \text{cte.} \quad (9.39)$$

$$Cr = \text{cte.} \quad (9.40)$$

Al ser inicialmente $\theta = 0$, de la primera de las expresiones anteriores (9.39) se deduce que la constante es $H = Cr$. Empleando este valor y despejando $\dot{\psi}$ en (9.39),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{Cr}{A} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

si se tiene en cuenta que el valor de θ es pequeño, desarrollando en esta expresión denominador y numerador de forma que desprezcamos términos de orden superior a 2,

$$\dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A} \frac{\theta^2/2}{\theta^2} = \frac{Cr}{2A}.$$

Sustituimos ahora el valor de $\dot{\psi}$ en la ecuación (9.38), y desprezamos los términos de orden 2 ó superior en función de θ pequeño:

$$A\ddot{\theta} - A \left(\frac{Cr}{2A} \right)^2 \theta + Cr \frac{Cr}{2A} \theta - Mgd\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A\ddot{\theta} + \left(\frac{C^2 r^2}{4A} - Mgd \right) \theta = 0.$$

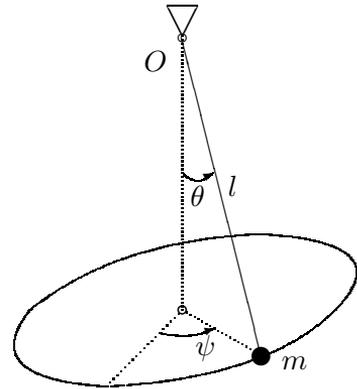
Observamos que esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple, siempre que el coeficiente de θ sea positivo, en cuyo caso resulta un movimiento armónico acotado para θ . La condición de estabilidad es por tanto

$$\frac{C^2 r^2}{4A} > Mgd. \quad (9.41)$$

9.4. El Péndulo Esférico

Sea una masa puntual m sujeta al extremo de una varilla rígida y sin masa de longitud l , cuyo otro extremo (O) está fijo. No tiene sentido en este caso definir la rotación propia, por lo que el movimiento está caracterizado únicamente por dos ángulos: ψ (precesión) y θ (nutación) (figura 9.12). Las ecuaciones son similares a la peonza simétrica, pero sin considerar rotación propia. Eligiendo como triedro “del cuerpo” un triedro con la dirección Oz

Figura 9.12: *Un péndulo esférico consiste en una masa puntual m unida por una varilla rígida a un punto fijo O , pudiéndose mover en cualquier dirección del espacio.*



según la varilla, los ejes resultan principales de inercia y el tensor de inercia en O vale

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} ml^2 & & \\ & ml^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

La Lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2(p^2 + q^2) + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

Podemos expresar dos integrales primeras: en primer lugar ψ es una coordenada cíclica,

$$\boxed{H = ml^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta} \quad (9.42)$$

Por otra parte, la energía total se conserva, al estar en el campo gravitatorio:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta} \quad (9.43)$$

De la ecuación (9.42) despejamos:

$$\dot{\psi} = \frac{H}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

De esta expresión se desprende que $\dot{\psi}$ nunca cambia de signo, al contrario de lo que podría ocurrir en la peonza, en la que la ecuación correspondiente (9.28) resultaba:

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta}$$

Eliminando $\dot{\psi}$ en la ecuación (9.43), se obtiene:

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{H^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

y despejando $\dot{\theta}^2$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{H^2}{m^2 l^4 \sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta$$

Se puede ahora realizar el cambio

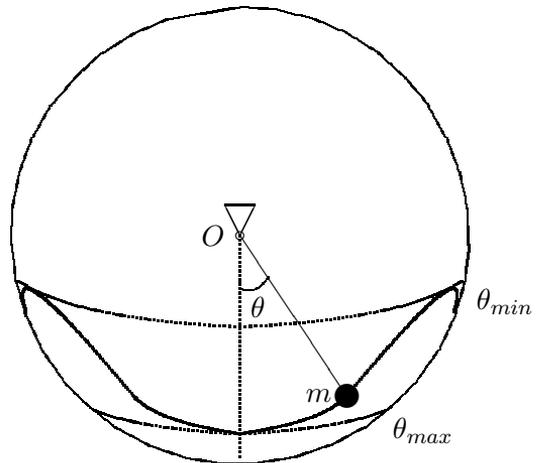
$$u = \cos \theta; \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2},$$

obteniéndose al eliminar θ una ecuación cúbica en u :

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \left(\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}u \right) - \frac{H^2}{m^2 l^4} = f(u).$$

Esta ecuación posee tres soluciones reales para $f(u) = \dot{u}^2 = 0$, correspondientes a puntos de máximo o mínimo de u . De ellas, dos y sólo dos están comprendidas entre $u = 1$ y $u = -1$, rango de validez del cambio de variable anterior. En efecto, ha de existir un intervalo de validez física en que $f(u) > 0$, ya que en el movimiento real $\dot{u}^2 > 0$ es intrínsecamente positivo. Sin embargo en $u = \pm 1$, $f(u) < 0$; luego dentro del intervalo considerado, debe haber dos puntos en que $f(u) = 0$.

Figura 9.13: La trayectoria del péndulo esférico se sitúa entre dos valores extremos, máximo y mínimo, de la nutación. El mínimo (punto más bajo de la trayectoria) está necesariamente por debajo del punto O , es decir, por debajo del ecuador de la esfera.



Por ello, al igual que ocurría en la peonza simétrica (ver apartado 9.3.1 y figura 9.9), la nutación θ oscilará comprendida entre dos valores extremos, θ_{min} y θ_{max} .

Se puede demostrar que en el péndulo el mínimo de θ necesariamente debe estar por debajo del punto de apoyo O , es decir, $0 \leq \theta_{min} \leq \pi/2$. En efecto, obtengamos la ecuación de Lagrange en θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta,$$

resultando

$$ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta.$$

Para $\pi/2 < \theta < \pi$ se verifica $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$; por tanto de la ecuación de Lagrange anterior se deduce que en este intervalo $\ddot{\theta} < 0$, lo que hace imposible que exista un mínimo dentro de él (asociado a $\ddot{\theta} > 0$). El mínimo de θ ha de estar necesariamente entre 0 y $\pi/2$, como queríamos demostrar (figura 9.13).

