Capítulo 12

Ecuaciones de Hamilton

12.1. Introducción

Para un sistema material con n grados de libertad hemos estudiado hasta ahora en el capítulo 6 las ecuaciones de Newton-Euler (6.7) y (6.12), bien en forma vectorial o bien sus componentes en coordenadas cartesianas, y en el capítulo 7 las ecuaciones de Lagrange (7.14), en coordenadas generalizadas. Todas ellas definen el movimiento mediante n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para su resolución necesitan $2n$ condiciones iniciales, por ejemplo las posiciones y velocidades iniciales.

Las ecuaciones canónicas (o de Hamilton) que se estudian en este capítulo difieren de las formulaciones anteriores en que los sistemas se describen con $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (es decir, en derivadas primeras), en lugar de n ecuaciones de segundo orden. Para ello, se introduce un conjunto nuevo de variables: los momentos generalizados p^i. Análogamente, la solución general de estas ecuaciones dependerá de $2n$ parámetros constantes que se deben determinar mediante las correspondientes condiciones iniciales (posiciones y momentos iniciales).

Las ecuaciones Canónicas y en general los métodos de la dinámica Hamiltoniana tienen un interés principalmente conceptual y teórico. Su aplicación práctica trasciende a la mecánica racional, estando en la base de la formulación dinámica de otros campos, como la mecánica cuántica. Por el contrario tienen una aplicabilidad práctica a la resolución de problemas de mecánica racional menor que las formulaciones Lagrangiana o de Newton-Euler.

En ocasiones la descripción mediante $2n$ ecuaciones de primer orden es ventajosa, ya que puede facilitar la resolución mediante métodos numéricos, que se formulan y estudian en general para sistemas de Ecuaciones diferenciales de primer orden.

El método que seguiremos para deducir las ecuaciones Canónicas se basa en la transformada de Legendre, que pasamos a describir a continuación.

12.2. La Transformada de Legendre y sus propiedades

Sea una función $f(q_i,\ s_j)$ que depende de dos conjuntos de variables: las q_i $(i = 1, 2, ...n)$, y las s_j $(j = 1, 2, ...m)$. Se define como transformada de Legendre de f respecto de las variables s_j a la función

$$G(q_i,\ p^j) \stackrel{\text{def}}{=} p^j s_j - f \tag{12.1}$$

donde se sobreentiende el sumatorio[1] en el índice repetido j, y se emplean las nuevas variables p^j que se definen como

$$p^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s_j} \qquad (j = 1, 2, ...m). \tag{12.2}$$

Diremos que las variables p^j son "conjugadas" de las s_j.

Es importante recalcar que la dependencia funcional de la transformada G es respecto de las variables q_i y de las nuevas variables p^j, para lo cual habremos de realizar el oportuno cambio de variables en la expresión de f en (12.1), eliminando las s_j en favor de p^j. Para que sea posible realizar esto, el cambio de variables ha de ser regular, condición que se expresa mediante el determinante del jacobiano de la transformación:

$$\det\left[\frac{\partial p^j}{\partial s_i}\right] = \det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial s_j \partial s_i}\right] \neq 0 \tag{12.3}$$

Si tomamos el diferencial de G en su definición (12.1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G &= s_j \mathrm{d}p^j + p^j \mathrm{d}s_j - \frac{\partial f}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \frac{\partial f}{\partial s_j}\mathrm{d}s_j \\
&= s_j \mathrm{d}p^j - \frac{\partial f}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i
\end{aligned}$$

[1] en este capítulo se entenderá el sumatorio implícito sobre los índices repetidos en todas las expresiones

donde se han empleado las relaciones (12.2). Esta igualdad nos permite identificar las derivadas parciales de G:

$$\frac{\partial G}{\partial p^j} = s_j; \tag{12.4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{12.5}$$

Observamos pues que las derivadas parciales de la transformada G respecto de las variables conjugadas (p^j) son precisamente las s^j que han venido a sustituir, y las derivadas respecto a las variables que permanecen (q_i) son las de la función original (f) con signo cambiado.

Si realizamos dos veces la transformada de Legendre volvemos a obtener la función original. En efecto, la segunda transformada sustituirá las variables p^j por

$$z_j = \frac{\partial G}{\partial p^j},$$

que considerando (12.4) son precisamente las s_j. Por otra parte denominando a la nueva transformada I, resulta

$$\begin{aligned} I(q_i,\ s_j) &= s_j p^j - G \\ &= s_j p^j - (p^j s_j - f) = f \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

12.3. Ecuaciones de Hamilton

Sea un sistema cuya configuración está descrita por n coordenadas generalizadas $\{q_i\}$, para $i = 1, ..., n$, y con función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Definiremos la *función Hamiltoniana* como la transformada de Legendre de la Lagrangiana respecto de las velocidades generalizadas:

$$\boxed{H(q_i, p^i, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^i \dot{q}_i - L} \tag{12.6}$$

siendo $p^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{q}_i$ (magnitudes que definimos en (7.34) como momentos generalizados).

Como se precisó en el apartado anterior, la transformada H debe expresarse únicamente en función de las nuevas coordenadas (q_i, p^i, t). Por tanto, la dependencia funcional de L se debe alterar al expresar (12.6), siendo necesario eliminar las variables $\dot{q}_i$ en favor de las p^i.

La magnitud (es decir, el valor numérico) de la Hamiltoniana así definida coincide con la de la integral de la energía o integral de Jacobi que se vió en la dinámica de Lagrange (ecuación (7.43) en el apartado 7.2.5). Ésta se puede escribir como

$$h = p^i \dot{q}_i - L \tag{12.7}$$

Sin embargo, la diferencia entre (12.6) y (12.7) estriba en la dependencia funcional distinta de la Hamiltoniana. En (12.6) H está expresado en función de las variables (q_i, p^i, t) mientras que h en (7.43) ó (12.7) está en función de $(q_i, \dot{q}_i, t)$. Esto habrá de ser tenido en cuenta para las expresiones que involucren derivadas parciales de H.

Recordando la observación realizada en el apartado 7.2.5, en el caso en que no tengamos sistemas de coordenadas ni enlaces móviles, la integral de Jacobi y por lo tanto la Hamiltoniana que tiene igual valor representa la energía total del sistema:

$$H = T + V$$

Las derivadas parciales de H son, aplicando las propiedades de la transformación de Legendre (12.4) y (12.5),

$$\frac{\partial H}{\partial p^j} = \dot{q}_j \qquad (j = 1, 2, ...n) \tag{12.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}^i \qquad (i = 1, 2, ...n) \tag{12.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{12.10}$$

En las expresiones (12.9) se han empleado las ecuaciones de Lagrange (7.13) para expresarlas en función de $\dot{p}^i$. Los dos conjuntos (12.8) y (12.9), de n ecuaciones cada uno, son las denominadas *ecuaciones canónicas de Hamilton,* o simplemente *ecuaciones de Hamilton.*

El primer grupo de ecuaciones (12.8) se puede interpretar como la expresión del cambio de variables entre $\dot{q}_j$ y p^j, despejando las $\dot{q}_j$. Esto siempre lo podremos hacer ya que el cambio de variables es regular, por ser la energía cinética T definida positiva. Empleando para ésta la expresión (7.29) en función de los coeficientes allí definidos:

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{1}{2}a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + a_k\dot{q}_k + T_0\right] = a_{kj}\dot{q}_k + a_j$$

siendo $\det\left[a_{kl}\right] \neq 0$.

El segundo conjunto de ecuaciones (12.9) se puede interpretar como las expresiones de la segunda ley de Newton, teniendo el término $-\partial H/\partial q_i$ el carácter de fuerzas totales (las reales más las ficticias debidas a la elección de coordenadas no cartesianas), igualadas a las derivadas de los momentos generalizados.

Por último, la ecuación (12.10) no constituye propiamente una de las ecuaciones de Hamilton, expresando simplemente que si L no depende explícitamente de t, H tampoco lo hará.

Es necesario recalcar que en la formulación de la dinámica basada en las ecuaciones canónicas cambia el concepto de "configuración" del sistema dinámico, al modificarse (convencionalmente) el conjunto de coordenadas empleadas para su descripción. Así, en la dinámica basada en las ecuaciones de Lagrange la configuración venía dada por las coordenadas generalizadas $\{q_i\}$, siendo la trayectoria del sistema la curva paramétrica dada por su evolución en el tiempo, $\{q_i(t)\}$. En concreto para el caso de coordenadas vectoriales o cartesianas, la configuración coincidía con la posición del sistema, y las trayectorias con las curvas descritas por cada partícula en el espacio geométrico ordinario. En cambio, la dinámica Hamiltoniana basada en las ecuaciones canónicas, define la configuración de un sistema mediante las $2n$ variables "fásicas" $\{q_i, p^i\}$. Las trayectorias, solución de las ecuaciones canónicas en función del tiempo, serán asímismo $\{q_i(t),\, p^i(t)\}$, y se pueden denominar *trayectorias fásicas* para diferenciarlas de la dinámica Lagrangiana. Esto constituye una generalización de lo ya mencionado en el apartado 3.6, en donde se estudió la trayectoria en el espacio de las fases (en aquel caso un plano al tratarse de sistemas con 1 grado de libertad) del oscilador armónico simple.

EJEMPLO 12.1: Veamos como ejercicio básico de aplicación inmediata de lo anterior la obtención de la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas correspondientes a una partícula libre, sometida a un potencial $V(x, y, z)$.

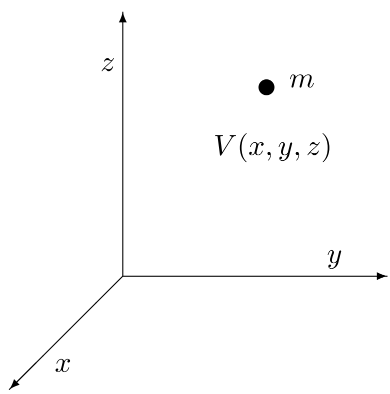

Figura 12.1: *Obtención de las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre sometida a un campo conservativo de fuerzas.*

Emplearemos como coordenadas las cartesianas (x, y, z). La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

y los momentos generalizados:

$$p^x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad p^y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad p^z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Expresando el cambio de variables, resulta el primer grupo de ecuaciones Canónicas:

$$\dot{x} = \frac{p^x}{m}; \quad \dot{y} = \frac{p^y}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p^z}{m} \tag{12.11}$$

La Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} H &= p^x\dot{x} + p^y\dot{y} + p^z\dot{z} - (T - V) \\ &= p^x\dot{x} + p^y\dot{y} + p^z\dot{z} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \end{aligned}$$

No basta con esta expresión, sino que es necesario eliminar de ella las velocidades $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, en función de los momentos generalizados. Resulta finalmente

$$H = \frac{1}{2m}[(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2] + V(x, y, z)$$

Una vez expresada H con su dependencia funcional correcta, derivamos para obtener el segundo grupo de ecuaciones canónicas (12.9):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}^x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}^y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}^z \tag{12.12}$$

Como comprobación, derivando H respecto de los momentos generalizados se comprueba que las expresiones (12.11), que habíamos deducido como expresión del cambio de variables, coinciden precisamente con el primer grupo de ecuaciones canónicas (12.8).

12.4. Obtención práctica de las ecuaciones

El ejemplo anterior es extremadamente sencillo. Sin embargo en un caso general la eliminación de las velocidades generalizadas de la expresión de H puede resultar algo más engorrosa, al incluir expresiones de segundo grado en las velocidades (ver (7.33)):

$$\begin{aligned} H &= p^i\dot{q}_i - (T - V) \qquad (12.13) \\ &= p^i\dot{q}_i - \left[\frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + a_i\dot{q}_i + \frac{1}{2}a_0\right] + V \end{aligned}$$

De aquí habría que eliminar $\dot{q}_i$ mediante sus expresiones en función de p^i.

Vamos a obtener otra expresión equivalente más sencilla, que será lineal en las velocidades $\dot{q}_i$:

$$\begin{aligned} p^i \dot{q}_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = (a_{ik}\dot{q}_k + a_i)\dot{q}_i \\ &= a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + a_i\dot{q}_i = 2T - a_i\dot{q}_i - a_0 \end{aligned}$$

Despejando,

$$T = \frac{1}{2}p^i\dot{q}_i + \frac{1}{2}a_i\,\dot{q}_i + \frac{1}{2}a_0,$$

y sustituyendo en la expresión de H (12.13) obtenemos

$$\boxed{H = \frac{1}{2}p^i\dot{q}_i - \frac{1}{2}a_i\dot{q}_i - \frac{1}{2}a_0 + V} \tag{12.14}$$

En el caso en que T sea homogénea cuadrática en $\dot{q}_i$ (lo que en la práctica es bastante común) la expresión anterior se simplifica para dar

$$\boxed{H = \frac{1}{2}p^i\dot{q}_i + V} \tag{12.15}$$

Observamos que la eliminación de las velocidades $\{\dot{q}_i\}$ resulta más fácil en las expresiones (12.14) ó (12.15) que en (12.13), ya que en esta última ecuación intervienen en expresiones cuadráticas, pudiendo ser el desarrollo bastante engorroso.

12.5. Integrales Primeras

Si se expresa la derivada temporal (total) de H a partir de (12.6),

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p^i}\dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{-\dot{p}^i\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}^i}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

donde se han empleado las ecuaciones (12.8) y (12.9).

Por tanto la derivada total de H respecto al tiempo coincide con la parcial; dicho de otra manera, si t no entra explícitamente en la expresión de H, entonces H (y la energía total en los casos en que ambas coincidan) será constante. Este resultado constituye una integral primera, de obtención inmediata en la dinámica Hamiltoniana. Independientemente de que se verifique o no la constancia de H, la Hamiltoniana H será igual a la energía total cuando la energía cinética T sea una expresión homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas.

En el caso en que la Hamiltoniana no dependa explícitamente de una coordenada generalizada, de las ecuaciones (12.9) se deduce inmediatamente que el momento generalizado correspondiente es constante:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^i = 0; \quad p^i = \text{constante}$$

En este caso decimos que q_i es una *coordenada cíclica*. Puesto que no varían, los momentos generalizados correspondientes a las coordenadas cíclicas se pueden sustituir en la Hamiltoniana por constantes c^i, quedando H en función de $2(n-r)$ grados de libertad, si r es el número de coordenadas cíclicas. Una vez resuelto el sistema así reducido, los valores de las coordenadas cíclicas se obtendrán de integrar las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial c^i}, \qquad i = 1, \ldots r.$$

Este resultado nos indica que el tratamiento de las coordenadas cíclicas en la formulación Hamiltoniana es trivial: basta con ignorarlas (de aquí que se denomine también a las coordenadas cíclicas como coordenadas "ignorables").

12.6. Generalización para fuerzas no conservativas

Si las fuerzas no provienen de un potencial, no cabe definir una función Lagrangiana y por tanto no se puede aplicar (12.6) para obtener H. Sin embargo en este caso podemos generalizar la definición de la función Hamiltoniana y de las ecuaciones canónicas, estableciendo

$$H \stackrel{\text{def}}{=} p^i \dot{q}_i - T$$

siendo $p^i \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

Por las propiedades (12.4) y (12.5) de la transformada de Legendre, las derivadas de H son:

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{12.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\dot{p}^i + Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{12.17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t} \tag{12.18}$$

donde se han empleado las ecuaciones de Lagrange (7.12) para el segundo grupo de ecuaciones, poniéndolas en función de las fuerzas generalizadas Q_i.

También se podría generalizar para el caso en que algunas fuerzas provengan de un potencial y otras no. Estableceríam para ello una Lagrangiana parcial, incluyendo únicamente las fuerzas que provengan de un potencial, realizando la transformada de Legendre sobre ella. El desarrollo sería similar al anterior, variando únicamente el significado de las fuerzas generalizadas Q_i en (12.17), que ahora corresponderían tan sólo a las fuerzas no conservativas.

Por último cabe también generalizar para el caso de enlaces anholónomos. Para ello a las fuerzas generalizadas en (12.17) sería preciso añadirles las provenientes de los enlaces:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}^i + Q_i + \lambda_j\, A^i_j$$

donde λ_j son los multiplicadores de Lagrange, y A^i_j los coeficientes de los enlaces para cada coordenada i (ver apartado 7.4.1).

12.7. El Método de Routh

La formulación de la dinámica basada en las ecuaciones canónicas resulta especialmente sencilla para las coordenadas que son cíclicas. En efecto, las coordenadas en sí no aparecen en H ni en las ecuaciones, y los momentos correspondientes son constantes. Por tanto, las coordenadas cíclicas quedan totalmente "*eliminadas*" de la formulación, que en la práctica viene a tener 2 grados de libertad menos por cada coordenada cíclica. En cambio, en la formulación de Lagrange es preciso considerar las velocidades generalizadas correspondientes en la Lagrangiana L y en las ecuaciones, ya que las velocidades $\dot{q}_i$ no tienen porqué ser constantes aunque las coordenadas sean cíclicas.

El método de Routh es un tratamiento mixto entre las formulaciones de Lagrange y Hamilton: Emplea las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas cíclicas, y las ecuaciones de Lagrange para el resto. Supongamos un sistema con n g.d.l., de los cuales las r primeras coordenadas son cíclicas:

$$\{q_j\} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0, & j = 1, 2, ...r \qquad \text{(cíclicas)} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial q_j} \neq 0, & j = r+1, r+2, ...n \qquad \text{(no cíclicas)} \end{cases}$$

Los momentos correspondientes a las coordenadas cíclicas serán constantes:

$$p^j = c^j, \qquad j = 1, 2, ...r$$

Realizamos la transformada de Legendre sólo respecto de las coordenadas cíclicas, definiendo así la denominada *función Routhiana*:

$$R = \sum_{j=1}^{r} c^j \dot{q}_j - L \tag{12.19}$$

(nótese que el sumatorio se realiza sólo para lor r primeros índices).

La dependencia funcional de R es:

$$R(q_{r+1}, \dots q_n;\ \dot{q}_{r+1}, \dots \dot{q}_n;\ c^1, \dots c^r;\ t)$$

Por las propiedades de la transformada (12.19), se cumple

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{para} \quad i = r+1, ...n \tag{12.20}$$

Es decir que, para las coordenadas no cíclicas, las derivadas parciales de R son iguales que las de L con signo cambiado.

Sustituiremos ahora las derivadas parciales dadas por (12.20) en las ecuaciones de Lagrange (7.13),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

al cambiar todos los signos en los dos términos, se obtiene un conjunto de ecuaciones igual pero ahora en función de R:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0; \qquad (i = r+1, ...n).} \tag{12.21}$$

Una vez integradas estas $(n-r)$ ecuaciones para obtener R como función de las constantes c^j y de t, calcularemos el valor de las r coordenadas cíclicas a partir de:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial c^j}, \qquad (j = 1, ...r)$$

12.8. El principio de Hamilton aplicado a la función Hamiltoniana

Recordemos que las ecuaciones de la dinámica de Lagrange son consecuencia de un principio variacional, en concreto del principio de Hamilton, tal y como se vió en el apartado 7.6. Este principio es de una naturaleza más fundamental que las ecuaciones de Lagrange, de forma que se puede generalizar a otro tipo de sistemas dinámicos. Su expresión es también de índole más sencilla, al requerir simplemente la condición de extremo de un funcional,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t = 0,$$

para variaciones arbitrarias del camino en el espacio de las configuraciones, es decir para $\{\delta q_i\}$ arbitrarias.

Después de establecer las ecuaciones canónicas se nos plantea la cuestión de si será posible definir un principio variacional del cual se puedan deducir dichas ecuaciones, de la misma forma que sucedía con las ecuaciones de Lagrange. Un aspecto a considerar es que, puesto que ahora las variables independientes son las $\{q_i,\ p^i\}$ que definen trayectorias en el espacio de las fases, lógicamente el principio debería contemplar variaciones de $\{q_i\}$ y de $\{p^i\}$ independientes.

Sea la función F definida por:

$$F(q_i,\, p^i,\, \dot{q}_i,\, \dot{p}^i,\, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^k\dot{q}_k - H(q_i,\, p^i,\, t) \tag{12.22}$$

Es inmediato comprobar, a partir de la definición de H (12.6), que el valor de esta función F es precisamente la Lagrangiana, $F = L$ (se trata de la transformación dual de Legendre, que como se vió en el apartado 12.2 coincide con la función original). Postulamos como principio variacional la condición de extremo de la integral de F entre dos instantes dados,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F\ \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p^k\dot{q}_k - H)\mathrm{d}t = 0 \tag{12.23}$$

para variaciones arbitrarias de las variables p^i y q_i respecto de la trayectoria fásica real, cumpliendo $\delta q_i = 0$ en los extremos.

En efecto, las ecuaciones de Euler-Lagrange de este principio se obtienen de forma análoga a como se hizo en la ecuación (7.97) para el caso genérico del funcional de una sola función $y(x)$. En este caso, las funciones $\{q_i(t),\ p^i(t)\}$ cumplen el papel de $y(x)$ en aquella expresión; $\{\dot{q}_i,\ \dot{p}^i\}$ son sus derivadas, y t representa la variable independiente (x).

Al establecer variaciones δq_i, δp^i independientes, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{12.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}^i}\right) = \frac{\partial F}{\partial p^i} \quad \Rightarrow \quad 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p^k} \tag{12.25}$$

Estas coinciden precisamente con las ecuaciones canónicas (12.8) y (12.9).

Si se añade a la función F en (12.22) un término que sea derivada respecto del tiempo de una función cualquiera de coordenadas y tiempo, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(q_i, t)$, el principio variacional no se ve alterado, ya que los funcionales diferirían tan sólo en una constante,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}M(\boldsymbol{q}, t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = M(\boldsymbol{q}, t)|_{t_1}^{t_2} = M(\boldsymbol{q}_2, t_2) - M(\boldsymbol{q}_1, t_1),$$

por lo que la condición de extremo en (12.23) no se ve modificada.

12.9. Estructura de las ecuaciones canónicas

Introduciremos el concepto a partir de un sistema con 1 grado de libertad. Supongamos éste definido por una función hamiltoniana $H(q, p, t)$. Podemos definir

$$\{\mathbf{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{con } x_1 \equiv q, \quad x_2 \equiv p$$

así como

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz $[\mathbf{J}]$ es ortogonal y hemisimétrica, y verifica las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]^{-1} &= [\mathbf{J}]^{\mathrm{T}} = -[\mathbf{J}] \\ [\mathbf{J}]^2 &= -[\mathbf{1}] \end{aligned} \tag{12.26}$$

Empleando la matriz $[\mathbf{J}]$ para expresar las ecuaciones canónicas:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}; \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q},$$

vemos que se pueden escribir matricialmente como

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right\} = -[\mathbf{J}] \cdot \{\dot{\mathbf{x}}\}$$

o bien, aplicando las propiedades (12.26),

$$\boxed{\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{J}] \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right\}} \tag{12.27}$$

Generalizando para el caso de n grados de libertad, de igual manera podemos definir

$$\{\mathbf{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} cq_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{Bmatrix}; \qquad \left\{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \partial H/\partial q_i \\ \vdots \\ \partial H/\partial q_n \\ \partial H/\partial p^1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial p^n \end{Bmatrix}$$

$[\mathbf{J}]$ es ahora una matriz cuadrada $2n \times 2n$, formada por submatrices nulas e identidad de orden $n \times n$:

$$[\mathbf{J}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{n\times n} & [\mathbf{1}]_{n\times n} \\ -[\mathbf{1}]_{n\times n} & [\mathbf{0}]_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones canónicas son por tanto equivalentes a la expresión matricial compacta (12.27).

En ella, el vector $\{\mathbf{x}\}$ contiene las $2n$ variables independientes de la formulación Hamiltoniana, por lo que (12.27) define la dinámica. Esta ecuación define una estructura denominada *simpléctica* característica de los sistemas Hamiltonianos.

12.9.1. Transformaciones Canónicas

La dinámica Hamiltoniana describe la evolución de los sistemas en el espacio de las fases (de $2n$ dimensiones), con coordenadas $\{q_i, p^i\}$. Es posible realizar cambios de coordenadas a otros sistemas en este espacio, aunque en un caso general no se puede garantizar que estos cambios mantengan la forma de las ecuaciones de Hamilton. A las transformaciones de coordenadas que conservan la estructura de las ecuaciones canónicas se les llama *Transformaciones Canónicas.*

Sea un nuevo conjunto de parámetros $\{Q_i, P^i\}$, relacionado con las variables $\{q_j,\ p^j\}$ mediante las relaciones

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_j,\ p^j,\ t) \\ P^i &= P^i(q_j,\ p^j,\ t) \end{aligned}$$

Para que la transformación sea canónica ha de existir una nueva función $K(Q_i,\ P^i,\ t)$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P^i} \\ \dot{P}^i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

A esta función K, que cumple el papel de Hamiltoniana transformada para las nuevas variables, se le denomina de forma algo coloquial "Kamiltoniana".

Una forma de establecer estas transformaciones es a partir del principio variacional de Hamilton (12.23). Las "funciones F" (12.22) en las coordenadas originales y en las nuevas deben ser equivalentes, por lo que a tenor de lo dicho en el apartado 12.8, diferirán en una derivada total respecto del tiempo:

$$p^j \dot{q}_j - H(q_j, p^j, t) = P^j\ \dot{Q}_j - K(Q_j, P^j, t) + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{12.28}$$

La función M se denomina función generadora de las transformaciones canónicas. Existen 4 formas que puede tomar la función M, que determinan cuatro tipos de transformaciones canónicas correspondientes. Aunque no entraremos a detallar esta clasificación, propia de textos más especializados, a modo de ejemplo consideremos una forma de generación de transformaciones canónicas mediante una función M del tipo

$$M = \phi(q_j,\ Q_j,\ t) \tag{12.29}$$

así

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \phi}{\partial Q_j}\dot{Q}_j$$

Introduciendo esta derivada en (12.28), y puesto que q_j y Q_j son variables independientes, se obtienen las relaciones

$$p^j = \frac{\partial\phi}{\partial q_j}; \quad -P^j = \frac{\partial\phi}{\partial Q_j}; \quad K = H + \frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{12.30}$$

Una función cualquiera ϕ que cumpla estas condiciones nos permitirá generar transformaciones canónicas, en las que la "Kamiltoniana" K cumplirá las ecuaciones canónicas para las nuevas coordenadas.

Una aplicación de especial interés de las transformaciones canónicas sería para intentar convertir todas las coordenadas de un sistema en cíclicas, con lo que la resolución de las ecuaciones canónicas sería trivial como se ha visto. Esto pudiera parecer el hallazgo de la "piedra filosofal" de la dinámica, si no fuera porque obtener las transformaciones canónicas precisas no es en absoluto sencillo. En la práctica, el problema dinámico se convertiría en obtener las transformaciones canónicas precisas para convertir todas las coordenadas en cíclicas. En el apartado siguiente se detalla un ejemplo sencillo de este tipo de transformaciones.

12.10. Ejemplos

Ejemplo 12.2: Obtención de las ecuaciones canónicas para el caso general del movimiento de una partícula de masa m en un campo central, definido por un potencial $V(r)$.

Sabemos que, al conservarse el momento cinético, el movimiento es plano, por lo que tomaremos las coordenadas polares (r,φ):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$$

La Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - V(r),$$

y los momentos generalizados:

$$p^r = m\dot r; \quad p^\varphi = mr^2\dot\varphi.$$

Comprobamos la condición (12.3) de regularidad del cambio de variables de $\dot q_i$ a p^i:

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\right| = \left|\begin{matrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{matrix}\right| = m^2r^2 \neq 0 \quad \text{para } r \neq 0$$

La Hamiltoniana la podemos obtener aplicando (12.15),

$$H(q_i, p^i) = \frac{(p^r)^2}{2m} + \frac{(p^\varphi)^2}{2mr^2} + V(r)$$

Siendo las ecuaciones canónicas:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p^r} = \frac{p^r}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p^\varphi} = \frac{p^\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p^r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{(p^\varphi)^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p^\varphi} = 0$$

Comprobamos que φ es cíclica, por lo que $p^\varphi = l$ (cte), siendo l el módulo del momento cinético.

También, al ser H independiente del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = T + V = (\text{cte})$$

Ejemplo 12.3: Sea un oscilador armónico simple, de masa m y constante lineal del resorte k. Denominamos q la elongación medida desde la posición de equilibrio, y p el momento generalizado correspondiente. Realizar una transformación canónica a coordenadas cíclicas (P, Q).

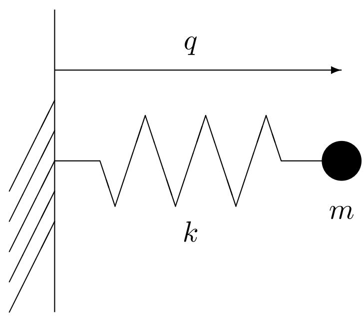

Figura 12.2: *Oscilador armónico simple.*

La Hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{12.31}$$

donde $p = m\dot{q}$ es el momento generalizado, y $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$.

Veamos una transformación canónica que convierta a la coordenada q en otra coordenada Q que es cíclica. Para ello condideramos la función generadora

$$\phi(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega\, q^2 \cot Q$$

que es del tipo (12.29) mencionado en el apartado 12.9. Aplicando las relaciones (12.30)

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \phi}{\partial q} = m\omega\, q \cot Q \\ P &= -\frac{\partial \phi}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega \frac{q^2}{\operatorname{sen}^2 Q} \\ K &= H \end{aligned}$$

eliminando p y q entre estas igualdades resulta

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q; \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \tag{12.32}$$

lo que sustituido en (12.31) arroja

$$K = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2\, q^2 = \omega\, P$$

Inmediatamente comprobamos que se verifica

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \text{ cíclica}$$

Al tratarse de una coordenada cíclica, las ecuaciones canónicas resultan triviales de plantear y de integrar, en función de dos parámetros (α, β) que se obtendran con las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow\ P = \alpha \quad \text{(cte)} \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow\ Q = \omega t + \beta \end{aligned}$$

Una vez realizada esta integración, deshaciendo el cambio (12.32), se obtiene para q

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

que es la solución general, conocida ya, de oscilaciones armónicas en vibraciones libres, en función de dos constantes de integración α y β, que se determinarán a partir de las ecuaciones iniciales.