

Mecánica de Medios Continuos: Resumen de Álgebra y Cálculo Tensorial

José M.^a Goicolea Ruigómez,

DEPTO. DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS,
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

27 de septiembre, 2007

Índice

1. Álgebra vectorial y tensorial	2
1.1. Escalares, puntos y vectores	2
1.2. Producto escalar y vectorial	3
1.3. Bases y coordenadas	5
1.4. Tensores de orden dos	8
1.5. Operaciones y clases especiales de tensores	11
1.6. Cambio de coordenadas de un tensor	13
1.7. Coeficientes de permutación	14
1.8. Formas bilineal y cuadrática asociadas a un tensor	15
1.9. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico	16
1.10. Determinante de un tensor	17
1.11. Autovalores y descomposición espectral	18
1.12. Teorema de Cayley-Hamilton	23
1.13. Descomposición simétrica - hemisimétrica	24
1.14. Descomposición Polar	25
1.15. Tensores de orden cuatro	26
2. Cálculo vectorial y tensorial	27
2.1. Derivada de un campo escalar	28
2.2. Derivada de un campo vectorial	29
2.3. Divergencia, rotacional y Laplaciano	30
2.4. Teorema de la divergencia	32
2.5. Teorema de Stokes	33
2.6. Funciones de tensores de orden dos	34

1. Álgebra vectorial y tensorial

Se resumen aquí algunos conceptos y definiciones de vectores y tensores, con pretensión de sencillez y brevedad, que resultan importantes para la mecánica de medios continuos. En consecuencia, nos limitaremos al espacio Euclídeo ordinario \mathbb{E}^3 y a coordenadas cartesianas. Para un tratamiento más completo se recomienda consultar otros textos¹.

1.1. Escalares, puntos y vectores

En lo que sigue trataremos de los escalares (números reales \mathbb{R}), de los puntos (espacio (afin) geométrico ordinario \mathbb{E}^3), y de los vectores asociados (espacio vectorial euclídeo \mathcal{V} de dimensión 3).

Los elementos $\alpha \in \mathbb{R}$ se denominan *escalares* y pueden considerarse como *tensores de orden cero*, denominación que justificaremos más adelante.

Los elementos $A \in \mathbb{E}^3$ se denominan *puntos*. El segmento orientado que transporta un punto A hacia otro B , o lo que es lo mismo, con origen en A y final en B , se denomina *vector*:

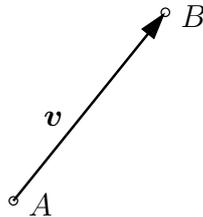


Figura 1: Vector entre dos puntos A y B

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A; \quad A + \mathbf{v} = B. \quad (1)$$

El conjunto de los vectores, junto con las operaciones de suma de vectores mediante la regla del paralelogramo y producto por un escalar tiene la estructura de *espacio vectorial euclídeo*, denominándose \mathcal{V} , espacio vectorial asociado a \mathbb{E}^3 .

Esquemáticamente, las propiedades axiomáticas del espacio vectorial, pa-

¹J. Rodríguez Piñero: *Tensores y geometría diferencial*, 1998; D.A. Danielson: *vectors and tensors in engineering*, 1991; G.E. Hay: *Vector and tensor analysis*, 1953.

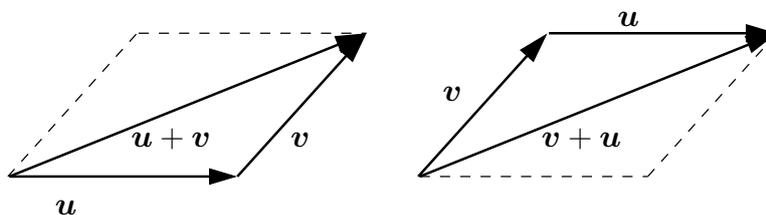


Figura 2: Regla del paralelogramo para la suma de vectores: $A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$; comprobamos la conmutatividad, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

ra vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ y escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, \\
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \\
 \exists \mathbf{0} \mid \mathbf{a} + \mathbf{0} &= \mathbf{a}, \\
 \exists (-\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \mathbf{0}; \\
 \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \\
 (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \\
 \lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a}, \\
 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Fijado un punto origen $o \in \mathbb{E}^3$, existe una equivalencia (biyección) entre puntos y vectores, ya que cada punto x está asociado al vector $\mathbf{x} = \overrightarrow{ox}$. Por este motivo en ocasiones emplearemos la notación \mathbf{x} para referirnos a un punto x ($o + \mathbf{x} = x$).

1.2. Producto escalar y vectorial

El *producto escalar* de vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ es una operación simétrica, simbolizada por un punto (\cdot), mediante la cual se obtiene un número real ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$), con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\
 (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &\geq 0; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

La norma o magnitud de un vector se define como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}},$$

interpretándose como la distancia entre los puntos origen y final del mismo, $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \text{dist}(A, B)$. Como consecuencia de los axiomas anteriores se obtienen diversas propiedades interesantes, como la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

Por otra parte, el producto escalar puede interpretarse geoméricamente como

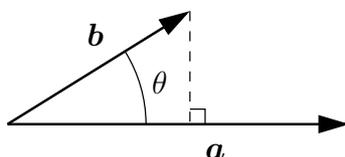


Figura 3: Producto escalar de dos vectores

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (4)$$

siendo θ el ángulo formado por \mathbf{a} y \mathbf{b} . Cuando el producto escalar de dos vectores es nulo ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$) se dice que son *normales*, *ortogonales* o *perpendiculares*.

El *producto vectorial* de vectores es una operación hemisimétrica (antisimétrica) entre vectores, simbolizada por una cuña (\wedge), cuyo resultado es otro vector ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathcal{V}$), con las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} &= -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \\ (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= 0, \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

El producto vectorial se interpreta geoméricamente como un vector perpendicular al plano formado por los dos vectores que se multiplican, orientado según la regla de la mano derecha (sentido del pulgar cuando el índice va del primer vector al segundo), y cuya magnitud es

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| |\sin \theta|,$$

es decir el área del paralelogramo formado por los dos vectores.

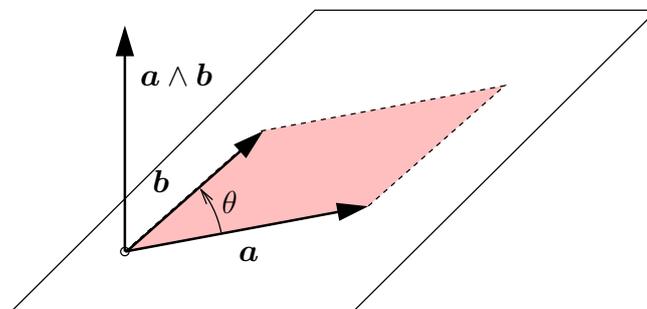


Figura 4: Producto vectorial de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Por último, a partir de los productos escalar y vectorial se puede definir el *producto mixto* de tres vectores:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}). \quad (6)$$

El producto mixto es obviamente un escalar. Por las propiedades de los productos escalar y vectorial puede demostrarse fácilmente (se propone como ejercicio al lector) que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad (7)$$

es decir que se pueden intercambiar los productos escalar y vectorial. Como consecuencia, se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \\ &= -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}], \\ [\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] &= \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + \mu[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}], \\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ linealmente dependientes.} \end{aligned} \quad (8)$$

Vemos por tanto que el signo del resultado se mantiene si se efectúa una permutación par de los vectores, y se invierte si es impar. La interpretación geométrica del producto mixto es el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores.

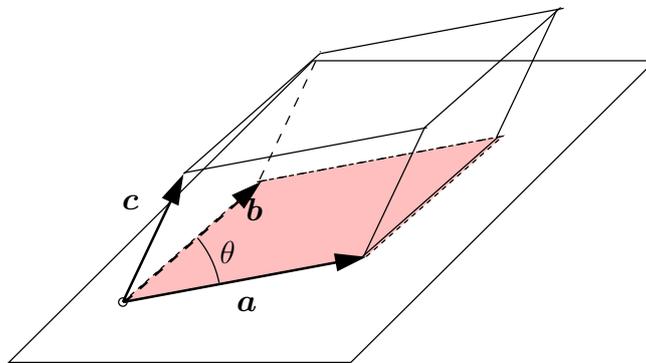


Figura 5: Producto mixto de tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} .

1.3. Bases y coordenadas

El espacio vectorial euclídeo \mathcal{V} tiene dimensión 3, es decir se puede establecer una base de 3 vectores linealmente independientes $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ que permite expresar un vector cualquiera $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ como combinación lineal,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{p=1}^3 v_p \mathbf{e}_p \\ &= v_p \mathbf{e}_p \\ &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (9)$$

En esta fórmula y en lo que sigue, con objeto de simplificar la notación, siempre que en un monomio haya un índice repetido dos veces se entenderá que la expresión se suma sobre el rango del índice, sin que sea necesario escribir el símbolo del sumatorio, salvo que se indique expresamente lo contrario. Los coeficientes (v_1, v_2, v_3) se denominan coordenadas de \mathbf{v} en la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Se puede escoger esta base de forma que sea *ortonormal*, es decir formada por vectores unitarios y mutuamente perpendiculares, verificándose

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (10)$$

(Donde los coeficientes δ_{ij} ó *deltas de Kronecker* se definen por $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). Supondremos además que este triedro es *a derechas*, es decir $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$.

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, supondremos siempre bases ortonormales. Se denomina *sistema de referencia cartesiano* al conjunto $\{o; \mathbf{e}_i\}$ formado por un punto $o \in \mathbb{E}^3$ y una base $\{\mathbf{e}_i\}$ para el espacio vectorial asociado \mathcal{V} . De esta forma, las coordenadas cartesianas de un punto $x \in \mathbb{E}^3$ se definen como las coordenadas del vector $\mathbf{x} = \vec{ox} = \sum_{p=1}^3 x_p \mathbf{e}_p$, es decir, $(x_i) = (x_1, x_2, x_3)$.

En función de sus coordenadas en una base ortonormal, el producto escalar de dos vectores puede expresarse como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 u_p v_p = u_p v_p. \quad (11)$$

Este resultado se deduce directamente de la linealidad del producto escalar y de las relaciones de ortogonalidad de los vectores de la base.

Cambio de base.— A un mismo vector le corresponden distintas coordenadas en distintas bases. Se plantea la cuestión de cómo cambian las coordenadas de un vector ante un cambio de base. Supondremos una primera base $\{\mathbf{e}_i\}$ y una nueva base $\{\mathbf{e}'_i\}$ a la que se desea cambiar. Para nuestros propósitos será suficiente considerar exclusivamente cambios entre bases ortonormales, es decir supondremos que tanto la base original como la nueva son de este tipo.

Puesto que los nuevos vectores admitirán una representación como combinación lineal de los vectores de la base antigua, podremos escribir p.ej. para el primero $\mathbf{e}'_1 = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e}_3$. Denominaremos a estos coeficientes con la notación $a_{11} = \mu_1$, $a_{21} = \mu_2$, $a_{31} = \mu_3$, donde el primer índice (1, 2, 3) indica la componente y el segundo (1) que se trata del vector primero de la base nueva. De esta forma, la expresión general de los vectores de la base nueva en función de la antigua es

$$\mathbf{e}'_i = a_{pi} \mathbf{e}_p. \quad (12)$$

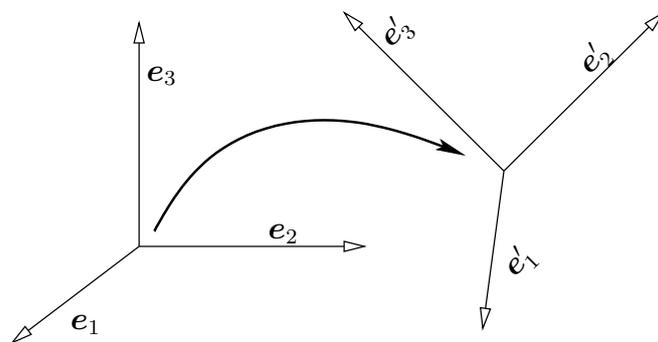


Figura 6: Cambio de base entre $\{\mathbf{e}_i\}$ y la nueva base $\{\mathbf{e}'_i\}$, ambas ortonormales.

de forma equivalente, podemos expresar la relación de cambio de base mediante la ecuación matricial

$$(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\mathbf{e}'_i) = (\mathbf{e}_i)[\mathbf{A}], \quad (13)$$

donde (\mathbf{e}_i) , (\mathbf{e}'_i) indican matrices fila (1×3) con los vectores de la base, y $[\mathbf{A}] = [a_{ij}]$ es la matriz (3×3) con los coeficientes del cambio de base². Una forma útil para obtener las componentes de la matriz de cambio en la práctica es considerar que la columna i -ésima de $[\mathbf{A}]$ representa las coordenadas del vector correspondiente \mathbf{e}'_i en la base anterior (\mathbf{e}_i) .

Sin más que transponer (13), la expresión matricial anterior puede escribirse también de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{\mathbf{e}'_i\} = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{e}_i\}, \quad (14)$$

donde $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$ indican matrices columna (3×1).

Podemos observar también que se cumplen las siguientes igualdades, cuya obtención es inmediata a partir de (12) y las relaciones de ortogonalidad:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = a_{ij}. \quad (15)$$

La expresión en coordenadas de un vector \mathbf{v} dado en ambas bases será

$$\mathbf{v} = v_p \mathbf{e}_p = v'_q \mathbf{e}'_q;$$

multiplicando escalarmente ambos lados de la igualdad anterior por \mathbf{e}'_j , y teniendo en cuenta (15),

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_j = \begin{cases} v_p \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}'_j = v_p a_{pj}, \\ v'_q \mathbf{e}'_q \cdot \mathbf{e}'_j = v'_q \delta_{qj} = v'_j. \end{cases}$$

²Emplearemos la notación (a_i) ó (\mathbf{a}) para indicar matrices fila, $\{b_i\} = (b_i)^T$ ó $\{\mathbf{b}\}$ para indicar matrices columna, y $[c_{ij}]$ ó $[\mathbf{C}]$ para otros tipos de matrices.

obteniéndose las ecuaciones de cambio de coordenadas en forma indicial

$$v'_j = a_{pj}v_p. \quad (16)$$

Esta expresión puede escribirse también de forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\mathbf{v}\}' = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{v}\}. \quad (17)$$

En la expresión anterior $\{\mathbf{v}\}$ y $\{\mathbf{v}\}'$ son respectivamente las matrices columna de coordenadas en la base antigua y nueva.

Por otra parte, podemos desarrollar la expresión en componentes de \mathbf{v} empleando las relaciones de cambio (12),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_p \mathbf{e}_p \\ &= v'_q \mathbf{e}'_q \\ &= v'_q a_{rq} \mathbf{e}_r, \end{aligned}$$

e identificando coeficientes se llega a

$$v_i = a_{iq}v'_q \Leftrightarrow \{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{v}\}'. \quad (18)$$

Comparando las ecuaciones (17) y (18) se deduce la relación

$$[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^T \Leftrightarrow a_{ip}a_{jp} = \delta_{ij}. \quad (19)$$

Las matrices que cumplen esta propiedad (la inversa coincide con la traspuesta) se denominan *ortogonales*. Esta característica surge al obligar a que ambas bases sean ortonormales.

1.4. Tensores de orden dos

Aplicaciones lineales.— Dentro de los entes que hemos considerado, las aplicaciones lineales más sencillas son las de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir que para un escalar $x \in \mathbb{R}$ producen otro escalar $y = \phi(x)$. Es fácil comprobar que si cumple la propiedad de linealidad ($\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)$), la forma que debe tomar la función es el producto por un determinado escalar, que —sin que dé lugar a equívoco— llamamos también ϕ : $\phi(x) = \phi \cdot x$. Esta aplicación, que se asimila por tanto a un escalar ϕ , puede considerarse como un *tensor de orden cero*.

El siguiente tipo de aplicación que consideramos es la que asocia a un vector cualquiera $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ un escalar, $\sigma(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$. La propiedad de linealidad en este caso es $\sigma(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\sigma(\mathbf{u}) + \mu\sigma(\mathbf{v})$. Esta propiedad precisamente la verifica el producto escalar (3)₃, por lo que un vector cualquiera \mathbf{a} define una aplicación lineal asociada, el producto escalar:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}.$$

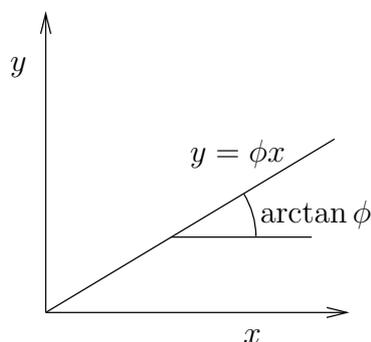


Figura 7: Una aplicación lineal de \mathbb{R} en \mathbb{R} puede interpretarse geoméricamente como una recta por el origen, definida por el valor de su pendiente $\phi \in \mathbb{R}$ (tensor de orden cero)

Esta propiedad permite identificar los vectores como *tensores de orden uno*.

La siguiente extensión lógica a las aplicaciones que consideramos es la de aplicaciones lineales de vectores en vectores, que como veremos a continuación se denominan

Tensores de orden dos.— Se denomina *tensor de orden dos* sobre un espacio vectorial \mathcal{V} a una aplicación lineal $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, de forma que

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (20)$$

donde indicamos la notación que emplearemos³ usualmente, mediante un punto (\cdot). La linealidad se traduce de forma resumida en la propiedad siguiente

$$\mathbf{T} \cdot (\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

El conjunto de tensores de orden dos sobre \mathcal{V} se denota por \mathcal{V}^2 , y tiene la estructura de espacio vectorial de dimensión $3^2 = 9$. Se define el *tensor nulo* $\mathbf{O} \in \mathcal{V}^2$ por $\mathbf{O} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, y el *tensor identidad o unidad* $\mathbf{1} \in \mathcal{V}^2$ por $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Además, en \mathcal{V}^2 se definen las propiedades y operaciones siguientes.

1. *Igualdad.* Dos tensores $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ son iguales si y sólo si

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (21)$$

2. *Suma.* Dados $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ la suma $\mathbf{S} + \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ se define por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (22)$$

³Otros autores suelen omitir el punto para indicar la acción de un tensor sobre un vector, escribiendo exclusivamente $\mathbf{T}\mathbf{v}$ en lugar de $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ como aquí. Nosotros preferiremos escribir explícitamente el punto para dejar claro que en la expresión indicial se *contrae* un índice, como veremos más adelante (26).

3. *Producto por un escalar.* Dado $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el producto $\alpha\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ por

$$(\alpha\mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (23)$$

4. *Producto o composición de tensores.* Dados $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ se define el producto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ por⁴

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (24)$$

Con estas definiciones, es fácil comprobar que la suma de tensores es conmutativa y asociativa, así como el producto por un escalar. Asimismo, el producto por un escalar y el producto de tensores son distributivos respecto de la suma.

Se definen las *componentes de un tensor* \mathbf{S} en una base cualquiera $\{\mathbf{e}_i\}$ como los coeficientes escalares

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (25)$$

Por tanto, la expresión en componentes de la aplicación de un tensor sobre un vector es

$$\mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot u_p \mathbf{e}_p) = S_{ip} u_p. \quad (26)$$

Las componentes de un tensor se pueden escribir en forma de matriz,

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

indicando el primer índice fila y el segundo columna de la matriz. Nótese que para diferenciar la matriz de componentes del tensor respecto del tensor mismo se emplea la notación $[\mathbf{S}]$ en lugar de \mathbf{S} . La definición de un tensor es intrínseca, independiente de la base, mientras que sus componentes son distintas según la base elegida.

La representación anterior puede interpretarse como una extensión de la representación de un vector \mathbf{v} (tensor de orden uno) por medio de sus componentes en una base como un conjunto de coeficientes de un índice v_i , ó una matriz columna $\{\mathbf{v}\}$.

De esta forma, en una base dada, el producto de tensores se expresa mediante la notación indicial siguiente y el correspondiente producto de matrices:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad U_{ij} = S_{ip} T_{pj} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{U}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]. \quad (28)$$

⁴Aquí también la notación que emplean otros autores para el producto de tensores es la simple yuxtaposición de ambos símbolos, \mathbf{ST} , aunque nosotros preferiremos escribir punto (\cdot) para enfatizar que en la expresión indicial se contrae un índice entre ambos (28), de forma similar a la aplicación del tensor sobre un vector.

El *producto tensorial* (también llamado diádico) de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se define como un tensor de orden dos, de acuerdo a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (29)$$

La expresión en componentes es

$$\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad u_i = a_i b_p v_p. \quad (30)$$

Las componentes del tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ son

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)) = a_i b_j, \quad (31)$$

lo que en expresión matricial es

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\}\{\mathbf{b}\}^T. \quad (32)$$

Mediante el producto tensorial de los vectores de la base, se puede escribir el desarrollo de un tensor en función de sus componentes,

$$\mathbf{T} = T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q. \quad (33)$$

1.5. Operaciones y clases especiales de tensores

Dado un tensor \mathbf{S} definimos su *traspuesto*, \mathbf{S}^T , como otro tensor que verifica

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (34)$$

Decimos que un tensor \mathbf{S} es *simétrico* si $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, mientras que será *hemisimétrico* si $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$.

Un tensor \mathbf{S} admite *inverso* si existe otro tensor \mathbf{S}^{-1} tal que

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (35)$$

Decimos que un tensor \mathbf{Q} es *ortogonal* si $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, es decir,

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}. \quad (36)$$

La *traza* es una operación tensorial lineal que asocia a un tensor de orden dos un escalar. Aplicada al producto tensorial de dos vectores, cumple

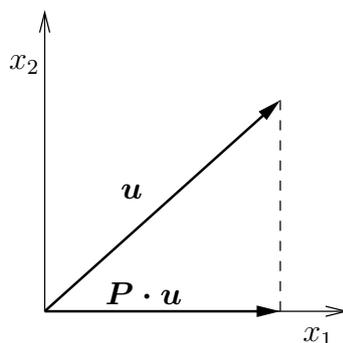
$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \quad (37)$$

Por tanto, para los vectores de la base —ortonormal—,

$$\text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad (38)$$

y aplicando esta expresión en el desarrollo de un tensor \mathbf{T} ,

$$\text{tr} \mathbf{T} = \text{tr}(T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = T_{pq} \delta_{pq} = T_{pp} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (39)$$

Figura 8: Tensor proyección sobre el eje Ox_1

Es decir, la traza de un tensor equivale (en coordenadas ortonormales) a la suma de componentes de su diagonal principal. Conviene recalcar que, al tratarse de una operación tensorial intrínseca, el resultado es independiente del sistema de coordenadas en el que se calcule. Por este motivo se dice que la traza es un *invariante* del tensor.

Se define el *producto escalar de tensores* de orden 2 ($\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$), o producto doblemente contraído, de la siguiente forma:

$$\mathbf{S}:\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T) = S_{pq}T_{pq}. \quad (40)$$

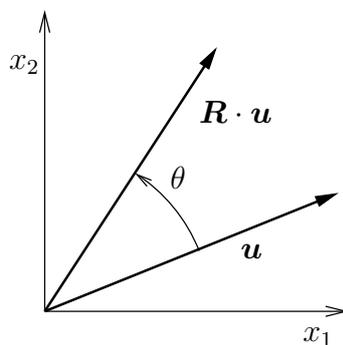
Esta operación es intrínseca, es decir no depende de las coordenadas en que se expresen los tensores. Por otra parte, para un tensor \mathbf{S} dado, el producto escalar por sí mismo $\mathbf{S}:\mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T)$ es un invariante escalar, que puede considerarse para establecer una norma del tensor: $|\mathbf{S}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}$.

Puede definirse asimismo el *producto contraído por la izquierda* de un vector (\mathbf{a}) y un tensor (\mathbf{T}), como la aplicación del traspuesto del tensor \mathbf{T} , de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{a}, \quad \text{en componentes: } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T})_i = a_p T_{pi}. \quad (41)$$

Ejemplos.— Citaremos algunos ejemplos sencillos de tensores, desarrollados por simplicidad en dimensión 2:

1. *Proyección sobre una recta o plano dado.* Sea la proyección sobre el eje Ox_1 (definido por el vector \mathbf{e}_1 por el origen de coordenadas) Es fácil verificar que la aplicación de proyección cumple los requisitos de linealidad que definen a los tensores. Podemos obtener las componentes

Figura 9: Tensor rotación de ángulo θ

aplicando la regla al efecto (25):

$$P_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1; P_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_2) = 0;$$

$$P_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1) = 0; P_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_2) = 0.$$

↓

$$[\mathbf{P}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Rotación de ángulo θ* . Es fácil comprobar también la linealidad de esta aplicación, por lo que constituye un tensor que denominamos \mathbf{R} (figura 9). Las componentes se hallan de la misma forma que antes:

$$R_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \text{sen } \theta \mathbf{e}_2) = \cos \theta;$$

$$R_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \cdot (-\text{sen } \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) = -\text{sen } \theta;$$

$$R_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1) = \text{sen } \theta; R_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2) = \cos \theta.$$

↓

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.6. Cambio de coordenadas de un tensor

Veamos ahora cómo cambian las componentes de un tensor frente a un cambio de base, como el definido en (12). Como ya se ha dicho, nos limitaremos aquí a considerar bases ortonormales⁵. En primer lugar, observamos que el cambio definido es equivalente a la actuación de un tensor \mathbf{A} que transforma los vectores de la antigua base en los de la nueva:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (42)$$

⁵Esta restricción da lugar a los denominados *tensores cartesianos*.

En efecto, desarrollando las componentes de los nuevos vectores \mathbf{e}'_i en la base \mathbf{e}_i ,

$$\mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}_p = (\mathbf{e}_p \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i)) \mathbf{e}_p = A_{pi} \mathbf{e}_p, \quad (43)$$

como queríamos demostrar, ya que las componentes de \mathbf{A} coinciden con las antes definidas en (12).

Asimismo, puede obtenerse una expresión directa del tensor de cambio mediante:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}'_p \otimes \mathbf{e}_p \quad (\text{sumatorio implícito en } p). \quad (44)$$

El tensor \mathbf{A} que define un cambio entre bases ortonormales, teniendo en cuenta (19), es un tensor ortogonal:

$$[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}] = [\mathbf{1}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (45)$$

El tensor \mathbf{A} asociado a un cambio de bases ortonormales es por tanto ortogonal. Si además de un triedro a derechas produce otro triedro igualmente a derechas, se denomina *ortogonal propio* o *rotación*. En caso contrario produciría una rotación seguida de una reflexión respecto de un plano del triedro. Más abajo (apartado 1.10) veremos que una condición equivalente para el tensor ortogonal sea propio es que su determinante valga +1.

Sea un cambio de base definido por las expresiones tensoriales (42) o de forma equivalente, por las expresiones algebraicas (43). Un tensor \mathbf{T} define una aplicación lineal en \mathcal{V} ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad (46)$$

que expresada en unas u otras coordenadas resulta en las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\}, \quad \{\mathbf{v}\}' = [\mathbf{T}']\{\mathbf{u}\}'. \quad (47)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de cambio de coordenadas para los vectores, (17) y (18):

$$\{\mathbf{v}\}' = [\mathbf{A}]^T\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\}'; \quad (48)$$

por lo que

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad T'_{ij} = A_{pi}A_{qj}T_{pq}. \quad (49)$$

1.7. Coeficientes de permutación

Se trata de coeficientes con tres índices, que se pueden definir a partir de los vectores de una base ortonormal a derechas ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) mediante la expresión general siguiente:

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (50)$$

Desarrollando la expresión, comprobamos que su valor es $+1$, -1 ó 0 según el caso:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es par:} \\ & (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ó } (3, 1, 2); \\ -1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es impar:} \\ & (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ ó } (3, 2, 1); \\ 0 & \text{si en } (i, j, k) \text{ algún índice está repetido.} \end{cases} \quad (51)$$

Se comprueba fácilmente la propiedad de hemisimetría para los coeficientes,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}; \quad \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}. \quad (52)$$

A partir de (50) se deduce inmediatamente que $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijp} \mathbf{e}_p$, por lo que el producto vectorial de dos vectores cualesquiera se podrá escribir usando los coeficientes de permutación como

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \epsilon_{pqr} u_p v_q \mathbf{e}_r. \quad (53)$$

Análogamente, el producto mixto de tres vectores vale

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{pqr} a_p b_q c_r. \quad (54)$$

Los coeficientes hemisimétricos ϵ_{ijk} corresponden a las coordenadas de un *tensor de orden tres*, aunque no entraremos en más detalles sobre este aspecto.

Otras propiedades interesantes de estos coeficientes, que enunciamos sin demostración, son las siguientes:

1. $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) + \delta_{im}(\delta_{jn} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kn}) + \delta_{in}(\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$,
2. $\epsilon_{ijp} \epsilon_{lmp} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$,
3. $\epsilon_{ipq} \epsilon_{lpq} = 2\delta_{il}$,
4. $\epsilon_{pqr} \epsilon_{pqr} = 2\delta_{pp} = 6$,
5. Para cualquier vector $\mathbf{a} = a_p \mathbf{e}_p$, $\epsilon_{ipq} a_p a_q = 0$.

1.8. Formas bilineal y cuadrática asociadas a un tensor

Un tensor de orden 2 cualquiera \mathbf{T} equivale a una forma bilineal, $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \in \mathbb{R}. \quad (55)$$

El calificativo de bilineal indica que es lineal en cada uno de sus dos argumentos. Asociada a esta forma bilineal hay una forma cuadrática, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u})$. Decimos que el tensor \mathbf{T} es *definido positivo* si la forma cuadrática asociada lo es, es decir,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \quad (56)$$

Análogamente, cabría definir los conceptos de tensor *definido negativo*, *semi-definido negativo*, *semidefinido positivo* e *indefinido*.

1.9. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico

La forma bilineal asociada a un tensor hemisimétrico es igualmente *hemisimétrica*. En efecto, aplicando la definición de tensor traspuesto (34) a un tensor \mathbf{W} hemisimétrico, que verifica $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (57)$$

Particularizando esta propiedad para los vectores de la base ($\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$), deducimos que la matriz de coordenadas es también hemisimétrica:

$$W_{ij} = -W_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (58)$$

Una propiedad importante de todo tensor hemisimétrico es que existe siempre un *vector axial* asociado al mismo, que lo hace equivalente a un producto vectorial:

$$\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2, \quad \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (59)$$

Desarrollando las componentes de esta expresión,

$$W_{qp} x_p \mathbf{e}_q = \epsilon_{rpq} w_r x_p \mathbf{e}_q, \quad (60)$$

e igualando éstas,

$$\epsilon_{rpq} w_r x_p = W_{qp} x_p, \quad (61)$$

por lo que

$$W_{ij} = w_p \epsilon_{pji}. \quad (62)$$

Asimismo, se puede invertir esta relación para obtener

$$w_i = \frac{1}{2} \epsilon_{piq} W_{pq}. \quad (63)$$

(*Ejercicio:* demostrar, multiplicando (62) por ϵ_{kij} y aplicando (52).) El tensor hemisimétrico asociado a un vector \mathbf{w} lo denominaremos también $\widehat{\mathbf{w}}$, ó $\mathbf{w} \wedge$. La equivalencia es por tanto

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} \wedge = \widehat{\mathbf{w}} \quad (64)$$

$$\Updownarrow$$

$$\{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = [\widehat{\mathbf{w}}] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

1.10. Determinante de un tensor

El *determinante* de un tensor es un escalar cuyo valor coincide con el determinante de la matriz de componentes asociada en una base dada.

$$\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T}]. \quad (66)$$

En función de los coeficientes de permutación puede expresarse como

$$\det \mathbf{T} = \epsilon_{pqr} T_{p1} T_{q2} T_{r3} = \epsilon_{pqr} T_{1p} T_{2q} T_{3r}. \quad (67)$$

Se trata igualmente de una operación tensorial intrínseca, por lo que el resultado es el mismo independientemente de la base empleada para calcular las coordenadas. Es por tanto otro *invariante* del tensor.

El determinante tiene las propiedades siguientes.

1. Un tensor cuyo determinante es no nulo posee siempre inverso:

$$\det \mathbf{T} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{T}^{-1} \mid \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1}. \quad (68)$$

2. El determinante de un producto de tensores es el producto de los determinantes,

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (69)$$

3. El determinante del tensor identidad vale 1, y el del inverso de un tensor es el inverso del determinante,

$$\det \mathbf{1} = 1, \quad \det \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}}. \quad (70)$$

4. El determinante del traspuesto de un tensor es igual al determinante del tensor original,

$$\det(\mathbf{T}^T) = \det(\mathbf{T}) \quad (71)$$

5. Otra forma equivalente a (67) de expresar el determinante es

$$\det \mathbf{T} = \frac{1}{6} \epsilon_{pqr} \epsilon_{stu} T_{ps} T_{qt} T_{ru}. \quad (72)$$

(Ejercicio: demostrar, a partir del desarrollo de las sumas en los índices s, t, u y la definición de ϵ_{stu} .)

6. Para vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ cualesquiera se verifica

$$[\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{c}] = \det \mathbf{T} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \quad (73)$$

7. Se verifica

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{T}^* \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (74)$$

siendo $\mathbf{T}^* = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-T}$.

1.11. Autovalores y descomposición espectral

Dado un tensor \mathbf{S} pueden existir ciertas direcciones privilegiadas, definidas por el correspondiente vector unitario \mathbf{u} , en las que la transformada del vector sea paralela al mismo:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (75)$$

en cuyo caso decimos que \mathbf{u} es un vector propio o autovector de \mathbf{S} y λ el valor propio o autovalor correspondiente. A las direcciones definidas por los vectores propios se las denomina también direcciones principales del tensor \mathbf{S} . Es inmediato comprobar que si \mathbf{u} es vector propio, también lo serán todos los paralelos a él $\alpha \mathbf{u}$.

Es fácil demostrar que si un tensor es definido positivo sus autovalores son necesariamente estrictamente positivos, bastando para ello sustituir (75) en (56).

Si un determinado vector \mathbf{e}_i de una base (ortonormal) es principal de inercia para un determinado tensor ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i$), las componentes de \mathbf{T} cumplen $T_{ji} = \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i) = \lambda \delta_{ji}$. Es decir, en la matriz de coordenadas la única componente no nula en la columna correspondiente (i) es la de la diagonal principal, siendo su valor precisamente λ . Por ejemplo, para el caso concreto de $i = 1$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Descomposición espectral de un tensor simétrico.— Si un tensor \mathbf{S} es simétrico, tiene tres autovalores reales, propiedad que enunciamos sin demostrar. Los autovectores correspondientes a dos autovalores distintos son mutuamente ortogonales. En efecto, sean dos parejas de autovectores/autovalores (\mathbf{u}, λ) , (\mathbf{v}, μ) , con $\lambda \neq \mu$. Aplicando la propiedad de simetría de \mathbf{S} (ver apartado 1.5):

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) = \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{array} \right\}, \text{ y restando ambas: } 0 = (\lambda - \mu) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

En consecuencia, para todo tensor simétrico puede escogerse una base ortonormal en que todas las direcciones sean principales, denominada *base principal* o *triedro principal*, $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$.

Para un tensor simétrico, la matriz de componentes en el triedro principal será por tanto

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente, \mathbf{S} puede expresarse mediante el *desarrollo espectral* siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \sum_{r=1}^3 \lambda_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r \\ &= \lambda_1 \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3.\end{aligned}\tag{76}$$

Es fácil comprobar que el cuadrado de un tensor simétrico tiene los mismos vectores propios, mientras que los valores propios son los cuadrados. En efecto, para \mathbf{p} principal,

$$\mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{S} \cdot (\lambda \mathbf{p}) = \lambda^2 \mathbf{p},$$

por lo que su descomposición espectral será

$$\mathbf{S}^2 = \sum_{p=1}^3 \lambda_r^2 \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r,$$

y prosiguiendo con este razonamiento, la potencia n -ésima vale

$$\mathbf{S}^n = \sum_{p=1}^3 \lambda_r^n \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r.$$

Por otra parte, podemos expresar la *raíz cuadrada* de un tensor simétrico semidefinido positivo como

$$\sqrt{\mathbf{S}} = \sum_{p=1}^3 \sqrt{\lambda_r} \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r.$$

De forma análoga se pueden expresar la *exponencial* de un tensor simétrico,

$$\exp(\mathbf{S}) = e^{\mathbf{S}} = \sum_{p=1}^3 e^{\lambda_r} \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r,$$

o el *logaritmo* de un tensor simétrico definido positivo,

$$\ln(\mathbf{S}) = \sum_{p=1}^3 \ln(\lambda_r) \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r.$$

Cálculo de los autovalores.— El cálculo de los autovalores de un tensor \mathbf{S} se realiza considerando que el determinante de la denominada *matriz característica* debe ser nulo,

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) = 0.$$

La expresión anterior constituye un polinomio de orden 3, denominado *polinomio característico*, cuyo desarrollo es

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{1}) = P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1(\mathbf{S})\lambda^2 - I_2(\mathbf{S})\lambda + I_3(\mathbf{S}), \quad (77)$$

siendo los tres coeficientes indicados de dicho polinomio los denominados invariantes escalares principales de \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{S}) &= \text{tr}(\mathbf{S}) = S_{pp}, \\ I_2(\mathbf{S}) &= \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{S}))^2 - \text{tr}(\mathbf{S}^2)] = \frac{1}{2} [(S_{pp})^2 - S_{pq}S_{qp}], \\ I_3(\mathbf{S}) &= \det(\mathbf{S}) = \epsilon_{pqr}S_{1p}S_{2q}S_{3r}. \end{aligned} \quad (78)$$

Todo tensor tiene al menos un autovalor real, propiedad heredada del polinomio característico (cúbico) que tiene al menos una raíz real por el teorema fundamental del álgebra⁶. Sólo en ciertos casos, como son los tensores simétricos, puede afirmarse que existen tres autovalores / autovectores reales.

Como los invariantes no dependen del sistema de coordenadas, en caso que existan tres autovalores reales podremos expresar los invariantes también en el triedro principal:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{S}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2(\mathbf{S}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ I_3(\mathbf{S}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (79)$$

Invariantes J .— Los invariantes $\mathcal{I} = (I_1, I_2, I_3)$ no son los únicos que pueden obtenerse de un tensor, aunque cualquier otro invariante puede ponerse en función de éstos. En particular, para el estudio de las tensiones a veces se emplean los invariantes $\mathcal{J} = (J_1, J_2, J_3)$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{S}) &= \text{tr}(\mathbf{S}) = S_{pp} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ J_2(\mathbf{S}) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2) = \frac{1}{2} S_{pq}S_{qp} = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2), \\ J_3(\mathbf{S}) &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}^3) = \frac{1}{3} S_{pq}S_{qr}S_{rp} = \frac{1}{3} (\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3). \end{aligned}$$

Como puede comprobarse, la definición general de estos invariantes, generalizable a espacios de dimensión mayor, es $J_n(\mathbf{S}) = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{S}^n)$.

La equivalencia con los invariantes \mathcal{I} es:

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1, \\ J_2 &= \frac{1}{2} I_1^2 - I_2, \\ J_3 &= \frac{1}{3} I_1^3 - I_1 I_2 + I_3. \end{aligned}$$

(Ejercicio: demostrar.)

⁶Habr  un autovalor real o bien tres autovalores reales, ya que las soluciones complejas vienen en parejas conjugadas.

Descomposición espectral de un tensor hemisimétrico.— En el apartado 1.9 se vio que un tensor hemisimétrico tiene únicamente tres componentes no nulos y puede caracterizarse por un vector axial asociado.

Sea un tensor hemisimétrico \mathbf{W} . La propiedad de hemisimetría (57) aplicada para $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{a}$ obliga a

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{a}) = 0. \quad (80)$$

Por otra parte, sabemos que \mathbf{W} , como todo tensor, tiene al menos un autovalor real. Sea λ un autovalor de \mathbf{W} , y el vector propio asociado (unitario) \mathbf{p} . De la ecuación (80) se deduce que $\lambda = 0$, por lo que \mathbf{W} tendrá un único autovalor real nulo, o bien los tres autovalores nulos (en cuyo caso se reduciría al tensor nulo que carece de interés). Sean \mathbf{q} y \mathbf{r} dos vectores unitarios que forman junto con \mathbf{p} un triedro ortonormal a derechas:

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}] = 1.$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{p} es un vector propio y las ecuaciones (57) aplicadas a (\mathbf{q}, \mathbf{r}) , se deduce que la expresión del tensor debe ser

$$\mathbf{W} = \omega(\mathbf{r} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}), \quad (81)$$

donde $\omega = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{q})$ es un escalar no nulo. La matriz de componentes en la base $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ es por tanto

$$[\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar (se deja como ejercicio) que el vector axial es precisamente $\mathbf{w} = \omega \mathbf{p}$, de forma que para cualquier vector \mathbf{a}

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \omega \mathbf{p} \wedge \mathbf{a}.$$

También es inmediato observar que los invariantes son

$$I_1(\mathbf{W}) = 0, \quad I_2(\mathbf{W}) = \omega^2, \quad I_3(\mathbf{W}) = 0,$$

por lo que la ecuación característica resulta $\lambda(\lambda^2 + \omega^2) = 0$ que sólo tiene una raíz real ($\lambda = 0$).

Descomposición espectral de un tensor ortogonal.— Consideramos un tensor \mathbf{Q} ortogonal, que verifica por tanto $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}$. Tomando determinantes en esta expresión,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) &= (\det \mathbf{Q}^T) \cdot (\det \mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det(\mathbf{1}) = 1 \\ &\Rightarrow \det \mathbf{Q} = \pm 1. \end{aligned} \quad (82)$$

El caso en que sea $\det \mathbf{Q} = +1$ se denomina tensor *ortogonal propio*, correspondiendo a una *rotación* rígida (ver apartado 1.5). Este tensor aplicado a un triedro ortonormal a derechas produce una nueva base rotada que es también ortonormal a derechas.

Una propiedad esencial de los tensores ortogonales es que conservan el producto escalar. En efecto, sean dos vectores (\mathbf{a}, \mathbf{b}) cualesquiera:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ (Q_{pq} a_q)(Q_{pr} b_r) &= a_q (Q_{pq} Q_{pr}) b_r = a_q \delta_{qr} b_r = a_q b_q. \end{aligned} \quad (83)$$

De la condición de ortogonalidad (36) se deduce la relación

$$\mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) = -(\mathbf{Q} - \mathbf{1})^T;$$

tomando determinantes y considerando que el determinante no varía al trasponer un tensor (71) y que al cambiar de signo el tensor cambia de signo el determinante, se obtiene que $\det(\mathbf{Q} - \mathbf{1}) = 0$, es decir \mathbf{Q} tiene siempre un autovalor unidad. En consecuencia existe un vector unitario \mathbf{p} para el que

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{p}. \quad (84)$$

Sean \mathbf{q} y \mathbf{r} vectores unitarios que forman junto con \mathbf{p} un triedro ortonormal a derechas. De (84) y de las relaciones de ortogonalidad sabemos que

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{p} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}) = 1.$$

Por otra parte de (83) sabemos que

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad |\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}| = |\mathbf{r}| = 1.$$

Por consiguiente, las parejas de vectores (\mathbf{q}, \mathbf{r}) y $(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})$ son ortogonales entre sí y con \mathbf{p} . La configuración de estos vectores admite una interpretación geométrica, mediante una rotación de un determinado ángulo θ en el plano perpendicular a \mathbf{p} , como se indica en la figura 10. El resultado anterior permite interpretar un tensor

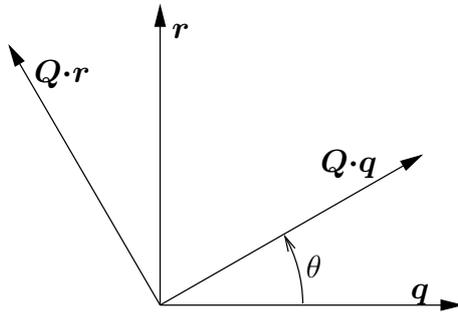


Figura 10: Interpretación geométrica de la aplicación de un tensor ortogonal a dos vectores unitarios \mathbf{p}, \mathbf{q} ortogonales al vector del eje \mathbf{p} .

ortogonal propio \mathbf{Q} como una rotación de ángulo θ alrededor del eje \mathbf{p} .

La descomposición de \mathbf{Q} referida a la base $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ será por tanto

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cos \theta - (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{q}) \sin \theta. \quad (85)$$

La matriz de componentes correspondiente es

$$[\mathbf{Q}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Por último, observamos que los invariantes de \mathbf{Q} son

$$I_1(\mathbf{Q}) = I_2(\mathbf{Q}) = 1 + 2 \cos \theta, \quad I_3(\mathbf{Q}) = 1,$$

y desarrollando la ecuación característica se comprueba que sólo hay un autovalor real ($\lambda = 1$).

1.12. Teorema de Cayley-Hamilton

Este teorema afirma que *todo tensor de 2.º orden que posea tres autovalores reales satisface su propia ecuación característica*, es decir,

$$\mathbf{S}^3 - I_1(\mathbf{S})\mathbf{S}^2 + I_2(\mathbf{S})\mathbf{S} - I_3(\mathbf{S})\mathbf{1} = \mathbf{O}. \quad (86)$$

Para demostrarlo basta tener en cuenta que, al tener tres autovalores reales, podremos emplear la descomposición espectral del tensor y de sus potencias:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \sum_{r=1}^3 \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r, & \mathbf{S} &= \sum_{r=1}^3 \lambda_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r, \\ \mathbf{S}^2 &= \sum_{r=1}^3 \lambda_r^2 \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r, & \mathbf{S}^3 &= \sum_{r=1}^3 \lambda_r^3 \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (86) resulta

$$\sum_{r=1}^3 \underbrace{(\lambda_r^3 - I_1 \lambda_r^2 + I_2 \lambda_r - I_3)}_{=0} \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r = \mathbf{O}. \quad \square$$

Algunas aplicaciones del teorema de Cayley-Hamilton.—

1. *Cálculo del inverso de un tensor.* Sea un tensor \mathbf{A} con tres autovalores, e invariantes (I_1, I_2, I_3) . Aplicando (86) y multiplicando por \mathbf{A}^{-1} ,

$$\mathbf{A}^2 - I_1 \mathbf{A} + I_2 \mathbf{1} - I_3 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O},$$

de donde despejamos:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3} (\mathbf{A}^2 - I_1 \mathbf{A} + I_2 \mathbf{1}).$$

2. *Raíz cuadrada de un tensor definido positivo.* Sea un tensor definido positivo \mathbf{C} con tres autovalores reales, que al ser positivos podemos denominar sin pérdida de generalidad $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$. Llamemos \mathbf{U} al tensor que deseamos calcular, que cumplirá por tanto $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$. Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton (86) a \mathbf{U} se obtiene

$$\mathbf{U}^3 = I_1\mathbf{U}^2 - I_2\mathbf{U} + I_3\mathbf{1}. \quad (87)$$

Multiplicando esta ecuación por \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U}^4 = I_1\mathbf{U}^3 + I_2\mathbf{U}^2 - I_3\mathbf{U},$$

y eliminando \mathbf{U}^3 a partir de (87) y despejando,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{I_3 - I_1I_2} [\mathbf{C}^2 - (I_1^2 - I_2)\mathbf{C} - I_1I_3\mathbf{1}].$$

Para evaluar esta expresión se necesitarán los invariantes principales de \mathbf{U} , que pueden calcularse teniendo en cuenta que los autovalores de \mathbf{U} son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, por lo que $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; $I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$; $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

1.13. Descomposición simétrica - hemisimétrica

Todo tensor \mathbf{T} puede descomponerse de forma única como suma de un tensor simétrico $\text{sim}(\mathbf{T})$ y otro hemisimétrico $\text{hem}(\mathbf{T})$,

$$\mathbf{T} = \text{sim}(\mathbf{T}) + \text{hem}(\mathbf{T}),$$

siendo

$$\begin{aligned} \text{sim}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), & \text{hem}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T), \\ \text{sim}(\mathbf{T})_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), & \text{hem}(\mathbf{T})_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \end{aligned}$$

como puede comprobarse fácilmente. En ocasiones emplearemos también la notación siguiente para referirnos a las componentes simétricas o hemisimétricas:

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Ejercicio: demostrar las siguientes igualdades:

1. Si \mathbf{S} es simétrico y \mathbf{H} hemisimétrico, $\mathbf{S}:\mathbf{H} = \mathbf{0}$;
2. Si \mathbf{S} es simétrico y \mathbf{T} cualquiera, $\mathbf{S}:\mathbf{T} = \mathbf{S}:\text{sim}(\mathbf{T}) = S_{pq}T_{(pq)}$;
3. Para dos tensores \mathbf{U} y \mathbf{T} cualesquiera, $\mathbf{U}:\mathbf{T} = \text{sim}(\mathbf{U}):\text{sim}(\mathbf{T}) + \text{hem}(\mathbf{U}):\text{hem}(\mathbf{T}) = U_{(pq)}T_{(pq)} + U_{[pq]}T_{[pq]}$.

La acción de un tensor simétrico sobre un vector, empleando la descomposición espectral del tensor (77), puede interpretarse como una *distorsión ortótropa* del vector, en la cual cada coordenada según las direcciones principales se ve multiplicada por el autovalor (*coeficiente de alargamiento*) correspondiente:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \left(\sum_r \lambda_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r \right) \cdot (x_q \mathbf{p}_q) = \sum_r \lambda_r x_r \mathbf{p}_r. \quad (88)$$

Si $\lambda_i > 1$ se produce un estiramiento según la coordenada correspondiente, y cuando $\lambda_i < 1$ se produce un encogimiento. Si se admite que \mathbf{S} es definido positivo, $\lambda_i > 0$ y ninguna coordenada de \mathbf{x} puede llegar a colapsarse (anularse).

1.14. Descomposición Polar

El teorema de la descomposición polar afirma que, para todo tensor \mathbf{F} con $\det(\mathbf{F}) > 0$, se pueden hacer descomposiciones multiplicativas únicas por la izquierda y por la derecha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad (89)$$

siendo $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$ y $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$ tensores simétricos definidos positivos, y \mathbf{R} una rotación (ortogonal con determinante +1).

Para demostrar el teorema, consideramos de entrada que tanto $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ son simétricos y definidos positivos (de fácil demostración). Por tanto podrá realizarse la descomposición espectral y obtener las raíces cuadradas $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$ y $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$. Definimos entonces $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$, comprobándose que es ortogonal:

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Por otra parte,

$$\det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{F}) \det(\mathbf{U}^{-1}) > 0,$$

por lo que será entonces $\det(\mathbf{R}) = +1$ correspondiendo a una rotación. \square

La interpretación de esta descomposición permite comprender mejor la acción de un tensor sobre un vector determinado. La descomposición por la izquierda (89)₁ consiste en efectuar primero una distorsión del mismo (\mathbf{U}) seguida de una rotación (\mathbf{R}):

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}).$$

La rotación al tratarse de un tensor ortogonal preserva la magnitud de \mathbf{x} ,

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x},$$

mientras que por lo general el tensor simétrico \mathbf{U} alarga o acorta \mathbf{x} según cada dirección principal, tal y como se vio en (88).

La descomposición polar por la derecha equivale a las mismas operaciones, pero en orden inverso: primero la rotación \mathbf{R} y después la distorsión producida por \mathbf{V} .

Puede comprobarse fácilmente que los autovalores (coeficientes de alargamiento) de \mathbf{U} y de \mathbf{V} son iguales, correspondiendo las direcciones principales de \mathbf{V} a las de \mathbf{U} rotadas mediante \mathbf{R} :

$$\mathbf{U} = \sum_r \lambda_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r; \quad \mathbf{V} = \sum_r \lambda_r \mathbf{p}'_r \otimes \mathbf{p}'_r, \quad \text{con } \mathbf{p}'_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_i.$$

1.15. Tensores de orden cuatro

Para nuestros propósitos podemos definir un tensor de orden cuatro \mathcal{C} como una aplicación lineal que a un tensor de orden dos hace corresponder otro tensor de orden dos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{V}^2 &\rightarrow \mathcal{V}^2; \\ \mathcal{C}(\lambda \mathbf{S} + \mu \mathbf{T}) &= \lambda \mathcal{C}(\mathbf{S}) + \mu \mathcal{C}(\mathbf{T}) \end{aligned}$$

Emplearemos la notación

$$\mathcal{C}(\mathbf{S}) = \mathcal{C}:\mathbf{S}.$$

El tensor nulo es \mathcal{O} , siendo $\mathcal{O}:\mathbf{S} = \mathbf{O}$ para cualquier tensor de segundo orden \mathbf{S} , y el tensor identidad \mathcal{I} , con $\mathcal{I}:\mathbf{S} = \mathbf{S}$.

Como ejemplo podemos considerar el tensor de cuarto orden que para cualquier tensor de segundo orden \mathbf{S} hace corresponder $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$. Denominándolo como \mathcal{C}_A ,

$$\mathcal{C}_A:\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}.$$

Por su definición se comprueba inmediatamente la linealidad, lo que lo caracteriza como tensor.

Los tensores de cuarto orden forman un espacio vectorial \mathcal{V}^4 , con la suma definida como $(\mathcal{C} + \mathcal{D})(\mathbf{S}) = \mathcal{C}(\mathbf{S}) + \mathcal{D}(\mathbf{S})$. Las componentes de un tensor de cuarto orden son un conjunto con cuatro índices, y se pueden obtener en una base (\mathbf{e}_i) mediante:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathcal{C} : \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

Con esta notación, la aplicación a un tensor de segundo orden resulta en componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathcal{C}:\mathbf{S} = S_{pq} \mathcal{C}:\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q; \\ T_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathbf{T} \\ &= S_{pq} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathcal{C} : \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \\ &= C_{ijpq} S_{pq}. \end{aligned}$$

Para el ejemplo anterior, puede comprobarse como ejercicio que las componentes son

$$(\mathcal{C}_A)_{ijkl} = A_{ik}\delta_{jl},$$

pudiéndose escribir también como

$$\mathcal{C}_A = A_{pr}\delta_{qs} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s.$$

Algunos tensores importantes de 4.º orden.—

1. El *tensor identidad* tiene por componentes

$$\mathcal{I}_{ijkl} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathcal{I} : \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

2. El *tensor de trasposición*, definido mediante $\mathcal{J}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T$, tiene por componentes

$$\mathcal{J}_{ijkl} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathcal{J} : \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k = \delta_{il}\delta_{jk}$$

3. El *tensor de proyección desviadora*, que se define mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ \mathcal{D}_{ijkl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \end{aligned}$$

y opera de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathcal{D} : \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{1}, \\ T'_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{3}T_{pp}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

2. Cálculo vectorial y tensorial

En la mecánica de medios continuos el interés primordial no reside únicamente en el estudio de las relaciones algebraicas entre escalares, vectores y tensores, sino también en el estudio de los campos que definen su distribución. Estos campos son aplicaciones que a un punto $x \in D$, siendo $D \subset \mathbb{E}^3$ un dominio (subconjunto abierto y conexo del espacio geométrico ordinario), le hacen corresponder respectivamente un escalar ($D \rightarrow \mathbb{R}$), un vector ($D \rightarrow \mathcal{V}$) o un tensor de orden 2 ($D \rightarrow \mathcal{V}^2$). Por otra parte, elegido un origen $o \in \mathbb{E}^3$, puede identificarse cada punto con un vector, $\mathbf{x} = \vec{o\mathbf{x}} \equiv x$, por lo que en adelante no distinguiremos entre ambos. Los tipos de campos que estudiaremos son por tanto:

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{E}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}), & \text{campo escalar;} \\ \mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \supset D \rightarrow \mathcal{V}, & \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \text{campo vectorial;} \\ \mathbf{S} : \mathbb{E}^3 \supset D \rightarrow \mathcal{V}^2, & \mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}(\mathbf{x}), & \text{campo tensorial.} \end{cases}$$

También son de importancia central en la mecánica de medios continuos las aplicaciones o mapas puntuales, que hacen corresponder a un punto $x \in \mathbb{E}^3$ otro punto $\chi(x) \in \mathbb{E}^3$, ya que estas aplicaciones definen directamente el movimiento o deformación del medio continuo. Estas aplicaciones pueden tratarse como campos vectoriales por la equivalencia existente entre puntos y vectores una vez que se haya elegido un origen o .

En todos los casos supondremos que las funciones son suaves, es decir poseen las condiciones de continuidad y derivabilidad necesarias.

2.1. Derivada de un campo escalar

Sea un campo escalar que denominaremos $\phi(\mathbf{x})$, que a cada punto \mathbf{x} de un determinado dominio D le hace corresponder un escalar $\phi \in \mathbb{R}$. Eligiendo un sistema de referencia ortonormal en \mathbb{E}^3 , este campo puede interpretarse como una función real de tres variables, las coordenadas de \mathbf{x} :

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3).$$

La *derivada o gradiente* del campo escalar en el punto \mathbf{x} es una aplicación $\nabla\phi(\mathbf{x})$ tal que su valor para una dirección cualquiera, definida por el vector \mathbf{u} , es el escalar siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{x})}{h} = \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \quad (90)$$

En ocasiones se denomina al escalar $\nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$ *derivada direccional* del campo ϕ en la dirección \mathbf{u} (evaluada en el punto \mathbf{x}).

La derivada $\nabla\phi(\mathbf{x})$ constituye un vector, para el que se emplean en ocasiones también las siguientes notaciones alternativas:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

En las expresiones anteriores se ha mantenido la indicación expresa del punto en que se evalúa la derivada (\mathbf{x}), para enfatizar que a su vez constituye un campo que ofrece un valor distinto en cada punto. En ocasiones por simplificar la escritura se prescindirá de esta indicación expresa, escribiéndose de forma abreviada como $\nabla\phi$, $\mathbf{grad} \phi$ ó $\partial\phi/\partial\mathbf{x}$, sin que esta simplificación de la escritura deba dar lugar a confusión.

La notación en componentes la escribiremos empleando los símbolos de derivadas parciales, o de forma más sintética mediante las comas delante de los subíndices respecto de los que se deriva:

$$\begin{aligned} \{\nabla\phi\} &= \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right\} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{pmatrix} \\ &= \{\phi_{,i}\} = \begin{pmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con esta notación la derivada direccional queda

$$\begin{aligned}\nabla\phi\cdot\mathbf{u} &= \frac{\partial\phi}{\partial x_p}u_p = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}u_3 \\ &= \phi_{,p}u_p = \phi_{,1}u_1 + \phi_{,2}u_2 + \phi_{,3}u_3.\end{aligned}$$

Por último, a efectos de recordatorio para la notación, puede pensarse en el símbolo ∇ como un vector cuyas componentes sean

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{Bmatrix},$$

de forma que en la notación funciona como un operador,

$$\nabla\phi = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{Bmatrix} \phi = \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{Bmatrix}.$$

2.2. Derivada de un campo vectorial

Sea un campo vectorial que denominaremos $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, que a cada punto \mathbf{x} de un determinado dominio D le hace corresponder un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Eligiendo un sistema de referencia ortonormal en \mathbb{E}^3 , el campo puede interpretarse como una función vectorial de tres variables; la función a su vez quedará caracterizada por las tres coordenadas del vector:

$$v_1(\mathbf{x}) = v_1(x_1, x_2, x_3), \quad v_2(\mathbf{x}) = v_2(x_1, x_2, x_3), \quad v_3(\mathbf{x}) = v_3(x_1, x_2, x_3).$$

La *derivada o gradiente* del campo vectorial en un punto \mathbf{x} es una aplicación $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que su valor para una dirección cualquiera, definida por el vector \mathbf{u} , es el vector

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{h} = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}. \quad (91)$$

En ocasiones se denomina al vector $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}$ *derivada direccional* del campo \mathbf{v} en la dirección \mathbf{u} (evaluada en el punto \mathbf{x}).

La derivada $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ constituye un tensor de orden 2, para el que se emplean en ocasiones también las siguientes notaciones alternativas:

$$\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

Al igual que en el apartado anterior, se omitirá la indicación expresa del punto en el que se evalúa la derivada (\mathbf{x}), sin que deba inducir a error.

La notación en componentes de la derivada podrá hacerse de varias formas:

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j},$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = [\nabla \otimes \mathbf{v}]^T = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} (\partial_1 \quad \partial_2 \quad \partial_3) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{pmatrix}.$$

La *derivada de un campo tensorial* de segundo orden \mathbf{S} puede definirse a partir de la derivada del campo vectorial $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$, para un vector \mathbf{a} cualquiera⁷. De esta forma se obtendría, aplicando (91), la derivada direccional $\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ (que constituye un vector), y la derivada $\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{a})$ (que constituye un tensor de orden 2). La derivada del campo tensorial $\nabla \mathbf{S}$ sería entonces un operador⁸ tal que para un vector \mathbf{a} arbitrario y cualquier dirección \mathbf{u} satisfaga

$$[(\nabla \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}] \cdot \mathbf{a} = [\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{a})] \cdot \mathbf{u}$$

En cuanto a notación, escribiremos de forma equivalente $\nabla \mathbf{S} = \partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{x}$, y en componentes

$$(\nabla \mathbf{S})_{ijk} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} = S_{ij,k}.$$

Por último consideramos una transformación puntual $\chi : \mathbb{E}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{E}^3$, que a un punto dado $\mathbf{x} \in D$ le hace corresponder otro punto $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}) \in \mathbb{E}^3$. Elegidos orígenes de coordenadas para ambos o, o' (no necesariamente el mismo), hay una equivalencia entre el punto de la imagen y un vector, por lo que podremos expresar de manera análoga a (91) la derivada de esta transformación:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\chi(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - \chi(\mathbf{x})}{h} = \nabla \chi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \quad (92)$$

Al término $\nabla \chi(\mathbf{x})$ se le denomina derivada o gradiente de la transformación en \mathbf{x} , y equivale a un tensor de orden 2.

2.3. Divergencia, rotacional y Laplaciano

La *divergencia de un campo vectorial* \mathbf{v} se define a partir de la derivada del campo, constituyendo un campo escalar:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}) = v_{p,p}. \quad (93)$$

Hacemos notar que el operador divergencia está asociado a la parte simétrica del gradiente $\nabla \mathbf{v}$, ya que $\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}^T)$.

⁷Aquí \mathbf{a} es un vector cualquiera pero fijo, es decir, no se trata de un campo vectorial

⁸En realidad este operador sería un tensor de orden 3, que a un vector \mathbf{u} hace corresponder un tensor de orden 2, $(\nabla \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}$

La *divergencia de un campo tensorial* se define a partir de la divergencia del campo vectorial $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}$, siendo \mathbf{a} un vector fijo pero arbitrario. De esta forma,

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}. \quad (94)$$

Puesto que $\nabla \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a})$ es un escalar, la divergencia del campo tensorial $\nabla \cdot \mathbf{S}$ es un vector, para el que emplearemos también la notación $\text{div } \mathbf{S}$. En componentes la expresión es

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})_i = (\text{div } \mathbf{S})_i = S_{ip,p}.$$

Podemos comprobar la consistencia de esta expresión con lo que se deriva de la definición (94):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}) &= \nabla \cdot (S_{qp} a_q \mathbf{e}_p) \\ &= (S_{qp} a_q)_{,p} = S_{qp,p} a_q. \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de gradientes y divergencias de campos compuestos (se dejan al lector como ejercicio las demostraciones) son:

1. $\nabla(\phi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \nabla \phi + \phi \nabla \mathbf{v}$,
2. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{v} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v}$,
3. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{S}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla \phi$.

Como se dijo antes, la divergencia está asociada a la parte simétrica del gradiente de un campo vectorial, $\nabla \mathbf{v}$. Introducimos ahora un operador diferencial asociado a la parte hemisimétrica del gradiente, que denominamos *rotacional*. Lo denotaremos por $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}$, definiéndolo como un campo vectorial que para cualquier vector \mathbf{a} verifica

$$(\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{a}. \quad (95)$$

Es decir, se trata del vector axial asociado al tensor hemisimétrico $(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)$. Por tanto, la expresión en componentes será, denominando \mathbf{w} al rotacional,

$$2w_i = \epsilon_{iqp} v_{[p,q]} = \epsilon_{iqp} (v_{p,q} - v_{q,p}),$$

y teniendo en cuenta $\epsilon_{iqp} = -\epsilon_{ipq}$,

$$w_i = \epsilon_{iqp} v_{p,q}$$

Como regla nemotécnica puede asociarse el rotacional con el producto vectorial de los vectores ∇ y \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} &= \epsilon_{rqp} v_{p,q} \mathbf{e}_r \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_{3,2} - v_{2,3}) \mathbf{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1}) \mathbf{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2}) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

El *Laplaciano de un campo escalar* ϕ es otro campo escalar definido como la divergencia del gradiente:

$$\Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \phi_{,pp}. \quad (96)$$

Por otra parte, la misma definición podemos aplicarla para el *Laplaciano de un campo vectorial*, sólo que en esta ocasión obtendremos un campo vectorial:

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}) = v_{p,qq} \mathbf{e}_p. \quad (97)$$

Como ejemplo de aplicación, puede comprobarse que si la divergencia y el rotacional de un campo vectorial son nulos también lo será el Laplaciano. En efecto, veamos en primer lugar que $\nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}^T) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$:

$$\nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}^T) = v_{p,qp} \mathbf{e}_q = v_{p,pq} \mathbf{e}_q = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v});$$

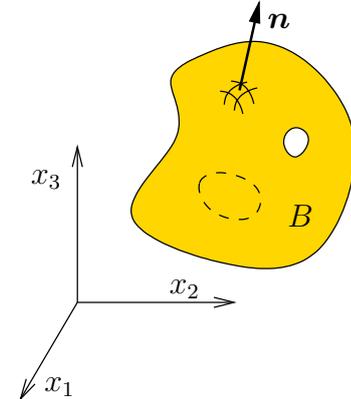
Por otra parte, al ser $\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$, será $\nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}^T$, y por tanto

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}^T) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad \square$$

2.4. Teorema de la divergencia

En primer lugar suponemos una región $B \subset \mathbb{E}^3$ a la que aplicaremos el teorema, que debe cumplir ciertas condiciones de *regularidad*: 1) puede estar compuesta por una o más partes acotadas, cada una con volumen no nulo; 2) el contorno ∂B es suave a tramos y consiste de un número finito de partes disjuntas; 3) cada parte del contorno ∂B es una superficie orientable, es decir posee dos caras claramente distintas.

Dada esta región B , el teorema (que no demostraremos) afirma que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA &= \int_B \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV, \\ \int_{\partial B} v_p n_p \, dA &= \int_B v_{p,p} \, dV. \end{aligned} \quad (98)$$


El primer término de la igualdad anterior se denomina *flujo* del campo vectorial \mathbf{v} a través de la superficie ∂B . El teorema de la divergencia permite transformar una integral de volumen en una integral de superficie, es decir en una región de una dimensión menos.

El teorema puede generalizarse fácilmente para un campo tensorial \mathbf{S} , sin más que aplicarlo para $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}$, siendo \mathbf{a} un vector cualquiera. El resultado es

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA &= \int_B \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV, \\ \int_{\partial B} S_{ip} n_p \, dA &= \int_B S_{ip,p} \, dV. \end{aligned} \quad (99)$$

En efecto, si \mathbf{a} es un vector dado,

$$\mathbf{a} \cdot \int_{\partial B} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\partial B} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{\partial B} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}) \, dA;$$

aplicando el teorema de la divergencia a $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}$ y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})$, resulta:

$$\mathbf{a} \cdot \int_{\partial B} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA = \mathbf{a} \cdot \int_B \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV,$$

por lo que al ser \mathbf{a} arbitrario queda demostrada la expresión (99). \square

2.5. Teorema de Stokes

Consideramos ahora una superficie no cerrada Ω , con borde Γ . Supondremos que la curva Γ no se corta a sí misma, es suave y acotada. Por su parte, Ω es suave a tramos, acotada y orientable.

El teorema de Stokes afirma que: dado un campo vectorial \mathbf{v} suave, definido en un dominio que contenga a Ω ,

$$\int_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds. \quad (100)$$

En la expresión anterior, \mathbf{t} es el sentido de avance según la curva Γ , y s es el arco recorrido. El sentido de \mathbf{n} es tal que si se avanza según la curva en el sentido de \mathbf{t} , con la parte superior según \mathbf{n} , la superficie queda a la izquierda.

En la ecuación del teorema de Stokes (100), la primera igualdad es el flujo del rotacional a través de Ω , y la segunda se denomina *circulación* del campo vectorial en Γ .

Interpretación geométrica del rotacional.— El teorema de Stokes permite una interpretación geométrica del rotacional que se describe a continuación. Consideramos un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$, y tomamos una superficie Ω_δ , consistente en un disco circular centrado en \mathbf{y} de radio pequeño δ , cuya normal unitaria lleve la dirección y sentido del rotacional $\nabla \wedge \mathbf{v}$. El flujo del rotacional por esta superficie puede aproximarse como

$$\int_{\Omega_\delta} \nabla \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dA = \text{area}(\Omega_\delta) [(\nabla \wedge \mathbf{v})(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + O(\delta)].$$

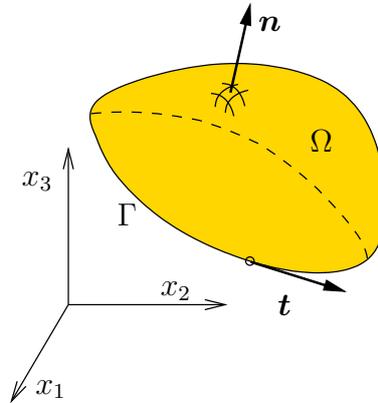


Figura 11: Superficie Ω y borde Γ en el teorema de Stokes.

Tomando el límite al tender δ a cero y aplicando el teorema de Stokes (100) resulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\Omega_\delta)} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = (\nabla \wedge \mathbf{v})(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = |\nabla \wedge \mathbf{v}(\mathbf{y})|.$$

Por tanto la circulación alrededor de este disco de radio infinitesimal, orien-

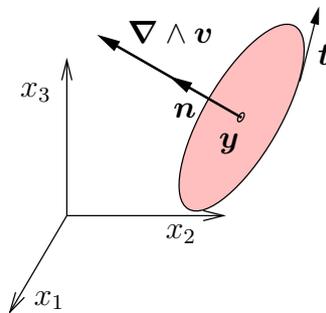


Figura 12: Interpretación del rotacional como la circulación en un disco

tado normalmente al rotacional y normalizada al dividir por el área del disco, es igual a la magnitud (norma) del rotacional. Si el campo \mathbf{v} correspondiera a las velocidades de un fluido, y pusiéramos un pequeño molinillo en el seno del mismo, el giro del mismo nos mediría la circulación del campo y por lo tanto el rotacional. Si el molinillo no gira para ninguna orientación del eje del mismo, el campo de velocidades (flujo del fluido) tiene rotacional nulo, se denomina por tanto *irrotacional*.

2.6. Funciones de tensores de orden dos

Consideraremos en este apartado funciones de valor escalar cuya variable sea un tensor de orden dos, $\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es decir que a un tensor cualquiera

$\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ le haga corresponder un escalar $\psi(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que en un sistema de coordenadas dadas el tensor queda identificado por sus nueve componentes A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), la función de variable tensorial puede interpretarse como una función de nueve variables $\psi(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33})$.

La derivada es una aproximación (lineal) a la variación del valor de la función $\psi(\mathbf{A})$ cuando se produce una variación pequeña del argumento, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, en el sentido de que la magnitud $|\mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{B}:\mathbf{B}}$ sea pequeña. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer esta variación de la forma $\mathbf{B} = h\mathbf{U}$, donde \mathbf{U} es un tensor arbitrario y h es un escalar.

Desarrollando $\psi(\mathbf{A} + h\mathbf{U})$ en serie de Taylor en función de las distintas componentes U_{ij} ,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) &= \psi(A_{11} + hU_{11}, A_{12} + hU_{12}, \dots, A_{33} + hU_{33}) \\ &= \psi(\mathbf{A}) + h \frac{\partial \psi}{\partial A_{11}} U_{11} + h \frac{\partial \psi}{\partial A_{12}} U_{12} \\ &\quad + \dots + h \frac{\partial \psi}{\partial A_{33}} U_{33} + O(h^2) \\ &= \psi(\mathbf{A}) + h D\psi \mathbf{A}:\mathbf{U} + O(h^2), \end{aligned}$$

donde

$$D\psi(\mathbf{A}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi}{\partial A_{pq}}(\mathbf{A}) \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q.$$

El resultado anterior justifica la siguiente definición para la derivada direccional en la dirección de \mathbf{U} :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) - \psi(\mathbf{A})}{h} = D\psi(\mathbf{A}):\mathbf{U}, \quad (101)$$

siendo $D\psi(\mathbf{A}) = \partial\psi/\partial\mathbf{A}(\mathbf{A})$ la derivada de $\psi(\mathbf{A})$ en el punto \mathbf{A} , que constituye un tensor de segundo orden.

ejemplo 1: Consideremos una función ψ de la forma

$$\psi(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}:\mathbf{A} = \frac{1}{2} A_{pq} A_{pq}.$$

Las componentes de la derivada son

$$\frac{\partial \psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{A_{pq}}{A_{ij}} A_{pq} + \frac{1}{2} A_{pq} \frac{A_{pq}}{A_{ij}},$$

y observando que $\partial A_{pq}/\partial A_{ij} = \delta_{pi}\delta_{qj}$, es decir,

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial A_{11}} = 1, \quad \frac{\partial A_{11}}{\partial A_{12}} = 0, \quad \frac{\partial A_{11}}{\partial A_{13}} = 0, \quad \text{etc.},$$

se tiene entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \delta_{pi}\delta_{qj} A_{pq} + \frac{1}{2} A_{pq} \delta_{pi}\delta_{qj} = A_{ij},$$

por lo que

$$D\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Ejemplo 2: Nos proponemos ahora obtener la derivada del determinante de un tensor, es decir $D(\det(\mathbf{A}))$. Para ello, considerando un tensor arbitrario \mathbf{U} , empezamos por desarrollar la expresión

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) &= \det[h\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{h}\mathbf{1})] \\ &= \det(h\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{h}\mathbf{1}).\end{aligned}$$

De los dos factores que se obtienen, el primero vale $h^3 \det(\mathbf{A})$, y el segundo puede considerarse como el polinomio característico (77) de $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}$ con $\lambda = -1/h$, que en función de los invariantes resulta:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) &= h^3 \det(\mathbf{A}) \cdot \left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^2} I_1(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{h} I_2(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + I_3(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) \right) \\ &= \det(\mathbf{A})(1 + hI_1(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + h^2 I_2(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + h^3 I_3(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U})),\end{aligned}$$

aplicando la definición de derivada (101),

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\det(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) - \det(\mathbf{A})) \\ = \det(\mathbf{A})(I_1(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + hI_2(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}) + h^2 I_3(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U})),\end{aligned}$$

y tomando el límite,

$$D \det(\mathbf{A}) : \mathbf{U} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\det(\mathbf{A} + h\mathbf{U}) - \det(\mathbf{A})) = \det(\mathbf{A}) I_1(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}).$$

Por último, teniendo en cuenta $I_1(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{C}^T : \mathbf{D}$, se llega a

$$D \det(\mathbf{A}) : \mathbf{U} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} : \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad D \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}. \quad (102)$$