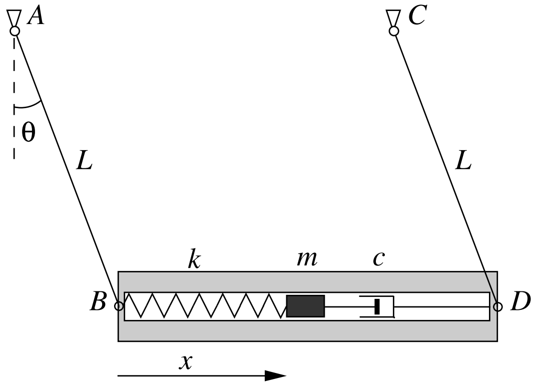
MECÁNICA

Soluciones Práctica n.º 9

curso 2004-2005

41. El sistema de la figura está formado por dos varillas AB y CD de longitud L y masa M, articuladas en sus extremos A y C a sendos puntos fijos, y en sus extremos B y D a un bastidor de masa despreciable (ver figura). El bastidor tiene una ranura en la que se mueve sin rozamiento un oscilador lineal formado por una masa m, un resorte de rigidez k y un amortiguador viscoso de constante c. En el instante inicial la masa m se encuentra en reposo relativo al bastidor y las varillas AB y CD son perpendiculares a dicho bastidor. Se pide:



1. Considerando que las varillas pueden girar libremente, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Suponiendo ahora que las varillas giran con velocidad angular impuesta $\dot{\theta} = \Omega$ constante, obtener la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en el bastidor, así como el par que es necesario aplicar a las varillas para obtener el movimiento deseado.

(Examen parcial 27/11/2004)

⋆

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, (θ, x). Desarrollamos en primer lugar la expresión de la energía cinética. Llamaremos $\boldsymbol{u}_\theta$ al versor de dirección perpendicular a AB en el sentido correspondiente al ángulo θ creciente, e $\boldsymbol{i}$ al versor de dirección de la ranura (horizontal). La velocidad de la masa m la obtendremos por composición del movimiento en el arrastre del bastidor y el relativo de la masa dentro de él:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{\theta} L \boldsymbol{u}_\theta + \dot{x}\boldsymbol{i}\,, \tag{1}$$

con lo que resulta:

$$T = 2\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2L^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta)\,. \tag{2}$$

Las fuerzas actuantes provienen del peso, el resorte y el amortiguador viscoso. Los dos primeros provienen de un potencial,

$$V = -(2Mg\frac{L}{2} + mgL)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2\,, \tag{3}$$

donde se ha considerado el origen de x en la posición natural del resorte. Con este potencial se obtiene la Lagrangiana (parcial):

$$L = T - V = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2L^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta) + (M+m)gL\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{4}$$

La fuerza disipativa del amortiguador se obtiene desarrollando su trabajo virtual,

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x^{\text{dis}} = -c\dot{x}\,. \tag{5}$$

Ya podemos obtener las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}M + m\right) L^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x}\cos\theta + (M+m)gL\operatorname{sen}\theta = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + m\ddot{\theta}L\cos\theta - m\dot{\theta}^2 L\operatorname{sen}\theta + kx = -c\dot{x}\,. \tag{7}$$

2.— Podemos considerar que el sistema tiene un sólo grado de libertad (x), ya que la coordenada θ viene definida por el movimiento impuesto: $\theta = \Omega t$, $\dot{\theta} = \Omega$. La ecuación de Lagrange de la dinámica es la correspondiente a (7) particularizando para el movimiento impuesto de θ:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\Omega^2 L\operatorname{sen}\Omega t\,. \tag{8}$$

Podríamos alternativamente considerar el sistema con dos grados de libertad, pero en este caso debemos introducir explícitamente un par M_θ aplicado a las varillas para que se obtenga el movimiento deseado. Es fácil ver que este par sería precisamente la fuerza generalizada según θ, ya que el trabajo virtual adicional desarrollado por el mismo es

$$\delta W = M_\theta \delta\theta \quad \Rightarrow \quad Q_\theta = M_\theta\,. \tag{9}$$

Con esto la ecuación de la dinámica en θ resulta de (6), agregando la fuerza generalizada (9) en el lado derecho y sustituyendo el movimiento impuesto de θ:

$$mL\ddot{x}\cos\Omega t + (M+m)gL\operatorname{sen}\Omega t = M_\theta\,. \tag{10}$$

Esta ecuación sirve para calcular el valor necesario de M_θ.